TAREA 5
Soluciones

Prob 2.-

Demostración. Por definición tenemos que las funciones de densidad están dadas por

$$f_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad y \quad f_{Y|X}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}.$$

Por lo tanto basta con que calculemos $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \textstyle\sum_y f_{X,Y}(x,y) \\
&\quad \text{dado que } x<y, x,y \in \{1,2,\ldots,N\} \\
&= \textstyle\sum_{y=x+1}^{N} \frac{6(y-x)}{N(N^2-1)} \\
&\quad \text{haciendo el cambio } i = y-x \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{N-x} \frac{6i}{N(N^2-1)} \\
&= \textstyle\frac{6}{N(N^2-1)} \sum_{i=1}^{N-x} i \\
&= \textstyle\frac{6}{N(N^2-1)} \frac{(N-x)\cdot(N-x+1)}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \textstyle\sum_x f_{X,Y}(x,y) \\
&\quad \text{dado que } x<y, x,y \in \{1,2,\ldots,N\} \\
&= \textstyle\sum_{x=1}^{y-1} \frac{6(y-x)}{N(N^2-1)} \\
&= \textstyle\frac{6}{N(N^2-1)} \sum_{x=1}^{y-1} (y-x) \\
&= \textstyle\frac{6}{N(N^2-1)} \left(\sum_{x=1}^{y-1} y - \sum_{x=1}^{y-1} x\right) \\
&= \textstyle\frac{6}{N(N^2-1)} \left((y-1)y - \frac{(y-1)(y-1+1)}{2}\right) \\
&= \textstyle\frac{6}{N(N^2-1)} \frac{(y-1)y}{2}.
\end{aligned}$$

$\therefore$

$$f_{X|Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2(y-x)}{y(y-1)} & \text{si } 1 \le x < y \le N. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$f_{Y|X}(x,y) = \begin{cases} \frac{2(y-x)}{(N-x)(N-x+1)} & \text{si } 1 \leq x < y \leq N. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$\square$

Prob 4.-

Demostración. Haremos este problema por inducción sobre n. Para el caso $n = 1$, se tiene que $X_1 \sim Geo(p)$. Por lo tanto $\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{p}$. Supongamos que para $k \leq n$ se tiene que $\mathbb{E}(X_k) = \sum_{i=1}^{k} p^{-i}$. Ahora probaremos que es valido para $n = k+1$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{k+1}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{k+1}|X_k)) \\ &= \textstyle\sum_{x=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_{k+1}|X_k = x)\mathbb{P}(X_k = x) \\ &= \textstyle\sum_{x=1}^{\infty} (x + 1 + (1-p)\mathbb{E}(X_{k+1}))\mathbb{P}(X_k = x) \\ &= \textstyle\sum_{x=1}^{\infty} x\mathbb{P}(X_k = x) + \sum_{x=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_k = x) + \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)\mathbb{E}(X_{k+1})\mathbb{P}(X_k = x) \\ &= \mathbb{E}(X_k) + 1 + (1-p)\mathbb{E}(X_{k+1}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$p\mathbb{E}(X_{k+1}) = 1 + \sum_{i=1}^{k} p^{-i}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbb{E}(X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} p^{-i}$$

$\therefore$

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} p^{-i} \text{ para toda } n \in \mathbb{N}$$

$\square$