TAREA 9
24 de Octubre de 2011
Se entrega Lunes 31 de Octubre

Problema 1. *Prueba que si* $S \subset \mathbb{R}$ *entonces* $sup\{-S\} = -inf\{S\}$ *y pon dos ejemplos.*

Problema 2. *Prueba que si* $S, T \subset \mathbb{R}^+, V = \{st; s \in S, t \in T\}$ *entonces* $supV = (supS)(supT)$.

Problema 3. *Di cuáles de estos conjuntos tienen cotas superiores o inferiores:*
a) $\{a - b; a, b \in \mathbb{Z}\}$.
b) $\{r^n; n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Q}, r > 1\}$.
c) $\{r^n; n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Q}, 0 < r < \frac{1}{2}\}$.

Problema 4. *Usa el principio del buen orden para probar que en* $\mathbb{Z}$ *todo conjunto que tiene cota superior (respectivamente inferior) tiene supremo (resp. ínfimo). Da un ejemplo (en otro anillo, claro), en el que esto no suceda.*

Problema 5. *a) Si* $x > 1$, *para cualquier* $y \in \mathbb{R}$ *existe un número natural* n *tal que* $x^n > y$.
b) Si $0 \leq x < 1$, *para cualquier* $0 \leq y \in \mathbb{R}$ *existe un número natural* n *tal que* $x^n < y$.

Problema 6. *a) Para cualquier* $y \in \mathbb{R}$ *existe un natural* n *tal que* $y < n$.
b) Si $z - y > 1$ *con* $y, z \in \mathbb{R}$ *existe un entero* a *tal que* $y < a < z$. *(Utiliza el principio del buen orden y a)).*

Problema 7. *Supongamos que* $y, z \in \mathbb{R}$ *son tales que* $z > y$. *Prueba que existe un entero* $a \in \mathbb{Z}$ *y un número natural* m *tales que* $y < \frac{a}{m} < z$. *(Indicación: escoge* m *tal que* $m > (z - y)^{-1}$ *y aplica el ejercicio anterior con* my *y* mz*).*

Problema 8. *Si* $X > X(0)$, *define un corte de Dedekind* Y *de modo que* $Y^2 = X$.

Problema 9. *Prueba que* $X(0) \cdot X = X(0)$ *y demuestra también la asociatividad y la conmutatividad del producto de* $\mathbb{R}$.