Probabilidad I
Tarea 4
Entregar: 29/09/2011

1. Sea S_N una variable alatoria Poisson compuesta, es decir,

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

donde N es Poisson con parámetro λ y (X_i) es una sucesión de variables aleatorias independientes, también independiente de N, con distribución común F.
(i)Demuestre que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(S_N^n) = \lambda \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \mathbb{E}(S_N^j)\mathbb{E}(X^{n-j}),$$

donde X es una variable aleatoria con distribución F e independiente de todas la variables aleatorias anteriormente definidas.
(ii) Suponga que X_i toma valores en los enteros positivos, y sea

$$\alpha_j = \mathbb{P}(X_i = j), \ j = 1, 2, \cdots .$$

Sea $p_n = \mathbb{P}(S_N = n)$. Demuestre que $p_0 = e^{-\lambda}$, y que para cada $n \geq 1$,

$$p_n = \frac{\lambda}{n} \sum_{j=1}^{n} j \alpha_j p_{n-j}.$$

Sugerencia: considere la función $h(x) = 1/n$, si $x = n$, y 0 en otro caso.

2. Sea X y Y variables aleatorias independientes, ambas con distribución uniforme en $\{1, \ldots, N\}$, $N \in \mathbb{N}$. Encuentre la esperanza de $U = \min\{X, Y\}$ y $V = |Y - X|$.

3. (i) Sean $X_1, \cdots, X_n$ variables aleatorias independientes con valores en $\mathbb{N}$, y con distribución común $p_i = \mathbb{P}(X = i)$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Defina $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} p_k$. Demuestre que

$$\mathbb{E}(\min(X_1, \cdots, X_n)) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k^n.$$

(ii) Suponga que $X_i \sim \mathrm{Geo}(p)$, i.e., $\mathbb{P}(X_i = k) = p(1-p)^{k-1}$, para $k \geq 1$. Use el resultado anterior para demostrar que $\min(X_1, \cdots, X_n) \sim \mathrm{Geo}(1-q^m)$, donde $q = 1-p$.

4. Dos jugadores A y B tienen n monedas. Se las reparten de la siguiente manera: lanzan cada moneda y A obtine las que resultan "águila", digamos X, entonces B obtine las restantes $n-X$ monedas.

   Luego, A y B juegan volados independientes y justos, cada vez que A gana (la moneda cae águila) B le da una moneda al jugador A; y cada vez que pierde le da una moneda a B. El juego termina cuando uno de ellos se queda sin monedas.

   Sea D_X el número de volados jugados. Encuentre $\mathbb{E}(D_X)$, y demuestre que $\rho(X, D_X) = 0$, donde

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}.$$

5. (i) Sea X una variable aleatoria tal que $\mathbb{E}(X^2) < \infty$. Encuentre

$$\min_a \mathbb{E}[(X-a)^2].$$

   (ii) Suponga que X tiene media μ y varianza σ^2. Demuestre que

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \leq \epsilon\sigma) \geq 1 - \frac{1}{\epsilon^2}, \ \epsilon > 0.$$

6. Sean X y Y variables aleatorias con función de densidad de probabilidades conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{C}{(x+y-1)(x+y)(x+y+1)}, \ x, y = 1, 2, \ldots.$$

   (i) Calcule la constante C.
   (ii) Encuentre la función de probabilidades de $U = X+Y$ y $V = X-Y$.

7. Sean $U, X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con distribución uniforme en $(0,1)$. Defina X por

$$X = \#\{i : X_i < U\}.$$

   Encuentre $\mathbb{P}(X = i)$.