TAREA 2

1 de Septiembre de 2011.

Problema 1. *Usa inducción matemática para probar las siguientes identidades:*

(a)

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

(b)

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

(c)

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

(d)

$$1^6 - 2^6 + 3^6 - \cdots + (-1)^{n-1}n^6 = \frac{(-1)^{n-1}}{2}(n^6 + 3n^5 - 5n^3 + 3n).$$

(e)

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

(f)

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n+1}.$$

(g)

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

(h)

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)}\right)=\frac{1}{n+1}.$$

Problema 2. *Si t es un número real distinto de 1, prueba la siguiente igualdad usando inducción matemática:*

$$(1+t)(1+t^2)(1+t^4)+\cdots+(1+t^{2^{n-1}})=\frac{t^{2^n}}{t-1}$$

Problema 3. *Prueba que el principio de inducción y el principio de inducción generalizado son equivalentes.*

Problema 4. *Escribir la fórmula del binomio para $n = 15$ (determinando, claro, los coeficientes).*

Problema 5. *Calcular*

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

para n=7, $0 < m < 7$ y comparar el resultado con el obtenido mediante el triángulo de Pascal.

Problema 6. *Probar por inducción que si $m, n \in \mathbb{N}$ entonces n divide a*

$$m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1).$$

Problema 7. *Probar por inducción en r que*

$$(x_1+\cdots+x_r)^2 = {x_1}^2+\cdots+{x_r}^2+2(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{r-1}x_r)$$

Problema 8. *Probar que la suma de los ángulos interiores de un polígono regular de n lados es $(n-2)180^o$*

Problema 9. *Probar que los números enteros no verifican el principio del buen orden.¿ Lo verifican* $\mathbb{Q}$ *y* $\mathbb{R}$*?.*

Problema 10. *Consideremos la sucesioón de Fibonacci:* $u_1 = 1, u_2 = 1, u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, n \leq 2$ *(este tipo de definiciones se llaman inductivas o recursivas). Prueba que* u_n *es par si* n *es múltiplo de 3 y en caso contrario, que es impar.*