Probabilidad I
Tarea 9
Entregar: 02/12/2011

1. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea X_n una variable aleatoria con distribución uniforme en el conjunto $\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n}{n}\}$.
   a) Demuestre directamente que $X_n \xrightarrow[n]{D} X$.
   b) Demuestre que la sucesión de funciones generadoras $\{M_{X_n}\}$ converge a M_X.

2. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, todas con distribución exponencial de parámetro λ y sea Φ la función de distribución de una variable aleatoria con distribución normal estándar. Utilize el teorema del límite central para expresar la función de distribución de $Z = X_1^2 + \cdots + X_n^2$ en términos de Φ.

3. Demuestre que
$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{2n} \frac{n^k}{k!} = 1.$$

4. Sean X_n y Y_n variables aleatorias independientes con distribución Poisson de parámetro n. Demuestre que $(X_n - Y_n)/\sqrt{2n} \xrightarrow[n]{d} X$, donde X es una variable aleatoria normal estándar.

5. Sean $Y_1, Y_2, \ldots$ variables aleatorias independientes todas con distribución uniforme en el conjunto $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Defina $X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k 10^{-k}$. Demuestre que X_n converge en distribución a la distribución uniforme en $[0,1]$.

6. Se tienen 100 componentes, los cuales se utilizan en serie, es decir: primero se utiliza el componente 1, al fallar éste se utiliza el componente 2, al fallar este se utiliza el componente 3; y así sucesivamente. Estime la probabilidad de que el tiempo total de vida de los 100 componentes exceda 1200 suponiendo que, para cada $i \in \{1, \ldots, 100\}$ el tiempo de vida del componente i tiene distribución:
   a) uniforme en el intervalo $(0, 20 + i/5)$;
   b) exponencial de parámetro $\lambda_i = 1/(10 + i/10)$.

7. Sea $\{N_t, t \geq 0\}$ un proceso de Poisson de intensidad $\lambda > 0$. Demuestre que

$$\frac{N_t - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} \xrightarrow[n]{d} X,$$

donde X es una variable aleatoria con distribución normal estándar.

8. Use el Teorema del Límite central para evaluar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^n x^{n-1} e^{-x}\, dx.$$

Sugerencia: considere una suma de exponenciales de parámetro 1.