TAREA 11
9 de Noviembre de 2011
Se entrega Lunes 14 de Noviembre

Problema 1. *Probar por inducción la siguiente formula:*

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx).$$

La fórmula de De Moivre nombrada así por Abraham de Moivre.(Como nota, la formula se vale para cualquier potencia, es decir x podría ser un número complejo).

Problema 2. *Determina el valor de*

$$\sum_{k=0}^{n} i^k$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1. *Un subanillo S de un anillo $R = (A, +, \cdot)$ es un subconjunto $S \subset R$ que cumple que es cerrado para la suma y la multiplicación en el anillo, esto es, si $a, b \in S$, entonces $a + b \in S$ y $a \cdot b \in S$. Si $1 \in R$ (es decir, si el anillo es unitario), entonces se exigirá además que $1 \in S$.*

Problema 3. *Mostrar que los siguientes conjuntos son subanillos de $\mathbb{C}$:*

a) $\{(r, s) | r, s \in \mathbb{Q}\}$

b) $\{(a, b) | a, b \in \mathbb{Z}\}$

¿es cualquier de esos subanillos un campo? ¿es cualquier de esos isomorfo a $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$?

Definición 2. *El conjugado de un complejo z (denotado como $\bar{z}$ ó z^*) es un nuevo número complejo, definido así:*

$\bar{z} = a - \mathrm{ib} \Longleftrightarrow z = a + \mathrm{ib}$

Problema 4. *Probar las siguientes propiedades:*

$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

$z + \overline{z} = 2 \cdot Re(z)$

$z - \overline{z} = 2i \cdot Im(z)$

$\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$

$\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

$z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \bar{z} = z$

$|z|^2 = z\bar{z}$

$z \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Problema 5. *Simplificar los siguientes cocientes:*

a) $\frac{i}{2+i}$

b) $\frac{2-i}{1+i}$

c) $\frac{7}{i}$

d) $\frac{1+i}{1-i}$