Material de Apoyo
Soluciones

Problemas de practica

Problema 1. *Probar que si x y y son enteros impares, entonces $x^2 + y^2$ es par, pero no es divisible entre 4.*

Demostración. x y y impares $\Rightarrow x = 2r + 1$ para algún $r \in \mathbb{Z}$ y $y = 2s + 1$ para algún $s \in \mathbb{Z}$, $\Rightarrow x^2 + y^2 = (2r + 1)^2 + (2s + 1)^2 = 4(r^2 + s^2 + r + s) + 2$
$\therefore 2 \mid x^2 + y^2,$ pero $4 \nmid x^2 + y^2$ □

Problema 2. *Probar que el cuadrado de cualquier entero es de la forma $3k$ o bien $3k + 1$, pero no de la forma $3k + 2$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n$ es de la forma: $3r, 3r + 1$ o bien $3r + 2$.

$$\text{Caso 1: } n = 3r \Rightarrow n^2 = 9r^2 = 3(3r^2) = 3k.$$

$$\text{Caso 2: } n = 3r + 1 \Rightarrow n^2 = 9r^2 + 6r + 1 = 3(3r^2 + 2r) + 1 = 3k + 1.$$

$$\text{Caso 3: } n = 3r + 2 \Rightarrow n^2 = 9r^2 + 12r + 4 = 3(3r^2 + 4r) + 1 = 3k + 1.$$

$\therefore$ el cuadrado de cualquier entero es de la forma $3k$ o bien $3k{+}1$, pero no de la forma $3k{+}2$

□

Problema 3. *Probar que si n es impar, entonces $8 \mid n^2 - 1$.*

Demostración. Sea $n \in 2\mathbb{Z}+1(impares) \Rightarrow n$ es de la forma:$4k+1$ o $4k+3$.

Caso 1: $n = 4k{+}1 \Rightarrow n^2{-}1 = (4k{+}1)^2{-}1 = 16k^2{+}8k = 8(2k^2{+}k) \Rightarrow 8 \mid n^2{-}1.$

Caso 2: $n = 4k{+}3 \Rightarrow n^2{-}1 = (4k{+}3)^2{-}1 = 16k^2{+}24k{+}8 = 8(2k^2{+}3k{+}1) \Rightarrow 8 \mid n^2{-}1.$

$$\therefore 8 \mid n^2 - 1$$

□

Problema 4. *Sean m, a, b enteros cualesquiera, probar que $(ma, mb) = m \cdot (a, b)$*

Demostración. Sean $g = (ma, mb)$ y $d = (a, b)$, entonces tenemos tres posibilidades $g < md$, $g = md$ o $g > md$, veamos que la primera y la última no pueden ocurrir.

Caso 1: $g < md$, notemos que $\frac{ma}{md} = \frac{a}{d} \in \mathbb{Z} \Rightarrow md \mid ma$, $\frac{mb}{md} = \frac{b}{d} \in \mathbb{Z} \Rightarrow md \mid mb$, $\therefore$ md es un divisor de ma y mb más grande que g, pero g era el más grande contradicción !

Caso 2: $g > md$, esto implica que $\frac{g}{m}$[1] $> d$, notemos que $\frac{a}{\frac{g}{m}} = \frac{ma}{g} \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow g \mid ma$, $\frac{b}{\frac{g}{m}} = \frac{mb}{g} \in \mathbb{Z} \Rightarrow g \mid mb$, $\therefore$ $\frac{g}{m}$ es un divisor de a y b más grande que d, pero d era el más grande contradicción !

$\therefore (ma, mb) = m \cdot (a, b)$ □

Problema 5. *Dados los números* $A = 23 \cdot 310 \cdot 5 \cdot 72$ *y* $B = 25 \cdot 3 \cdot 11$*, encuentre (A,B).*

Demostración. $A = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 23 \cdot 31$ y $B = 3 \cdot 5^2 \cdot 11$, $\Rightarrow$ (A,B)$= 2^0 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11^0 \cdot 23^0 \cdot 31^0 = 75$ □

Problema 6. *Dados los números* $A = 28 \cdot 53 \cdot 7$ *y* $B = 25 \cdot 3 \cdot 57$*, encuentre [A,B].*

Demostración. $A = 2^2 \cdot 7^2 \cdot 53$ y $B = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 19$, $\Rightarrow$ [A,B]$= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19 \cdot 53$ □

Problema 7. *Dados dos números primos distintos p y q, encuentre el número de diferentes divisores positivos de:*

a) pq *b)* p^2q *c)*p^2q^2 *d)* p^nq^m

Demostración. Dado el número a, cuya factorización canonica es $a = {P_1}^{\alpha_1} \cdot {P_2}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot {P_n}^{\alpha_n}$, $\Rightarrow$ la cantidad de divisores positivos de a es igual a

$$\prod_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1)$$

$\Rightarrow$ la cantidad de divisores de pq es 4, la de p^2q es 6, la de p^2q^2 es 9 y la de p^nq^m es $(n + 1)(m + 1)$ □

Problema 8. *Pruebe que el producto de cualesquiera cinco números naturales consecutivos es:*

a) divisible por 30

b) divisible por 120

[1]Nota: $\frac{g}{m} \in \mathbb{Z}$, ya que $m \mid ma$ y $m \mid mb$, $\Rightarrow m \mid (ma, mb)$, esto hay que notarlo, ya que en principio no sabemos si el cociente es un entero.

Demostración. Solucionaremos el inciso b), ya que este implica a). Ya sabemos que el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 3, y podemos usar un argumento similar para 5. Entonces basta probar que 8 divide al producto de 5 enteros consecutivos.

El producto de 5 enteros consecutivos lo podemos escribir de la siguiente forma $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$, ahora n puede ser de la forma:$4k, 4k+1, 4k+2$ o $4k+3$.

Caso 1: $n = 4k \Rightarrow (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) = (4k-2)(4k-1)4k(4k+1)(4k+2) = 8(2k-1)(4k-1)k(4k+1)(4k+2)$.

Caso 2: $n = 4k+1 \Rightarrow (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) = (4k-1)4k(4k+1)(4k+2)(4k+3) = 8(4k-1)k(4k+1)2(2k+1)(4k+3)$.

Caso 3: $n = 4k+2 \Rightarrow (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) = 4k(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4) = 8k(4k+1)(2k+1)(4k+3)(4k+4)$.

Caso 4: $n = 4k+3 \Rightarrow (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) = (4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)(4k+5) = 8(4k+1)(2k+1)(4k+3)(k+1)(4k+5)$.

Por lo tanto $120 \mid (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \Rightarrow 30 \mid (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$, asi tenemos a) y b) $\square$

Problema 9. *Encuentre el menor número natural n tal que $n!$ es divisible por 990.*

Demostración. $990 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, por lo tanto 11 debe estar como factor, lo que implica que 11, es el menor entero positivo tal que $990 \mid n!$ $\square$

Problema 10. *¿Cuántos ceros hay al final de la representación decimal del número $100!$?*

Demostración. Esta pregunta es equivalente a saber cuántos cincos hay en 100!, ya que por cada 5 habra un cero. Ahora hay $\frac{100}{5}$ multiplos de 5 entre el 1 y el 100, hay $\frac{100}{25}$ multiplos de 25 entre el 1 y el 100 $\Rightarrow$ que hay 24 ceros en 100! $\square$

Problema 11. *Pruebe que si un número tiene un número impar de divisores, entonces éste es un cuadrado perfecto.*

Demostración. Dado el número a, cuya factorización canonica es $a = {P_1}^{\alpha_1} \cdot {P_2}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot {P_n}^{\alpha_n}$, $\Rightarrow$ la cantidad de divisores positivos de a es igual a

$$\prod_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1)$$

si este número es impar quiere decir que $a = {P_1}^{2\beta_1} \cdot {P_2}^{2\beta_2} \cdot \ldots \cdot {P_n}^{2\beta_n} = ({P_1}^{\beta_1} \cdot {P_2}^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot {P_n}^{\beta_n})^2 \therefore a$ es un cuadrado perfecto. □

Problema 12. *¿Puede un número escrito con cien $0's$, cien $1's$, y cien $2's$ ser un cuadrado perfecto?*

Demostración. Sea n tal número $\Rightarrow 3 \mid n$, ya que la suma de sus dígitos es multiplo de 3, pero $9 \nmid n$, ya que la suma de sus dígitos no es multiplo de 9$\therefore$ no es un cuadrado perfecto. □

Problema 13. *Encuentre todas las soluciones en números naturales de las ecuaciones:*

$$a)x^2 - y^2 = 31$$

$$b)x^2 - y^2 = 303$$

Demostración. a) $x^2 - y^2 = 31 \Rightarrow (x+y)(x-y) = 1 \cdot 31$ o $(x+y)(x-y) = (-1) \cdot (-31)$ entonces hay que resolver el sistema $x + y = 31$, $x - y = 1$ $\Rightarrow 2x = 32 \Rightarrow x = 16$ y $y = 15$ y el sistema $x + y = -31$, $x - y = -1$ $\Rightarrow 2x = -32 \Rightarrow x = -16$ y $y = -15$, cualquier otro sistema es equivalente a los propuestos $\therefore$ la única solución es $(x, y) = (16, 15)$.

b) El algoritmo para resolver este, es muy similar al de a)asi que con esto ya pueden resover el segundo ejercicio. □

Problema 14. *Hallar un cuadrado de la forma aabb.*

Demostración. 7744 □

Problema 15. *Si a y b son números positivos distintos que cumplen $a^2+b^2 = 4ab$, hallar el valor de*

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$$

Demostración. $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} = \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2} = \frac{4ab+2ab}{4ab-2ab} = \frac{6ab}{2ab} = 3$ □