Probabilidad I
Tarea 8
Entregar: 22/11/2011

1. Sean $\{X_n\}$ y $\{Y_n\}$ dos sucesiones de variables aleatorias tales que $X_n \xrightarrow[n]{p} X$ y $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n - Y_n)^2 = 0$. Demuestre que
$$Y_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} X.$$

2. Sea $\{Y_i\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, tales que Y_i tiene distribución Bernoulli de parámetro p_i. Demuestre que para cualquier $\epsilon > 0$,
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{n}\right| > \epsilon\right) = 0.$$

3. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con $\mathbb{E}(X_n) = \mu$ y $\mathrm{Var} X_n = \sigma^2$. Sea $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Demuestre que
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} \sigma^2.$$

4. Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ un proceso de Poisson con intensidad $\lambda > 0$. Demuestre que
$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{\mathbb{P}} \lambda.$$