Examen 2

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias II

31 de Octubre de 2014

Problema 1. *Recuerde la transformación de Picard*

$$P_f(x(t)) = x_0 + \int_0^t f(x(s))$$

1. *¿Cuál es el dominio de la transformación?*
2. *¿Cuál es la relación con soluciones de ecuaciones diferenciales?*
3. *Calcule las primeras tres iteraciones de $x' = x+2$ con condición inicial $x(0) = 2$.*

Problema 2. *Sea $f : E \longrightarrow E$ continua y supongamos $f(x) \leq M$. Para cada $n = 1, 2, \ldots,$ sea $x_n : [0,1] \to E$ una solución de $x' = f(x)$. Si $x_n(0)$ converge, probar que una subsucesión de $\{x_n\}$ converge uniformemente a una solución.*

Problema 3. *Probar que el sistema en $\mathbb{R}^2$ cuyas ecuaciones en coordenadas polares son:*

$$\theta' = 1, \qquad r' = \begin{cases} r \sin\left(\frac{1}{r}\right), & r > 0, \\ 0, & r = 0, \end{cases}$$

tiene un punto de equilibrio estable en el origen.

Problema 4. *Sea V una función de Liapunov estricta para un punto de equilibrio $\overline{x}$ de un sistema dinámico. Sea $c > 0$ tal que $V^{-1}[0,c]$ es compacto y no contiene otros puntos de equilibrio. Probar entonces que $V^{-1}[0,c] \subset B(\overline{x})$.*