Probabilidad I
Tarea 3
Entregar: 15/09/2011

1. Un vector aleatorio (X, Y) de distribuye uniformemente en el cuadrado con vertices $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ y $(-1, -1)$. Encuentre la función de densidad conjunta del vector (X, Y), y determine la probabilidad de los siguientes eventos: $\{X^2 + Y^2 < 1\}$, $\{2X - Y > 0\}$, y $\{|X + Y| < 2\}$.

2. Sean X y Y variables aleatorias independientes con distribución geométrica de parámetro p. Defina $U = \min\{X, Y\}$ y $V = X - Y$. Demuestre que U y V son independientes.

3. Sea g una función no negativa tal que
$$\int_0^\infty g(y)\, dy = 1.$$
Demuestre que
$$f(x, y) = \frac{2g(\sqrt{x^2 + y^2})}{\pi\sqrt{x^2 + y^2}},$$
es una función de densidad conjunta en $\mathbb{R}^2$.

4. Considere la función
$$f_\theta(i, j) = \begin{cases} \theta^{i+j+1}, & i, j = 0, 1, \cdots \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
¿Para que valores de θ se tiene que f es una función de probabilidades conjunta? ¿Existe algún valor de θ tal que las variables aleatorias asociadas son independientes?

5. Sea f una función definida por
$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} cx^2(4 - y), & x < y < 2x,\ 0 < x < 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
Determine la constante c tal que $f_{X,Y}$ sea función de densidad conjunta, y encuentre las densidades marginales f_X y f_Y.