Probabilidad I
Tarea 2
Entregar: 08/09/2011

Nota: el ejercicio 2 no es para entregar.

El objetivo de la tarea es repasar los conceptos de independencia y probabilidad condicional.

1. Sean A, B y C eventos. Suponga que A y B son independientes, y que B y C también son independientes. En cada una de las siguientes preguntas justifique su respuesta:
   a) ¿En general, son A y C independientes?
   b) ¿Es B independiente de $A \cup C$?
   c) ¿Es B independiente de $A \cap C$?

2. Sea $(a_k, k \geq 0)$ una sucesión de números reales.
   a) Si la sucesión $(u_k, k \geq 0)$ satisface
   $$u_{k+1} - a_k u_k = 0,$$
   entonces
   $$u_k = u_0 \prod_{j=0}^{k-1} a_j.$$
   b) Si $(u_k, k \geq 0)$ satisface
   $$u_k - u_k = c\alpha^k,$$
   donde c y α son constantes, entonces
   $$u_k - u_0 = c\frac{\alpha^k - 1}{\alpha - 1}.$$
   c) Suponga que existen constantes a, α, c_1 y c_2, se tiene que
   $$u_{k+1} - au_k = c_1 + c_2\alpha^k, \ a \neq \alpha,$$
   entonces
   $$u_k = u_0 a^k + \frac{c_1(1 - a^k)}{1 - \alpha} + \frac{c_2(\alpha^k - a^k)}{\alpha - a}.$$

3. Dos jugadores de golf A y B juegan unas serie de hoyos. El jugador A gana una hoyo con probabilidad p, el jugador B gana un hoyo con probabilidad q, y los hoyos son empatados con probabilidad r. Suponga que los hoyos son independientes, y que el juego termina en el primer hoyo no empatado.
   a)¿Cuál es la probabilidad de que el jugador A gane?
   b) Demuestre que la probabilidad, u_n, de que el jugador A gane antes o exactamente al n-ésimo hoyo es $p(1 - r^n)/(1 - r)$.
   c) Dado que A gana el juego antes o exactamente al n-ésimo hoyo, demuestre que:
   c.1) la probabilidad de que el primer hoyo fue empatado es $r(1 - r^{n-1})(1 - r^n)$,
   c.2) la probabilidad de que primer hoyo fue ganado está dada por $(1 - r)/(1 - r^n)$.

4. Sea $(N_1, \ldots, N_r)$ un vector aleatorio con distribución multinomial de parámetros $n, p_1, \ldots, p_r$. Demuestre que, dada cualquier subcolección $N_{i_1}, \ldots, N_{i_s}$, tomada de entre las variables aleatorias $N_1, \ldots, N_r$, el vector aleatorio $(N_{i_1}, \ldots, N_{i_s}, n - \sum_{j=1}^{s} N_{i_j})$ tiene distribución multinomial con parámetros n, $p_{i_1}, \ldots, p_{i_s}$, $1 - \sum_{j=1}^{s} p_{i_j}$.

5. Consideremos el experimento aleatorio de lanzar 10 veces un par de dados y definamos X como el número de veces que no se obtiene un 5 en ninguno de los dos dados y Y como el número de veces en que se obtiene 5 en los dos dados. Encuentre la función de densidad conjunta de X y Y.

6. Sea (X, Y) un vector aleatorio discreto con función de densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} cx, & \text{si } x, y \in \{1, \ldots, N^2\}, \ x \leq y^2, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

   donde N es un número natural y c es una constante.
   a) Determine la constante c.
   b) Encuentre $\mathbb{P}(X = Y)$, $\mathbb{P}(X < Y)$ y $\mathbb{P}(X > Y)$.
   c) Encuentre las densidades marginales de X y Y.

7. Cada una de N partículas se coloca al azar en una de M celdas. Supongamos que N tiene distribución de Poisson con parámetro λ y, para cada $k \in \{1, \ldots, M\}$, sea X_k en número de partículas en la urna k. Demuestre que las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_M$ son variables aleatorias independientes y que cada una de ellas tiene distribución Poisson.