Material de Apoyo

1. Notación Usual

$\mathbb{N}$	Los números naturales $\{1, 2, 3, \ldots\}$.
$\mathbb{Z}$	Los enteros $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
$\mathbb{Q}$	Los números racionales (fracciones).
$\mathbb{R}$	Los números reales.
$\mathbb{P}$	Los números primos $\{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$.
$]a, b[$	El intervalo $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
$[a, b]$	El intervalo $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.
$]a, b]$	El intervalo $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.
$[a, b[$	El intervalo $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.
$]a, +\infty[$	El intervalo $\{x \in \mathbb{R} : x > a\}$.
$[a, +\infty[$	El intervalo $\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$.
$]-\infty, a[$	El intervalo $\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$.
$]-\infty, a]$	El intervalo $\{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$.
$\lfloor x \rfloor$	El único entero que satisface $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.
$\lceil x \rceil$	El único entero que satisface $x < \lceil x \rceil \leq x + 1$.
$\{x\}$	Parte fraccionaria de x.
$x \in X$	x pertenece a X.
$A \subset B$	A esta contenido en B.
$\forall$	Para todo.
$\exists$	Existe.
$\exists!$	Existe un único.
$\Rightarrow$	Implica.
$\Longleftrightarrow$	Si, y solo si.
$\therefore$	Por lo tanto.
$\blacksquare$	Lo cual queriamos demostrar.

2. Divisibilidad y Primos

2.1. Divisibilidad

Definición 1. *Un entero b es divisible por un entero a, no cero, si existe un entero x tal que $b = ax$ y se escribe $a \mid b$. En el caso en que no sea divisible por a se escribe $a \nmid b$.*
En ocasiones se usa la notación $a^k \parallel b$, para indicar $a^k \mid b$, pero $a^{k+1} \nmid b$.

Teorema 1. *Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tenemos que:*

1. *$a \mid b$ implica $a \mid bc$ para cualquier entero c;*
2. *$a \mid b$ y $b \mid c$ implica $a \mid c$;*
3. *$a \mid b$ y $a \mid c$ implica $a \mid (bx + cy)$ para cualquiera enteros x y y;*
4. *$a \mid b$ y $b \mid a$ implica $a = \pm b$;*
5. *$a \mid b$, $a > 0, b > 0$, implica $a \leq b$.*

Teorema 2. *El algoritmo de la división. Dados dos enteros cualesquiera a y b, con $a \geq 0$, existen los enteros q y r tales que $b = qa + r$, $0 \leq r \leq a$. Si $a \mid b$, entonces r satisface las desigualdades más fuertes $0 < r < a$.*

Definición 2. *Si $k \mid a$ y $k \mid b$, entonces se dice que k es un divisor común o un factor común de a y b.*
Se dice que g es el máximo común divisor de a y b, si g es el mayor de los divisores comunes a a y b, y se denota por (a, b).

Teorema 3. *Si g es el máximo común divisor de b y c, entonces existen los enteros x_0 e y_0 tales que $g = (b, c) = bx_0 + cy_0$.*

Teorema 4 (El algoritmo euclideano)**.** *Dados los enteros b y $c > 0$, se hace una aplicación repetida del algoritmo de la división,*

$$
\begin{array}{ccccc}
b & = & cq_1 + r_1 & & 0 < r_1 < c, \\
c & = & r_1 q_2 + r_2 & & 0 < r_2 < r_1, \\
r_1 & = & r_2 q_3 + r_3 & & 0 < r_3 < r_2, \\
 & \vdots & & & \vdots \\
r_{j-2} & = & r_{j-1} q_j + r_j & & 0 < r_j < r_{j-1}, \\
r_{j-1} & = & r_j q_{j+1} & &
\end{array}
$$

$\Rightarrow (b,c) = r_j$, *los valores* x_0 *y* y_0 *en* $(b,c) = bx_0 + cy_0$ *pueden obtenerse eliminando* $r_1, r_2, \ldots, r_{j-1}$ *en el conjunto de ecuaciones.*

Definición 3. *Sean* $a, b \in \mathbb{Z}$, *el menor de los múltiplos de* a *y* b *recibe el nombre de mínimo común múltiplo y se denota por* $[a, b]$.

3. Números primos

Entre los enteros positivos hay una sub-clase de importancia particular, la clase de los primos. Un número entero positivo p se llama *primo* si

(i) $p > 1$,
(ii) p no tiene divisores positivos además de 1 y p.

Por ejemplo, 37 es un primo. Es importante notar que 1 no se considera primo. Normalmente reservamos la letra p para los primos.

Un número entero positivo mayor que 1 y no primo se llama *compuesto*. Aquí está nuestro primer teorema:

Teorema 1. *Todo entero positivo, con excepción del 1, es un producto de primos.*

Demostración. Sea n un entero positivo mayor que 1. Si n es primo, no hay nada que probar. Si n no es primo, o sea compuesto, entonces tiene divisores entre 1 y n. Si m es el m'as pequeño entre estos divisores, m debe ser primo; porque si no, entonces m tendría un divisor l, $1 < l < m$, que necesariamente ser'ia también un divisor de n. Esto contradice la elección de m como el divisor m'as pequeño; as'i que m debe ser primo.

Concluimos entonces que si n no es primo es divisible entre un primo, digamos p_1, o sea

$$n = p_1 n_1,$$

donde n_1 es un entero positivo, $1 < n_1 < n$. Si n_1 es primo la demostración est'a terminada, y si no, continuamos como antes: n_1 es divisible entre un primo p_2 menor que n_1, as'i que

$$n = p_1 n_1 = p_1 p_2 n_2,$$

donde n_2 es un entero positivo, $1 < n_2 < n_1 < n$.

As'i seguimos y obtenemos una sucesión decreciente de enteros positivos $n > n_1 > n_2 > n_3 > \ldots > 1$. Tarde o temprano este proceso tiene que parar, o sea obtenemos un $n_k = p_k$ primo, y

$$n = p_1 p_2 p_3 \ldots p_{k-1} p_k. \tag{1}$$

Esto completa la demostración. □

4. Congruencias

4.1. Definición de congruencias

Si un entero positivo m divide a la diferencia $a-b$ de dos números, decimos que "a es *congruente* a b módulo m", y lo escribimos

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Por ejemplo,

$$5 \equiv 9 \pmod{4}, \quad -8 \equiv 3 \pmod{1}1, \quad 1997 \equiv 7 \pmod{10}, \text{ y } 10^n \equiv 1 \pmod{9},$$

para todo $n > 0$.

Esta definición no introduce nada nuevo, porque "$a \equiv b \pmod{m}$" y "$m|(a-b)$" tienen exactamente el mismo significado; pero cada notación tiene su ventaja.

Notamos que en esta definición a y b no tienen que ser números positivos, y de hecho ni enteros, aunque nosotros no lo vamos a usar más que para números enteros.

Si $x \equiv a \pmod{m}$ decimos tambien que "a es un *residuo* de x" $\pmod{m}$. Si $0 \leq a \leq m-1$, llamamos a a el residuo *mínimo* (no-negativo) de x, módulo m. As'i que dos números a y b son congruentes $\pmod{m}$ si tienen los mismos residuos $\pmod{m}$.

El residuo mínimo $\pmod{m}$ de un entero no-negativo x se puede determinar as'i: se divide x entre m, y lo que *sobra* es el residuo mínimo. Por ejemplo, el residuo mínimo de 100 $\pmod{7}$ es 2, porque al dividir 100 entre 7 el resultado es 14 (esto no importa) y sobran 2 (esto s'i importa). El residuo mínimo de $-100 \pmod{7}$ es $7-2=5$. (¿Por qué?)

Una *clase de residuos* (mod m) es la clase de todos los números congruentes a un número dado (mod m). Por ejemplo, la clase de residuos de 3 (mod 5) consiste de los números

$$\ldots -12, -7, -2,\ 3,\ 8,\ 13,\ 18, \ldots,$$

y la clase de residuos de 0 (mod m) consiste de todos los múltiplos de m

$$\ldots, -3m, -2m, -m,\ 0,\ m,\ 2m,\ 3m, \ldots.$$

Cada miembro de una clase de residuos (mod m) se llama un *representante* de la clase. Obviamente hay m clases de residuos (mod m), representados por los residuos mínimos

$$0, 1, 2, 3, \ldots, m-1.$$

Las congruencias son de gran importancia práctica en la vida cotidiana. Por ejemplo, "hoy me levant'e a las 6 de la mañana" es una afirmación acerca del número de horas que han pasado, módulo 24, desde algún tiempo fijo. La clase de residuos de este número de horas, o sea la hora del d'ia, es normalmente mucho m'as importante que el número real de horas que han pasado desde, digamos, la creación del universo. Calendarios y horarios de camión o clases, son tablas de congruencias, módulo 7, 365 y 24.

4.2. Propiedades elementales de congruencias

Es fácil demostrar que congruencias módulo un entero positivo fijo m satisfacen las siguientes propiedades:

$$\begin{array}{lll}
(i) & a \equiv b & \Longrightarrow\ b \equiv a, \\
(ii) & a \equiv b, b \equiv c & \Longrightarrow\ a \equiv c, \\
(iii) & a \equiv b & \Longrightarrow\ ka \equiv kb, \text{ para cualquier } k, \\
(iv) & a \equiv a', b \equiv b' & \Longrightarrow\ a + b \equiv a' + b' \quad \text{y} \quad ab \equiv a'b'.
\end{array}$$

Demostramos por ejemplo (iii). Si $a \equiv b$ entonces $m|(a-b)$ as'i que existe un l tal que $a - b = ml$. As'i que $k(a-b) = ka - kb = mlk$, as'i que $m|ka - kb$, y obtenemos que $ka \equiv kb \pmod m$.

Problemas de practica

Problema 5. *Probar que si x y y son enteros impares, entonces $x^2 + y^2$ es par, pero no es divisible entre 4.*

Demostración. x y y impares $\Rightarrow x = 2r + 1$ para algún $r \in \mathbb{Z}$ y $y = 2s + 1$ para algún $s \in \mathbb{Z}$, $\Rightarrow x^2 + y^2 = (2r + 1)^2 + (2s + 1)^2 = 4(r^2 + s^2 + r + s) + 2$
$\therefore 2 \mid x^2 + y^2, \text{ pero } 4 \nmid x^2 + y^2$ □

Problema 6. *Probar que el cuadrado de cualquier entero es de la forma $3k$ o bien $3k + 1$, pero no de la forma $3k + 2$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n$ es de la forma: $3r, 3r + 1$ o bien $3r + 2$.

$$\text{Caso 1: } n = 3r \Rightarrow n^2 = 9r^2 = 3(3r^2) = 3k.$$
$$\text{Caso 2: } n = 3r + 1 \Rightarrow n^2 = 9r^2 + 6r + 1 = 3(3r^2 + 2r) + 1 = 3k + 1.$$
$$\text{Caso 3: } n = 3r + 2 \Rightarrow n^2 = 9r^2 + 12r + 4 = 3(3r^2 + 4r) + 1 = 3k + 1.$$

$\therefore$ el cuadrado de cualquier entero es de la forma $3k$ o bien $3k+1$, pero no de la forma $3k+2$

□

Problema 7. *Probar que si n es impar, entonces $8 \mid n^2 - 1$.*

Demostración. Sea $n \in 2\mathbb{Z}+1(impares) \Rightarrow n$ es de la forma:$4k+1$ o $4k+3$.

Caso 1: $n = 4k+1 \Rightarrow n^2-1 = (4k+1)^2-1 = 16k^2+8k = 8(2k^2+k) \Rightarrow 8 \mid n^2-1$.

Caso 2: $n = 4k+3 \Rightarrow n^2-1 = (4k+3)^2-1 = 16k^2+24k+8 = 8(2k^2+3k+1) \Rightarrow 8 \mid n^2-1$.

$$\therefore 8 \mid n^2 - 1$$

□

Problema 8. *Sean m, a, b enteros cualesquiera, probar que $(ma, mb) = m \cdot (a, b)$*

Demostración. Sean $g = (ma, mb)$ y $d = (a, b)$, entonces tenemos tres posibilidades $g < md$, $g = md$ o $g > md$, veamos que la primera y la última no pueden ocurrir.

Caso 1: $g < md$, notemos que $\frac{ma}{md} = \frac{a}{d} \in \mathbb{Z} \Rightarrow md \mid ma$, $\frac{mb}{md} = \frac{b}{d} \in \mathbb{Z} \Rightarrow md \mid mb$, $\therefore$ md es un divisor de ma y mb más grande que g, pero g era el más grande contradicción !

Caso 2: $g > md$, esto implica que $\frac{g}{m}$[1] $> d$, notemos que $\frac{a}{\frac{g}{m}} = \frac{ma}{g} \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow g \mid ma$, $\frac{b}{\frac{g}{m}} = \frac{mb}{g} \in \mathbb{Z} \Rightarrow g \mid mb$, $\therefore$ $\frac{g}{m}$ es un divisor de a y b más grande que d, pero d era el más grande contradicción !

$\therefore (ma, mb) = m \cdot (a, b)$ $\square$

Problema 9. *Dados los números $A = 23 \cdot 310 \cdot 5 \cdot 72$ y $B = 25 \cdot 3 \cdot 11$, encuentre (A,B).*

Demostración. $A = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 23 \cdot 31$ y $B = 3 \cdot 5^2 \cdot 11$, $\Rightarrow$ (A,B)$= 2^0 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11^0 \cdot 23^0 \cdot 31^0 = 75$ $\square$

Problema 10. *Dados los números $A = 28 \cdot 53 \cdot 7$ y $B = 25 \cdot 3 \cdot 57$, encuentre [A,B].*

Demostración. $A = 2^2 \cdot 7^2 \cdot 53$ y $B = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 19$, $\Rightarrow$ [A,B]$= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 53$ $\square$

Problema 11. *Dados dos números primos distintos p y q, encuentre el número de diferentes divisores positivos de:*

a) pq *b)* p^2q *c)*p^2q^2 *d)* p^nq^m

Demostración. Dado el número a, cuya factorización canonica es $a = {P_1}^{\alpha_1} \cdot {P_2}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot {P_n}^{\alpha_n}$, $\Rightarrow$ la cantidad de divisores positivos de a es igual a

$$\prod_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1)$$

$\Rightarrow$ la cantidad de divisores de pq es 4, la de p^2q es 6, la de p^2q^2 es 9 y la de p^nq^m es $(n+1)(m+1)$ $\square$

Problema 12. *Pruebe que el producto de cualesquiera cinco números naturales consecutivos es:*

a) divisible por 30

b) divisible por 120

[1]Nota: $\frac{g}{m} \in \mathbb{Z}$, ya que $m \mid ma$ y $m \mid mb$, $\Rightarrow m \mid (ma, mb)$, esto hay que notarlo, ya que en principio no sabemos si el cociente es un entero.

Demostración. Solucionaremos el inciso b), ya que este implica a). Ya sabemos que el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 3, y podemos usar un argumento similar para 5. Entonces basta probar que 8 divide al producto de 5 enteros consecutivos.

El producto de 5 enteros consecutivos lo podemos escribir de la siguiente forma $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$, ahora n puede ser de la forma:$4k, 4k+1, 4k+2$ o $4k+3$.

Caso 1: $n = 4k \Rightarrow (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) = (4k-2)(4k-1)4k(4k+1)(4k+2) = 8(2k-1)(4k-1)k(4k+1)(4k+2)$.

Caso 2: $n = 4k+1 \Rightarrow (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) = (4k-1)4k(4k+1)(4k+2)(4k+3) = 8(4k-1)k(4k+1)2(2k+1)(4k+3)$.

Caso 3: $n = 4k+2 \Rightarrow (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) = 4k(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4) = 8k(4k+1)(2k+1)(4k+3)(4k+4)$.

Caso 4: $n = 4k+3 \Rightarrow (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) = (4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)(4k+5) = 8(4k+1)(2k+1)(4k+3)(k+1)(4k+5)$.

Por lo tanto $120 \mid (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \Rightarrow 30 \mid (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$, asi tenemos a) y b) □

Problema 13. *Encuentre el menor número natural n tal que $n!$ es divisible por 990.*

Demostración. $990 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, por lo tanto 11 debe estar como factor, lo que implica que 11, es el menor entero positivo tal que $990 \mid n!$ □

Problema 14. *¿Cuántos ceros hay al final de la representación decimal del número $100!$?*

Demostración. Esta pregunta es equivalente a saber cuántos cincos hay en 100!, ya que por cada 5 habra un cero. Ahora hay $\frac{100}{5}$ multiplos de 5 entre el 1 y el 100, hay $\frac{100}{25}$ multiplos de 25 entre el 1 y el 100 $\Rightarrow$ que hay 24 ceros en 100! □

Problema 15. *Pruebe que si un número tiene un número impar de divisores, entonces éste es un cuadrado perfecto.*

Demostración. Dado el número a, cuya factorización canonica es $a = {P_1}^{\alpha_1} \cdot {P_2}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot {P_n}^{\alpha_n}$, $\Rightarrow$ la cantidad de divisores positivos de a es igual a

$$\prod_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1)$$

si este número es impar quiere decir que $a = {P_1}^{2\beta_1} \cdot {P_2}^{2\beta_2} \cdot \ldots \cdot {P_n}^{2\beta_n} = ({P_1}^{\beta_1} \cdot {P_2}^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot {P_n}^{\beta_n})^2 \therefore a$ es un cuadrado perfecto. $\square$

Problema 16. *¿Puede un número escrito con cien $0's$, cien $1's$, y cien $2's$ ser un cuadrado perfecto?*

Demostración. Sea n tal número $\Rightarrow 3 \mid n$, ya que la suma de sus dígitos es multiplo de 3, pero $9 \nmid n$, ya que la suma de sus dígitos no es multiplo de $9 \therefore$ no es un cuadrado perfecto. $\square$

Problema 17. *Encuentre todas las soluciones en números naturales de las ecuaciones:*

$$a)x^2 - y^2 = 31$$
$$b)x^2 - y^2 = 303$$

Demostración. a) $x^2 - y^2 = 31 \Rightarrow (x+y)(x-y) = 1 \cdot 31$ o $(x+y)(x-y) = (-1) \cdot (-31)$ entonces hay que resolver el sistema $x + y = 31$, $x - y = 1$ $\Rightarrow 2x = 32 \Rightarrow x = 16$ y $y = 15$ y el sistema $x + y = -31$, $x - y = -1$ $\Rightarrow 2x = -32 \Rightarrow x = -16$ y $y = -15$, cualquier otro sistema es equivalente a los propuestos $\therefore$ la única solución es $(x, y) = (16, 15)$.

b) El algoritmo para resolver este, es muy similar al de a)asi que con esto ya pueden resover el segundo ejercicio. $\square$

Problema 18. *Hallar un cuadrado de la forma aabb.*

Demostración. 7744 $\square$

Problema 19. *Si a y b son números positivos distintos que cumplen $a^2+b^2 = 4ab$, hallar el valor de*

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$$

Demostración. $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} = \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2} = \frac{4ab+2ab}{4ab-2ab} = \frac{6ab}{2ab} = 3$ $\square$

Cortaduras de Dedekind

El problema de la construcción de los números reales corresponde directamente con todos los puntos de la recta real(ℓ) que hemos visualizado desde el comienzo del curso. Veremos que observar con un poco más de detenimiento la recta real nos ayudara a dar una definición de los números reales $\mathbb{R}$.

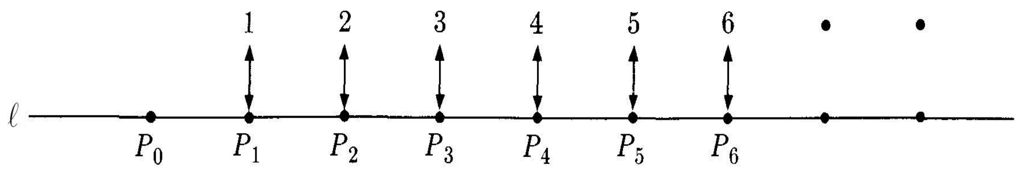

Figura 1: Aquí podemos ver la manera de relacionar un punto de ℓ con un número de $\mathbb{R}$.

Sea $T \in \ell$ definiremos

$$X_T = \{r | P_r \text{ esta a la derecha de } T\}$$

dicho de otra manera, X_T, es el conjunto de los números racionales r que que corresponden a los puntos $P_r \in \ell$ que están a la derecha de T.

Figura 2: Aquí podemos ver que el punto $P_S \notin X_T$.

Propiedades de las cortaduras

Sea $T \in \ell$. Entonces:

a) $\emptyset \subset X_T \subset \mathbb{Q}$.

b) si r y s son números racionales tales que $r < s$ y $r \in X_T$, entonces $s \in X_T$.

c) X_T no tiene elemento mínimo.

d) si $T = P_r$, entonces $X_T = \{s \in \mathbb{Q} | r < s\}$.

e) si S está ℓ a la izquierda de T, entonces $X_S \supsetneq X_T$;

f) La correspondencia $T \leftrightarrow X_T$ es uno a uno.

Con estas propiedades podemos decir que:

Definición 4. *Una cortadura de Dedekind(cortadura de Dedekind superior) es un conjunto X de números racionales que satisface las siguientes propiedades:*

a) $\emptyset \subsetneq X \subsetneq \mathbb{Q}$.

b) si $r < s$ y $r \in X$, entonces $s \in X$.

c) X no tiene elemento mínimo.

Pueden verificar que a cada elemento de ℓ le corresponde una cortadura y viceversa. Por lo tanto, es razonable definir $\mathbb{R}$ como el conjunto de todas las cortaduras de Dedekind.

Definición 5. *El conjunto $\mathbb{R}$ es el conjunto de todas las cortaduras de Dedekind.*

Teorema 20. *Si X y Y son dos cortaduras de Dedekind entonces pasa una y solo una de las siguientes relaciones: $X \subset Y$ o $X = Y$ o $Y \subset X$.*

Demostración. como ejercicio prueben esto ;) $\square$

Definición 6. *Si tomamos un número racional arbitrario $r \in \mathbb{Q}$, entonces la cortadura $X(r) = \{t \in \mathbb{Q} : r < t\}$, a este conjunto se le denominará **cortadura racional** (asociada a r).*

Es evidente que a todo número racional le corresponde una cortadura racional y solamente una. Podemos establecer así una aplicación inyectiva $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ que al número racional r le asocie la cortadura racional $X(r)$.

Una cortadura X es cortadura racional si y solo si existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r = \inf(X)$.

Sean r y s numeros racionales, entonces se cumple que:

a) $X(r) < X(s)$ si y solamente si $r < s$.

b) $X(r+s)=\{t + u | t \in X(r), u \in X(s)\}$.

c) si $r \geq 0$ y $s \geq 0$, entonces $X(r \cdot s) = \{t \cdot u | t \in X(r), u \in X(s)\}$.

Definición 7 (Suma en $\mathbb{R}$)**.** *Sean $X, Y \in \mathbb{R}$. Definimos*

$$X + Y = \{r + s | r \in X, s \in Y\}$$

entonces $X + Y$ es llamada la suma de X y Y.

Definición 8 (Negación en $\mathbb{R}$)**.** *Sea $X \in \mathbb{R}$. Definimos*

$$-X = \{r \in \mathbb{Q} | r > t \textit{ para algún } t \in \mathbb{Q}, \textit{ tal que } t > -s \textit{ para todo } s \in X\}.$$

Definición 9 (El cero)**.** *Diremos que X es positivo si $X(0) < X$ y que es negativo si $X(0) > X$.*

Como ejercicio deben probar la correspondiente propiedad de tricotomía.

Definición 10 (Multiplicación en $\mathbb{R}$)**.** *Sean $X \in \mathbb{R}$ y $Y \in \mathbb{R}$. Definimos*

a) $X \cdot Y = \{r \cdot s | r \in X, s \in Y\}$ *si X y Y son no negativos.*

b) $X \cdot Y = -[(-X) \cdot Y]$ *si X negativo y Y positivo.*

c) $X \cdot Y = -[X \cdot (-Y)]$ *si X positivo y Y negativo.*

d) $X \cdot Y = [(-X) \cdot (-Y)]$ *si X negativo y Y negativo.*

Ahora los siguientes ejemplos

Números Complejos

Los números complejos($\mathbb{C}$) son un campo que contiene a los números reales($\mathbb{R}$), se consideran como puntos del plano: el plano complejo. La propiedad más importante que caracteriza a los números complejos es el teorema fundamental del álgebra, que afirma que cualquier ecuación algebraica de grado n tiene exactamente n soluciones complejas.

Los números complejos son una extensión de los números reales, cumpliéndose que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Los números complejos representan todas las raíces de los polinomios, a diferencia de los reales.

Definición 11. *Definiremos cada complejo z como un par ordenado de números reales (a, b) ó $(Re(z), Im(z))$, en el que se definen las siguientes operaciones:*

Suma

$(a,b)+(c,d)=(a+c,\, b+d)$

Producto por escalar

$r(a,b)=(ra,\, rb)$

Multiplicación

$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd, ad+bc)$

Igualdad

$(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c \text{ y } b=d$

A partir de estas operaciones podemos deducir otras como las siguientes:

Resta

$(a,b)-(c,d)=(a-c,\, b-d)$

División

$\frac{(a,b)}{(c,d)}=\frac{(ac+bd, bc-ad)}{c^2+d^2}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$

Al primer componente (que llamaremos a) se le llama parte real y al segundo (que llamaremos b), parte imaginaria. Se denomina número imaginario puro a aquel que esta compuesto sólo por la parte imaginaria, es decir, aquel en el que a = 0 .

Unidad imaginaria

Tomando en cuenta que $(a,0)\cdot(0,1)=(0,a)$, se define un número especial en matemáticas de gran importancia, el número i o unidad imaginaria, definido como

$\mathrm{i}=(0,1)$

De donde se deduce inmediatamente que,

$\mathrm{i}^2=\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$

Valor absoluto o módulo de un número complejo

El valor absoluto, módulo o magnitud de un número complejo z viene dado por la siguiente expresión:

$|z|=\sqrt{zz^*}=\sqrt{\mathrm{Re}^2(z)+\mathrm{Im}^2(z)}$

Si pensamos en las coordenadas cartesianas del número complejo z como algún punto en el plano; podemos ver, por el teorema de Pitágoras, que el valor absoluto de un número complejo coincide con la distancia euclídea desde el origen del plano a dicho punto.

Si el complejo está escrito en forma exponencial z = r ei?, entonces —z— = r. Se puede expresar en forma trigonométrica como z = r (cos? + isen?), donde cos? + isen? = ei? es la conocida fórmula de Euler.

Podemos comprobar con facilidad estas cuatro importantes propiedades del valor absoluto

$|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$
$|z + w| \leq |z| + |w|$
$|zw| = |z||w|$
$|z - w| \geq |z| - |w|$
para cualquier complejo z y w.

Por definición, la función distancia queda como sigue $d(z, w) = |z - w|$ y nos provee de un espacio métrico con los complejos gracias al que se puede hablar de límites y continuidad. La suma, la resta, la multiplicación y la división de complejos son operaciones continuas. Si no se dice lo contrario, se asume que ésta es la métrica usada en los números complejos. [editar] Argumento

El argumento o fase de un número complejo z viene dado por la siguiente expresión:

$\phi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$

donde $arctan()$ es la función arcotangente.