Probabilidad I
Tarea 6
Entregar: 01/11/2011

1. Sea $\{S_n, n \geq 0\}$ la caminata aleatoria simple con $S_0 = 0$, y defina $T =: \{n \geq 1 : S_n = 0\}$ el primer tiempo de regreso al punto de inicio. Demuestre que

$$\mathbb{P}(T = 2n) = \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}2^{-2n}.$$

Deduzca de lo anterior que $\mathbb{E}(T^\alpha) < \infty$ si, y sólo si, $\alpha < \frac{1}{2}$. *Sugerencia:* recuerde la fórmula de Stirling, $n! \sim n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi}$.

2. Sea $\{S_n, n \geq 0\}$ la caminata aleatoria simple simétrica con $S_0 = 0$ y sea $M_n = \max_{n\geq 0} S_n$. Demuestre que

$$\mathbb{P}(M_n = r) = \mathbb{P}(S_n = r) + \mathbb{P}(S_n = r+1), \ r \geq 0.$$

3. Sea $\{S_n, n \geq 0\}$ la caminata aleatoria simple simétrica con $S_0 = 0$.
a) Demuestre que

$$\mathbb{P}(S_1 S_2 \cdots S_{2m} \neq 0) = \mathbb{P}(S_{2m} = 0), \ m \geq 1.$$

b) Sea $\alpha_{2n}(2k)$ la probabilidad de que la última visita a 0 antes del tiempo $2n$ ocurrió en el tiempo $2k$. Justifique que

$$\alpha_{2n}(2k) = \mathbb{P}(S_{2k} = 0)\mathbb{P}(S_1 S_2 \cdots S_{2n-2k} \neq 0).$$

c) Pruebe que

$$\alpha_{2n}(2k) = \mathbb{P}(S_{2k} = 0)\mathbb{P}(S_{2n-2k} = 0).$$

4. Sea X una v.a. no-negativa con función generadora de probabilidades $G_X(s)$ tal que $G'_X(1) < \infty$. Demuestre que

$$G(s) = \frac{1}{\mathbb{E}(X)}\frac{1 - G_X(s)}{1-s}$$

es la función generadora de probabilidades de alguna variable aleatoria Y. ¿Cuando se tiene que $G(s) = G_X(s)$?

5. Sea (Z_n) un proceso de Galton-Watson con $Z_0 = 1$, $\mathbb{E}(Z_1) = \mu > 0$ y $\mathrm{Var}(Z_1) > 0$. Demuestre que $\mathbb{E}(Z_n Z_m) = \mu^{n-m}\mathbb{E}(Z_m^2)$, $m \leq n$. Luego, encuentre $\rho(Z_n, Z_m)$ en términos de μ.

6. Sea (Z_n) con en ejercicio anterior. Sea G_n la función generadora de probabilidades de Z_n.

   (a) Encuentre una expresión para G_n cuando la función generadora de Z_1 está dada por $G_1(s) \equiv G(s) = 1 - \alpha(1-s)^{\beta}$, $0 < \alpha, \beta < 1$.

   (b)Encuentre $\mathbb{P}(Z_1 = k)$, $k = 0, 1, \ldots$.