Material 1

José Luis Alonzo Velázquez

15 de septiembre de 2014

Problema 1. [1] *Aplicando el teorema de existencia y unicidad señalar en los problemas que siguen los recintos en los que las ecuaciones admiten solución única:*

1. $y' = x^2 + y^2$.
2. $y' = \frac{x}{y}$
3. $y' = y + 3\sqrt{y}$.
4. $y' = \sqrt{x - y}$.
5. $y' = \sqrt{x^2 - y} - x$.
6. $y' = \sqrt{1 - y^2}$.
7. $y' = \frac{y+1}{x-y}$.
8. $y' = \sin y - \cos x$.
9. $y' = 1 - \cot y$.
10. $y' = \sqrt[3]{3x - y} - 1$.

Problema 2. *Clasificar las siguientes ecuaciones diferenciales por TIPO, ORDEN y LINEALIDAD:*

1. $$y'' + x^2 + y^2 + 5 = 0.$$

[1] Cualquier error que noten, o cosa extraña que encuentren en este material, les agradeceré hacerla notar.

2.
$$y'y + e^x = y + 3\sqrt{y}.$$

3.
$$y' - \sqrt{x-y} + 3x = 5.$$

4.
$$y' = \sqrt{x^2 - y} - x.$$

5.
$$(1-x)y'' - 4xy' + 5y = \cos(x)$$

6.
$$x^2 dy + (y - xy - xe^x)dx = 0.$$

7.
$$(\sin(x))y''' - (\cos(x))y' = 2$$

8.
$$x^3 y^{(4)} - x^2 y'' + 4xy' - 3y = 0$$

9.
$$y^2 dy + (y - xy - xe^y)dx = 0.$$

10.
$$(\sin(y))x - (\cos(y))y' = 2$$

Problema 3. *Formar las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas si se dan sus sistemas fundamentales de soluciones:*

1. $\{e^{-x}, e^x\}$
2. $\{1, e^x\}$
3. $\{e^{-2x}, xe^{-2x}\}$
4. $\{\sin 3x, \cos 3x\}$
5. $\{1, x\}$

Problema 4. *Resuelva las ecuaciones diferenciales :*

1.
$$x^2dy + 2xydx = 0$$

2.
$$(2x - y)dx + (3y + 7x)dy = 0$$

3.
$$(2x + y)dx - (x + 6y)dy = 0$$

4.
$$(5x + 4y)dx + (4x - 8y)dy = 0$$

Problema 5. *Resuelva las ecuaciones diferenciales por variables separables o reduzca a ellas y resuelva(estos métodos no los vieron en clase, en la ayudantía mencione como se pueden resolver algunos de ellos):*

1. $(x + y)^3y' = a^2, a$ *constante.*
2. $y' = \sin(x - y)$
3. $(x^2y^2 + 1)dx + 2x^2dy = 0,($ *probar la sustitución* $xy = t)$.
4. $(1 + x^2y^2)y + (xy - 1)^2xy' = 0,($ *probar la sustitución* $xy = t)$.
5. $(x^2y^3 + y + x - 2)dx + (x^3y^2 + x)dy = 0,($ *probar la sustitución* $xy = t)$.

Problema 6. *Resuelva la ecuación respectiva comprobando que la función indicada,* μ*, sea un factor integrante:*

1. $6xydx + (4y + 9x^2)dy = 0, \mu(x, y) = y^2$
2. $-y^2dx + (x^2 + xy)dy = 0, \mu(x, y) = \frac{1}{x^2y}$
3. $(-xy\sin x + 2y\cos x)dx + 2x\cos xdy = 0, \mu(x, y) = xy$
4. $y(x + y + 1)dx + (x + 2y)dy = 0, \mu(x, y) = e^x$
5. $(2y^2 + 3x)dx + 2xydy = 0, \mu(x, y) = x$
6. $(2\frac{y^2}{x} + 3)dx + 2ydy = 0, \mu(x, y) = x^2$
7. $(2\frac{y^2}{x^2} + \frac{3}{x})dx + 2\frac{y}{x}dy = 0, \mu(x, y) = x^3$

8. $(3x+6y)dx+(6xy+\frac{4y^3}{x})dy=0, \mu(x,y)=x$

9. $(3+6\frac{y}{x})dx+(6y+\frac{4y^3}{x^2})dy=0, \mu(x,y)=x^2$

10. $(\frac{3}{x}+6\frac{y}{x^2})dx+(6\frac{y}{x}+\frac{4y^3}{x^3})dy=0, \mu(x,y)=x^3$

Problema 7. *Encuentre el factor integrante $\mu(x,y)$ de las siguientes ecuaciones diferenciales:*

1. $6xdx+(4+\frac{9x^2}{y})dy=0$
2. $6xy^2dx+(4y^2+9x^2y)dy=0$
3. $6y^3dx+(\frac{4y^3}{x}+9xy^2)dy=0$
4. $xy(x+y+1)dx+x(x+2y)dy=0$
5. $(2y^2+3x)dx+2xydy=0$
6. $(2x-1)dx+(3y+7)dy=0$
7. $(2x+y)dx-(x+6y)dy=0$
8. $(1-2x^2-2y)\frac{dy}{dx}=4x^3+4xy$
9. $(\sin(y))x-(\cos(y))y'=2$
10. $(3+6\frac{y}{x})dx+(6y+\frac{4y^3}{x^2})dy=0$

Problema 8. *Resuelva las ecuaciones diferenciales:*

1. $2xydx+(x^2-1)dy=0$
2. $(e^{2y}-\cos xy)dx+(2xe^{2y}-x\cos xy+2y)dy=0$
3. $(\cos x\sin x-xy^2)dx+y(l-x^2)dy=0$
4. $2xydx+(x''+2y)dy=0.$
5. $x^2dy+2xydx=0.$
6. $(2x-1)dx+(3y+7)dy=0.$

7. $(2x+y)dx-(x+6y)dy=0$.
8. $(5x+4y)dx+(4x-8y^3)dy=0$.
9. $(2y^2x-3)dr+(2yx^2+4)dy=0$.
10. $(x+y)(x-y)dx+x(x-2y)dy=0$.
11. $(5y-2x)y'-2y=0$.
12. $(1-2x^2-2y)\frac{dy}{dx}=4x^3+4xy$.
13. $(\sin(y))x-(\cos(y))y'=2$
14. $(3x^2+6xy)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$
15. $(3x+6y)dx+(6xy+\frac{4y^3}{x})dy=0$
16. $(3+6\frac{y}{x})dx+(6y+\frac{4y^3}{x^2})dy=0$
17. $6xdx+(4+\frac{9x^2}{y})dy=0$
18. $6xy^2dx+(4y^2+9x^2y)dy=0$
19. $(3x^2-2x-y)dx+(2y-x+3y^2)dy=0$
20. $(3x^3-2x^2-yx)dx+(2yx-x^2+3y^2x)dy=0$

Problema 9. *Hallar la curva que tiene la propiedad de que el segmento de la tangente a la curva comprendido entre los ejes de coordenadas se divide por la mitad en el punto de contacto.*

Problema 10. *Un punto material de masa igual a 1g se mueve en línea recta debido a la acción de una fuerza que es directamente proporcional al tiempo, calculado desde el instante $t=0$, e inversamente proporcional a la velocidad del punto. En el instante $t=10s$ la velocidad era igual a $50cm/s$, y la fuerza igual a 4 dinas. ¿Que velocidad tendrá el punto después de un minuto de movimiento?*

Problema 11. *Demostrar que la curva que posee la propiedad de que todas sus normales pasan por un punto constante, es una circunferencia.*

Problema 12. *Una bala se introduce en una tabla de* $h = 10cm$ *de espesor con una* $V_0 = 200m/s$ *traspasándola con* $V_i = 80m/s$. *suponiendo que la resistencia de la tabla al movimiento de la bala es proporcional al cuadrado de la velocidad, hallar el tiempo del movimiento de la bala por la tabla.*

Problema 13. *Un barco retrasa su movimiento por la acción de la resistencia del agua, que es proporcional a la velocidad del barco. La velocidad del barco es* $10m/s$, *después de* $5s$ *su velocidad será* $8m/s$. *después de cuánto tiempo su velocidad será* $1m/s$*?*

Problema 14. *Demostrar que la curva para la cual la pendiente de la tangente en cualquier punto es proporcional a la abscisa del punto de contacto, es una parábola.*

Problema 15. *Según la ley de Newton, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia entre la temperatura* T *del cuerpo y la temperatura* T_0 *del aire. Si la temperatura del aire es* 20^oC *y el cuerpo se enfría en 20 minutos desde* 100^o *hasta* 60^o. *Dentro de cuánto tiempo su temperatura descenderá hasta* 30^o*?*

Problema 16. *Hallar la curva para la cual la pendiente de la tangente en cualquier punto es n veces mayor que la pendiente de la recta que une este punto con el origen de coordenadas.*

Problema 17. *El fondo de un depósito de 200 lts de capacidad, está cubierto de sal. Suponiendo que la velocidad con que se disuelve la sal es proporcional a la diferencia de la concentración en el instante dado y la concentración de la disolución saturada (1 kg de sal para 3 litros de agua) y que la cantidad de agua pura disuelve 1/3 de kg de sal por minuto, hallar la cantidad de sal que contendrá la disolución al cabo de una hora.*

Problema 18. *Cierta cantidad de una sustancia indisoluble contiene en sus poros 10kg de sal. Actuando con 90 litros de agua se observo que durante una hora se disolvió la mitad de la sal contenida. Cuanta sal se disolvería durante el mismo tiempo si se duplicase la cantidad de agua? La velocidad de disolución es proporcional a la cantidad de sal no disuelta y a la diferencia entre la concentración en el instante dado y la concentración de la solución saturada (1kg para 3 litros).*

Problema 19. *Hallar la curva que tiene la propiedad de que el segmento de la tangente a la curva comprendido entre los ejes de coordenadas se divide por la mitad en el punto de contacto.*

1. Teoría

1.1. Ecuaciones Diferenciales Exactas

En algunas partes no seré tan riguroso(no pediré todos los pasos), por que en principio ya es material que saben desde el semestre pasado, si requiere referencias para revisar más a fondo el material avísenme, y les pasaré un par de referencias clásicas.

Definición 1 (Ecuación diferencial exacta)**.** *Una ecuación diferencial exacta es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden que se puede presentar de la siguiente forma:*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

donde las derivadas parciales de las funciones M y N cumplen que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

son iguales.

Esto es equivalente a decir que existe una función $\varphi(x,y)$ tal que:

$$d\varphi(x,y) = \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}dy$$

donde

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad y \qquad \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} = N(x,y).$$

Como les había mencionado antes, siempre buscamos de alguna manera reducir, la ecuación a un caso que si sabemos resolver.[2]

Definición 2 (Factor integrante)**.** *Si una ecuación diferencial no es exacta, hacemos lo mismo que en el caso lineal, se multiplica por una función $\mu(x,y)$ tal que la ecuación:*

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \tag{2}$$

[2] En clase comente que la relación venia de Fubini, pero realmente es sobre igualdad de las derivadas cruzadas, esto tiene otro nombre, y esta relacionado con el teorema de Schwarz.

sea exacta.

Como mencione hay condiciones que podemos suponer sobre el factor integrante para poder encontrarlo, pero sólo para algunas formas de ecuaciones diferenciales es posible encontrarlo(fácilmente):

1. *Suponer que solo depende de la variable x.*
2. *Suponer que solo depende de la variable y.*
3. *Suponer que depende de la suma $x + y$(intente deducir como sería este factor integrante, en función de M y N).*

En general uno puede empezar a jugar con cambios de variable $z = f(x, y)$, pero no estoy seguro, en que casos si podrían encontrar un factor integrante.

Como vimos en la ayudantía, para el caso 1, el factor integrante quedaría como

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}$$

si notan que la integral no les quedo solo en términos de x, entonces ya saben que tienen algo mal, o simplemente que el factor integrante no dependía solo de x. Lo mismo para el resto de las suposiciones que puedan hacer.

Recordar que muchas de estas ecuaciones nacen en la física, así que es natural ver relaciones y condiciones, "sensatas", una de ellas es que los dominios de las ecuaciones(soluciones), sean razonablemente buenos. Como en el caso de exactas, una condición que se llega a pedir es que el dominio sea homeomorfo a un circulo.

1.2. Exponenciación de Matrices y Forma Canónica de Jordan

Teorema 1. *Sea $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ con n valores propios reales y distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunto de vectores propios asociados a cada eigenvalor, entonces $P = [v_1, \ldots, v_n]$ cumple que*

$$P^{-1}AP = diag[\lambda_1, \ldots, \lambda_n].$$

Problema 20. *Resuelva el siguiente sistema:*

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 - 3x_2 \\ x_2' &= 2x_2 \end{aligned}$$

Definición 3. *Sea λ un eigenvalor de la matriz $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ de multiplicidad $m \leq n$. Entonces para $k = 1, \ldots, m$,cualquier vector solución no cero v de*

$$(A - \lambda I)^k v = 0$$

es llamado un eigenvector generalizado.

Definición 4. *Sea $N \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, se dice que es una matriz nilpotente de orden k, si $N^{k-1} \neq 0$ y $N^k = 0$.*

Teorema 2. *Sea $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ con n valores propios reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunto de vectores propios generalizados asociados a cada eigenvalor, entonces $P = [v_1, \ldots, v_n]$ cumple que*

$$P^{-1}AP = diag[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$$

es invertible, sea

$$A = S + N$$

donde

$$P^{-1}SP = diag[\lambda_j],$$

la matriz $N = A - S$ es nilpotente de orden $k \leq n$, y S y N conmutan.

Corolario 1. *Considerando el problema $Ax = x_0$, bajo las condiciones del teorema anterior tenemos:*

$$x(t) = Pdiag[e^{\lambda_j t}]P^{-1}\left[I + Nt + \cdots + \frac{N^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!}\right]$$

Problema 21 (Tener cuidado!!!!). *Resuelva el siguiente sistema:*

$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 + x_2 \\ x_2' &= -x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Problema 22. *Resuelva el siguiente sistema:*

$$\begin{array}{rcl} x_1' &=& -2x_2 - x_3 - x_4 \\ x_2' &=& x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ x_3' &=& x_2 + x_3 \\ x_4' &=& x_4 \end{array}$$