

Problema 6 de la Tarea 5.

Saúl Toscano Palmerín

October 30, 2011

6) Sea X_k el número de volados jugados dado que el jugador A tiene k monedas. Sea F el evento de que A gane el primer volado. Entonces

$$\begin{aligned}E(X_k|F) &= 1 + E(X_{k+1}) \\E(X_k|F^c) &= 1 + E(X_{k-1})\end{aligned}$$

para $0 < k < n$.

Luego,

$$E(X_k) = E(X_k|F)P(F) + E(X_k|F^c)P(F^c) = 1 + \frac{1}{2}E(X_{k+1}) + \frac{1}{2}E(X_{k-1})$$

Resolviendo la recursión, obtenemos que

$$E(X_k) = k(n - k)$$

Dado que X es una binomial de parámetros $(n, \frac{1}{2})$, entonces podemos concluir que

$$E(D_X) = E(E(D_X|X)) = E(X(n - X)) = n(n - 1)\frac{1}{4}$$

Finalmente,

$$\text{cov}(X, D_X) = E(X^2(n - X)) - \frac{n}{2} \frac{n(n-1)}{4} = 0.$$

(Arriba he usado que $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$).