Probabilidad I
Solución al primer examen parcial

1. (1 punto) (i) Sea (A_n) una sucesión de eventos tales que $A_{n+1} \subset A_n$, para cada n. Demuestre que
$$\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$
(1 punto) (ii) Sea X una variable aleatoria con función de distribución F. Demuestre que F es continua por la derecha, es decir,
$$F(x+h) \to F(x),\ \ h \downarrow 0,$$
y que F tiene límites por la izquierda, $\lim_{h\downarrow 0} F(x-h)$ existe.

2. (i) (1 punto) Defina cuando una colección de variables aleatorias son independientes.

(ii) (2 puntos) Sean X y Y dos variables aleatorias independientes ambas con distribución geométrica de parámetro p. Demuestre que
$$U := \min\{X,Y\} \text{ y } V := \max\{X,Y\} - \min\{X,Y\},$$
son variables aleatorias independientes.

Solución:

Vamos a encontrar la distribución conjunta de U y V. Sean $u, v \geq 0$,
$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\min\{X,Y\} = u, \max\{X,Y\} - \min\{X,Y\} = v) \\
&= \mathbb{P}(\min\{X,Y\} = u, \max\{X,Y\} - \min\{X,Y\} = v, X < Y) \\
&\quad + \mathbb{P}(\min\{X,Y\} = u, \max\{X,Y\} - \min\{X,Y\} = v, X > Y) \\
&\quad + \mathbb{P}(\min\{X,Y\} = u, \max\{X,Y\} - \min\{X,Y\} = v, X = Y).
\end{aligned}$$
Notemos que, el último término es positivo sólo para $v > 0$, en tal caso
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\min\{X,Y\} = u, \max\{X,Y\} - \min\{X,Y\} = 0) &= \mathbb{P}(X = Y = u) \\
&= \mathbb{P}(X = u, Y = u) \\
&= (1-p)^2 p^{2(u-1)}.
\end{aligned}$$
Consideremos ahora el caso $v \geq 1$,
$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\min\{X,Y\} = u, \max\{X,Y\} - \min\{X,Y\} = v) \\
&= \mathbb{P}(X = u, Y - X = v, X < Y) + \mathbb{P}(Y = u, X - Y = v, X > Y) \\
&= 2(1-p)^2 p^v p^{2(u-1)}.
\end{aligned}$$
En consecuencia,
$$\mathbb{P}(\min\{X,Y\} = u, \max\{X,Y\} - \min\{X,Y\} = v) = \begin{cases} (1-p)^2 p^{2(u-1)}, & u \geq 1, v = 0, \\ 2(1-p)^2 p^v p^{2(u-1)}, & u \geq 1, v \geq 1. \end{cases} \quad (1)$$

Ahora vamos a encontrar la función de probabilidades de U y V. Sabemos que U es geométrica de parámetro p^2, es decir,

$$\mathbb{P}(U=u)=(1-p^2)p^{2(u-1)},\ u=1,2,\ldots.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V=v) &= \mathbb{P}(\text{máx}\{X,Y\}-\text{mín}\{X,Y\}=v)\\ &= \mathbb{P}(X-Y=v,X>Y)+\mathbb{P}(Y-X=v,X<Y)+\mathbb{P}(X-Y=v,X=Y),\end{aligned}$$

donde el último término es distinto de cero sólo para $v=0$, en cuyo caso se tiene que

$$\mathbb{P}(V=0)=\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{y=1}^{\infty}(1-p)p^{y-1}(1-p)p^{y-1}=(1-p)^2\frac{1}{1-p^2}=\frac{1-p}{1+p}.$$

Consideremos ahora el caso $v\geq 1$. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V=v) &= \mathbb{P}(X-Y=v,X>Y)+\mathbb{P}(Y-X=v,X<Y)\\ &= \mathbb{P}(X=v+Y,X>Y)+\mathbb{P}(Y=v+X,X<Y)\\ &= \sum_{y=1}^{\infty}(1-p)p^{y-1}\mathbb{P}(X=v+y,X>y)+\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)p^{x-1}\mathbb{P}(Y=v+x,x<Y)\\ &= 2(1-p)^2p^v\sum_{y=1}^{\infty}p^{2(y-1)}\\ &= 2\frac{(1-p)^2}{1-p^2}p^v\\ &= 2\frac{(1-p)}{1+p}p^v.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U=u)\mathbb{P}(V=v) &= \begin{cases}(1-p^2)p^{2(u-1)}\frac{1-p}{1+p}, & u\geq 1, v=0,\\ (1-p^2)p^{2(u-1)}2\frac{1-p}{1+p}p^v, & u\geq 1, v\geq 1\end{cases}\\ &= \begin{cases}(1-p)^2p^{2(u-1)}, & u\geq 1, v=0,\\ 2(1-p)^2p^{2(u-1)}p^v, & u\geq 1, v\geq 1.\end{cases}\end{aligned}\tag{2}$$

Luego, de (1) y (2) se concluye que U y V son independientes. $\square$

3. (1 punto) Sean A, B y C variables aleatorias independientes, todas con distribución uniforme en $(0,1)$. Encuentre la probabilidad de que la ecuación

$$Ax^2+Bx+C=0,$$

tenga raíces reales.

Solución: Nos interesa conocer $\mathbb{P}(B^2-4AC \geq 0)$. Recordemos que si $X \sim \text{Unif}(0,1)$ entonces $-\log X \sim \text{Exp}(1)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B^2 - 4AC \geq 0) &= \mathbb{P}(-2\log B \leq \log 4 - \log A - \log C) \\
&= \mathbb{P}(-2\log B \leq -\log 4 + X),\ (X \sim \text{Gama}(2,1)) \\
&= \int_{\log 4}^{\infty} \mathbb{P}(-\log B \leq x/2) x e^{-x} dx\ (f_X(x) = xe^{-x}) \\
&= \int_{\log 4}^{\infty} e^{-x/2} x e^{-x} dx \\
&= \int_{\log 4}^{\infty} x e^{-\frac{3}{2}x} dx
\end{aligned}$$

4. (1 punto) Sea (X_n) una sucesión de variables aleatorias independientes tales que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i)$ es convergente. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)\right| > \epsilon\right) = 0,\ \text{para todo } \epsilon > 0.$$

Solución: Sea $\epsilon > 0$. Por la desigualdad de Chebyshev tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)\right| > \epsilon\right) &\leq \frac{1}{n^2\epsilon^2}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}(X_i))\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n^2\epsilon^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}(X_i))^2]\ \text{(independencia)} \\
&= \frac{1}{n\epsilon}\frac{\sum_{i=1}^{n}\text{Var}(X_i)}{n}.
\end{aligned}$$

Usando el hecho que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\text{Var}(X_i)$ es convergente se concluye el resultado. $\square$

5. Sean X y Y variables aleatorias con distribución conjunta

$$f_{X,Y}(i,j) = \begin{cases} \frac{c(i+j)a^{i+j}}{i!j!}, & i,j \geq 0, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde a es una constante positiva y c es la constante normalizadora. Encuentre,
(i) (1 punto) La distribución marginal de X y $\mathbb{E}(X)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
f_X(i) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c(i+j)a^{i+j}}{i!j!} \\
&= c\left[\frac{ia^i}{i!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a^j}{j!}e^{-a} + \frac{a^i}{i!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{ja^j}{j!}e^{-a}\right] \\
&= ce^a\frac{a^i}{i!}(i+a).
\end{aligned}$$

$\square$

(ii) (1 punto) $\mathbb{P}(X+Y=k)$.

Solución: Notemos que $X+Y \in \{1,2,\dots\}$. Entonces, para $k \geq 1$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i, Y=k-i) \\
&= ca^k \sum_{i=0}^{k} \frac{k}{i!(k-i)!} \\
&= c\frac{a^k}{(k-1)!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!} \\
&= c\frac{(2a)^k}{(k-1)!} \\
&= e^{-2a}\frac{(2a)^{k-1}}{(k-1)!},
\end{aligned}$$

en la última igualdad usamos que $c = e^{-2a}/(2a)$, lo cual se puede obtener fácilmente del punto i). $\square$

(iii) (1 punto) Determine si X y Y son independientes.

Solución: No son independientes dado que

$$f_{X,Y}(0,0) = 0 \neq f_X(0)f_Y(0).$$

$\square$