Probabilidad I
Tarea 5
Entregar: 20/10/2011

1. Sean X y Y dos variables aleatorias discretas, y g una función de real-valuada. Demuestre lo siguiente
$$\mathbb{E}(X|Y, g(Y)) = \mathbb{E}(X|Y).$$

2. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta dada por
$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{N(N^2-1)}(y - x), & \text{si } x < y \text{ y } x, y \in \{1, \dots, N\}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
Encuentre la función de densidad condicional de: (i) X dado Y; (ii) Y dado X.

3. Sea X y Y variables aleatorias independientes con distribución Poisson. Sea $Z := X + Y$. Encuentre la distribución condicional de X dado Z.

4. Una moneda muestra águila con probabilidad p. Sea X_n el número de lanzamientos necesarios para obtener un corrida de n águilas consecutivas. Demuestre que
$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} p^{-k}.$$
Sugerencia: recuerde que $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_n|X_{n-1})]$.

5. Se eligen, al azar y sin reemplazo, dos tarjetas de una urna que contiene N tarjetas numeradas del 1 al N, con $N \geq 1$. Sean X y Y el menor y mayor, respectivamente, de los números en la tarjetas seleccionadas. Encuentre $\mathbb{E}(X|Y)$ y $\mathbb{E}(Y|X)$.

6. Dos jugadores A y B tienen n monedas. Se las reparten de la siguiente manera: lanzan cada moneda y A obtine las que resultan "águila", digamos X, entonces B obtine las restantes $n - X$ monedas.

   Luego, A y B juegan volados independientes y justos, cada vez que A gana (la moneda cae águila) B le da una moneda al jugador A; y cada vez que pierde le da una moneda a B. El juego termina cuando uno de ellos se queda sin monedas.

Sea D_X el número de volados jugados. Encuentre $\mathbb{E}(D_X)$, y demuestre que $\rho(X, D_X) = 0$.