Capítulo 1

Convergencia de variables aleatorias

El objetivo del presente capítulo es estudiar algunos tipos de convergencia de variables aleatorias. Iniciaremos con la definición de los distintos modos de convergencia.

1.1. Definiciones básicas

Definición 1.1.1 *Sean $X_1, X_2, \cdots$ y X variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$; con funciones de distribución $F_1, F_2, \cdots$ y F, respectivamente.*

1. *$\{X_n\}$ converge a X casi seguramente (c.s.), si*

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \to_n X(\omega)\}) = 1.$$

   Usaremos la siguiente notación: $X_n \xrightarrow[n]{c.s.} X$.

2. *$\{X_n\}$ converge a X en media p-ésima, $p \geq 1$, si $\mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty$, para toda n y*

$$\mathbb{E}\left(|X_n - X|^p\right) \to_n 0.$$

   Se usará la notación común: $X_n \xrightarrow[n]{L^p} X$.

3. *$\{X_n\}$ converge en probabilidad a X, si*

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \to_n 0, \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

   La convergencia en probabilidad se denota por: $X_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} X$.

4. *$\{X_n\}$ converge en distribución a X, si*

$$F_n(x) \to_n F(x),$$

   para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que F es continua en x. Usaremos la notación: $X_n \xrightarrow[n]{d} X$[1].

[1] Es importante hacer notar que, para este tipo de convergencia, no es necesario que las variables aleatorias esten definidas sobre el mismo espacio de probabilidad.

Notemos que, la convergencia casi segura es práticamente la convergencia sucesiones en análisis ya que, dado $\omega \in \Omega$, se tiene que $\{X_n(\omega)\}$ es una sucesión de números reales. Por lo tanto, el conjunto donde $\{X_n(\omega)\}$ no converge tiene probabilidad cero. Por otro lado, convergenia en media p-ésima en análisis es conócida como convergencia en L^p.

Vale la pena mencionar que los tipos de convergenia definidos anteriormente no son equivalentes, de hecho, en general se cumple el siguiente

Teorema 1.1.2 *En general se cumple que*

$$X_n \xrightarrow[n]{c.s} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} X, \tag{1.1}$$

$$X_n \xrightarrow[n]{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} X, \tag{1.2}$$

y

$$X_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n]{d} X. \tag{1.3}$$

En este curso nos concentraremos en estudiar algunas de las propiedades de convergencia en probabilidad y convergencia en distribución. Cabe mecionar que, los otros modos de convergencia también son importantes en la teoría de probabilidad.

1.2. Convergencia en probababilidad

La primera cosa que nos gustaría saber es si el límite está bien definido. El objetivo de la siguiente proposición es precisamente dar respuesta a la pregunta anterior.

Proposición 1.2.1 *(Unicidad del límite) Sea $\{X_n\}$ una sucesión variables aleatorias tal que $X_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} X$ y $X_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} Y$, entonces $\mathbb{P}(X = Y) = 1$.*

Demostración: Por la desigualdad de triángulo tenemos que

$$|X - Y| \leq |X_n - X| + |X_n - Y|.$$

Entonces, para cada $\epsilon > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \{|X - Y| > \epsilon\} &\subset \{|X_n - X| + |X_n - Y| > \epsilon\} \\ &\subset \{|X_n - X| > \epsilon/2\} \cup \{|X_n - Y| > \epsilon/2\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por la definición de convergencia en probabilidad tenemos que

$$\mathbb{P}(|X - Y| > \epsilon) = 0, \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Finalmente, notemos que

$$\{|X - Y| > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} \{|X - Y| > 1/n\},$$

es decir,

$$\mathbb{P}(|X-Y|>0) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X-Y|>1/n) = 0.$$

$\square$

Proposición 1.2.2 *Sean $\{X_n\}$ y $\{Y_n\}$ dos sucesiones de variables aleatorias tales que $X_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} X$ y $Y_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} Y$. Entonces, para todo $c \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$cX_n + Y_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} cX + Y.$$

Demostración: Es claro que si $c = 0$ no hay nada que probar. Por lo tanto, supongamos que $c \neq 0$. Usando argumentos similares a los usados en la Proposición 1.2.1 se obtiene que, para todo $\epsilon > 0$

$$\{|cX_n - cX + Y_n - Y| > \epsilon\} \subset \{|cX_n - cX| > \epsilon\} \cup \{|Y_n - Y| > \epsilon\}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|cX_n - cX + Y_n - Y| > \epsilon) \\ \leq & \lim_{n\to\infty} [\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon/|c|) + \mathbb{P}(|Y_n - Y| > \epsilon)] \\ = & \ 0. \end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 1.2.3 *Sea $\Omega = (0,1]$ y $\mathbb{P}$ la medida que asigna a cada intervalo su longitud. Dicha medida es conocida con medida de Lebesgue sobre Ω. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $X_n = \mathbf{1}_{(0,1/n)}$, es decir, para cada $\omega \in \Omega$*

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1, & si\ w < 1/n, \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Demuestre que $X_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} 0$.
Solución: *sea $\epsilon > 0$, entonces*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) &= \mathbb{P}(X_n > \epsilon) \\ &= \begin{cases} 1/n, & si\ \epsilon < 1, \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) = 0,$$

lo cual demuestra que $X_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} 0$.

Ejemplo 1.2.4 *Sean Ω y $\mathbb{P}$ como en el ejemplo anterior. Considere la siguiente sucesión*

$$X_n = \begin{cases} \mathbf{1}_{(0,1/n]}, & si\ n\ es\ impar, \\ \mathbf{1}_{(1/n,1]}, & si\ n\ es\ par. \end{cases}$$

En este caso, se tiene que $\{X_n\}$ no converge en probabilidad.

En efecto, sea $\epsilon > 0$, entonces para cada n impar se tiene que

$$\mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) \begin{cases} 1/n, & si\ \epsilon < 1 \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Por lo tanto, $X_{2n+1} \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} 0$.

Por otro lado, para n par se tiene que

$$\mathbb{P}(|X_n - 1| > \epsilon) \begin{cases} 1/n, & si\ \epsilon < 1 \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Lo cual implica que $X_{2n} \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} 1$. □

Ejemplo 1.2.5 *(Variables aleatorias i.i.d.) Sea $\{X_n\}$ un sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con media μ y variaza finita σ^2. Definamos*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Entonces, $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n]{L^2} \mu$.

Solución: *notemos que*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right|^2\right) &= \mathbb{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_n - \mu))\right|^2 \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_n - \mu)^2, \ \textit{(independencia)} \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, haciendo $n \to \infty$, obtenemos que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n]{L^2} \mu$. □

El ejemplo anterior contiene la demostración de la Ley débil de los grandes números, la cual enunciamos en el siguiente

Teorema 1.2.6 *(Leyes de los grandes números) Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con media $\mu < \infty$. Entonces,*
(i) (Ley débil de los grandes números)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} \mu.$$

(ii) (Ley fuerte de los grandes números)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n \xrightarrow[n]{c.s.} \mu.$$

Demostraremos la parte (i) bajo el supuesto adicional que las variables aleatorias tienen segundo momento finito. La demostración de la parte (ii) requiere de algunos conceptos más avanzados, y por lo tanto, por el momento postponemos su demostración.
Demostración: Sea $\epsilon > 0$, luego por la desigualdad de Chebyshev tenemos que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n - \mu\right| > \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n - \mu\right|^2.$$

El resultado se concluye aplicando el Ejemplo 1.2.5. □

Obeservemos que, la parte (i) del teorema anterior es un caso particular de (1.2).

Lema 1.2.7 *Sean $\{X_n, X\}$ variables aleatorias tales que $X_n \xrightarrow[n]{L^p} X$, para algún $p \geq 1$. Entonces, $X_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} X$.*

Demostración: La demostración usa la misma idea de la prueba del Teorema 1.2.6 (i). Sea $\epsilon > 0$, entonces

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}|X_n - X|^p}{\epsilon^r} \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

□

El concepto de convergencia en probabilidad es importante en la teoría estadística ya que, si $\hat{\theta}_n := \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ es un estimador para un parámetro θ, se dice que $\hat{\theta}_n$ es un estimador consistente si $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} \theta$.