Centro de Investigación en Matemáticas

Modelos Estocásticos Ambit para la Turbulencia

Tesis

que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias con especialidad en Probabilidad y Estadística

Presenta

José Ulises Márquez Urbina

Director de Tesis

Dr. Víctor Manuel Pérez-Abreu Carrión

Guanajuato, Guanajuato a 3 de agosto de 2012.

Integrantes del jurado

Presidente: Dr. Miguel Nakamura Savoy.
Secretario: Dr. Juan Carlos Pardo Millán.
Vocal: Dr. Joaquín Ortega Sánchez.

Asesor:

Dr. Víctor Manuel Pérez-Abreu Carrión.

Sustentante:

José Ulises Márquez Urbina.

Agradecimientos

A mis padres y mi hermana por su apoyo constante y su cariño.

A mi asesor, el Dr. Víctor Manuel Pérez-Abreu Carrión, por su gran entusiasmo, su enorme paciencia, gran dedicación y valiosos comentarios.

A mis sinodales, el Dr. Miguel Nakamura Savoy, el Dr. Joaquín Ortega Sánchez y el Dr. Juan Carlos Pardo Millán, por sus observaciones, preguntas y valiosas sugerencias.

A todos mis profesores, amigos y compañeros que compartieron conmigo a lo largo de mis estudios de maestría.

Al CIMAT por la formación y los conocimientos que adquirí durante mis estudios de maestría y licenciatura.

Al CONACYT por el apoyo económico que me otorgó para poder realizar mis estudios de maestría (CVU 374959).

So, naturalists observe, a flea
Hath smaller fleas that on him prey;
And these have smaller fleas to bite 'em,
And so proceed ad infinitium,
Thus every poet, in his kind,
Is bit by him that comes behind.
- *Jonathon Swift*

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Cuando el agua de un río fluye por su cauce sabemos que existen diferentes formas de flujo. Si la velocidad del agua es pequeña, entonces este flujo es regular; si el agua pasa por alguna piedra que está en el río, simplemente la rodea y el flujo continúa de manera regular. En este caso se dice que el flujo es laminar, pues su movimiento ocurre como si un conjunto de láminas de agua fluyera una sobre otra.

Sin embargo, al aumentar la velocidad del agua llega cierto momento en que el flujo se vuelve altamente irregular. Nos damos cuenta de que al bordear la piedra se producen remolinos. Si la velocidad del agua es mucho más alta todavía, aparecen remolinos dentro de los remolinos. En estas condiciones el flujo del agua es turbulento.

La turbulencia es un término científico para describir ciertos movimientos complejos e imprevisibles en un fluido, fenómeno que ha sido parte de nuestra experiencia diaria por mucho tiempo. Varios ejemplos de turbulencia se evidencian sin la necesidad de instrumentos, como lo son las volutas de humo de un cigarrillo, los elegantes arabescos de la crema vertida en el café, los vigorosos remolinos de un arroyo de montaña y las ráfagas de "clear air turbulence" en un viaje en avión. Hay otros fenómenos turbulentos donde es necesario utilizar instrumentos de tecnología avanzada para poder observarlos. Por ejemplo, la ecografía puede revelar un flujo sanguíneo turbulento en nuestras arterias, imágenes de satélite pueden mostrar perturbaciones meteorológicas turbulentas y simulaciones por ordenador desvelan fluctuaciones turbulentas de la masa en el Universo en escalas de decenas de megaparsecs. Por otro lado, sin turbulencia, la contaminación urbana podría permanecer durante décadas, el calor producido por reacciones nucleares en el interior de las estrellas no sería capaz de escapar en una escala de tiempo aceptable y los fenómenos meteorológicos serían predecibles casi siempre.

La palabra "turbulencia" (del latín: *turbulentia*) originalmente se refiere al movimiento desordenado de una muchedumbre (turba). En la Edad Media fue usada frecuentemente como sinónimo de "problemas" (*trouble*), un término que deriva de ella. Incluso hoy en día, la palabra "turbulento" puede aludir a un comportamiento social o personal. Su uso científico se refiere al movimiento irregular y aparentemente aleatorio de un fluido. Esta concepción, que está lejos de ser exhaustiva, trata de expresar de manera sintética uno de los fenómenos más complejos y fascinantes de las ciencias naturales, desde la antigüedad hasta nuestros días.

El tema tiene una historia extensa. Hace más de dos mil años, Lucrecio describió el movimiento de un remolino en su obra "De rerum natura". Siglos después, en 1507, Leonardo Da Vinci fue probablemente el primero en utilizar la palabra turbulencia (en italiano *turbolenza*) en su sentido moderno y observar la lenta descomposición de los remolinos formados detrás de los pilares de un puente. En 1757, Euler escribió las ecuaciones de un fluido ideal incompresible (o con cero viscosidad) en dos y tres dimensiones y se dio cuenta de la importancia de la vorticidad. Casi setenta años después de Euler, en 1822, Navier generalizó está ecuación para incluir a la viscosidad. Debido a los trabajos posteriores de Stokes en la década de 1840, dichas ecuaciones se conocen como las ecuaciones de Navier-Stokes (NS). Ellas constituyen un conjunto de ecuaciones de evolución no lineales y no locales para el campo de velocidad 3-dimensional $\overrightarrow{u}$ de un flujo. En notación moderna, la primera ecuación de Navier-Stokes, la cual expresa la ley de Newton aplicada a elementos de fluido arbitrarios, se escribe como

$$\partial_t \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} \cdot \nabla \overrightarrow{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \overrightarrow{u},$$

donde p denota a la presión (divida por la densidad del fluido) y ν es la viscosidad cinemática. La segunda ecuación de Navier-Stokes, debida a d'Alembert en 1752, expresa la incompresibilidad

$$\nabla \cdot \overrightarrow{u} = 0.$$

Debido a que la turbulencia es un fenómeno descrito por variaciones en la velocidad y presión de un fluido, este puede ser descrito mediante las ecuaciones NS.

Kelvin fue el primero en proponer el estudio de la turbulencia usando soluciones aleatorias[1] de las ecuaciones de Navier-Stokes. Reynolds mostró en 1883 que, dada una geometría de la corriente, los distintos regímenes que pueden tener lugar (laminar y turbulento) son controlados por el número adimensional (ahora se llama el número de Reynolds)

$$\mathrm{Re} = \frac{LV}{\nu},$$

donde L y V son, respectivamente, una escala típica y una velocidad típica del flujo.

Para abundar en los aspectos históricos tempranos de la turbulencia que no abordamos aquí, recomendamos consultar el libro de Darrigol [26].

Puesto que las ecuaciones básicas para la evolución de un flujo turbulento son conocidas, la pregunta es: ¿cuánto podemos lograr en el estudio de la turbulencia con las ecuaciones de Navier-Stokes? La respuesta corta es que muy poco, pues su carácter no-lineal y no-local complican su estudio. No podemos, por ejemplo, mostrar que las soluciones de las ecuaciones de NS con condiciones iniciales "agradables" y suaves permanecen "agradables", suaves y únicas para todos los tiempos, al menos no en 3D. Incluso Jean Leray especuló en la década 1930 que el carácter aleatorio de la turbulencia se origina a partir de la no unicidad de las soluciones de las ecuaciones de NS. Hoy en día se sabe lo suficiente acerca de cómo el caos puede aparecer en sistemas dinámicos deterministas que no hay necesidad de recurrir a la no unicidad para explicar la turbulencia. Por ésta y otras razones surge la necesidad de establecer modelos fenomenológicos para la turbulencia.

Los enfoques teóricos más fructíferos para el estudio de la turbulencia se han basado en argumentos de escala, es decir, esencialmente en un análisis dimensional. Las ideas de escala tienen una larga historia en la mecánica de fluidos, comenzando desde que Newton derivó la dependencia cuadrática de la fricción respecto a la velocidad relativa entre un cuerpo y el fluido ambiente. Argumentos de escala y análisis dimensional juegan un papel clave en el desarrollo de está tesis.

Probablemente el enfoque más importante basado en ideas de escala es la cascada de Richardson. En 1922, Richardson propusó una visión cualitativa que explica la forma en que

[1] i. e. soluciones con condiciones iniciales aleatorias.

la energía cinética fluye en un sistema turbulento. Según él, en un flujo turbulento, la energía cinética comienza creando remolinos de gran tamaño y estos remolinos se parten en remolinos de menor tamaño repartiéndose la energía cinética. Este proceso continúa hasta que la energía se convierte en calor. El proceso descrito anteriormente se conoce como cascada de Richardson, aunque también suele llamársele cascada de Kolmogorov.

Más tarde, en 1941, Kolmogorov definió un marco conceptual para la turbulencia con números altos de Reynolds que se aplica a la turbulencia homogénea e isótropica; es decir, a la turbulencia estadísticamente invariante bajo traslaciones y rotaciones. Dicho marco se conoce como teoría K41 [35, 36, 30]. En K41 se establecen dos postulados con respecto al límite infinito del número de Reynolds. Por un lado, Kolmogorov supone que la tasa de disipación de energía ϵ tiene un límite finito no-nulo cuando la viscosidad tiende a cero, siempre y cuando se mantengan fijas la escala típica y la velocidad característica en la producción de la turbulencia. Por otra parte, Kolmogorov supone que, en el límite de números de Reynolds muy grandes, se alcanza una escala de invarianza estadística en la cascada de Richardson. La primera suposición, que generalmente se conoce como la existencia de una anomalía disipativa (en un fluido laminar, la disipación tiende a cero con la viscosidad), está apoyada por resultados experimentales y numéricos. La segunda hipótesis es válida sólo de manera aproximada. La teoría K41 y su extensión de 1962 constituyen el marco teórico básico para la turbulencia en este trabajo.

Debido a las dificultades en el estudio de las ecuaciones de NS, surge la necesidad de contar con modelos fenomenológicos que nos ayuden a dilucidar y a predecir aspectos de la turbulencia. El presente trabajo trata sobre un par de esta clase de modelos, los cuales están basados en procesos estocásticos. Los modelos aquí expuestos fueron introducidos por Barndorff-Nielsen y Schmiegel [3] como generalizaciones de los modelos de cascada multiplicativa en línea con la teoría K41. A partir de los modelos de Barndorff-Nielsen y Schmiegel, se dio forma a una nueva teoría matemática: los procesos Ambit. Por está razón nos referimos a los modelos propuestos por Barndorff-Nielsen y Schmiegel como modelos Ambit.

Se ha mostrado, mediante simulaciones númericas y datos experimentales, que los modelos Ambit logran capturar diversos aspectos que están presentes en los flujos turbulentos [6, 7, 10, 11]. Por ejemplo, las distribuciones condicionales de la variable de Kolmogorov tienen un comportamiento que aproxima bastante bien a lo observado en la naturaleza. Además, los modelos Ambit permiten obtener expresiones explícitas para cantidades físicas que son díficiles de predecir con otros modelos. Por éstas y otras razones, los modelos Ambit para la turbulencia resultan prometedores como un enfoque de estudio para la turbulencia.

Por otra parte, la teoría de procesos Ambit tiene sus peculiaridades. Dicha teoría surgió recientemente, por lo que existen varias preguntas abiertas y muchos de sus matices están aún sin estudiar. Sin embargo, algo que sí ha quedado de manifiesto es que los procesos Ambit tienen el potencial de generalizar algunos aspectos bien establecidos de la teoría de procesos estocásticos, sobre todo del cálculo estocástico. Por ejemplo, una teoría Ambit completa podría extender la teoría de integración de semimartingalas. Estos aspectos hacen que por sí solos los procesos Ambit tengan una relevancia teórica importante. En el presente trabajo nos enfocaremos más en los aspectos de modelación que en los detalles técnicos de los procesos Ambit.

El objetivo principal de este trabajo es hacer una revisión crítica de los artículos básicos sobre procesos Ambit aplicados a turbulencia, haciendo énfasis en su interpretación física y presentando las herramientas matemáticas necesarias para entender el trabajo.

La estructura de esta tesis es la siguiente. En el Capítulo 2 presentamos nociones sobre turbulencia, integración respecto a bases de Lévy y procesos Ambit. Esta síntesis contiene toda la información que creemos debe saber alguien interesado en los modelos Ambit para turbulencia. La sección de turbulencia se divide en dos partes. La primera trata los aspectos generales de la turbulencia. Se define la disipación de energía y la disipación temporal de energía; esta última cantidad será de fundamental importancia en la modelación del campo de velocidad. En la segunda parte se revisan algunos elementos de la fenomenología de la turbulencia, en concreto la intermitencia y la variable de Kolmogorov asociada. El material sobre integración respecto a bases de Lévy se divide en cuatro partes. En la primera tratamos a las bases de Lévy; establecemos su definición, su descomposición de Lévy-Khintchine y un teorema de factorización para la medida de Lévy asociada a la descomposición de Lévy-Khintchine. También damos la definición de función cumulante, la defininción de base de Lévy homogénea y una fórmula de la función cumulante de una base de Lévy en términos de la llamada semilla de Lévy. En la segunda parte se exponen dos ejemplos de bases de Lévy: la hoja Browniana y la base NIG, dando algunos elementos de la distribución normal Gaussiana inversa. La tercera subsección de integración resume la teoría de integración de Rajput y Rosinski [43]; damos la definición de función integrable, establecemos la forma de la función cumulante de una integral y proporcionamos una caracterización de las funciones integrables. En la cuarta y última parte de la sección de integración exponemos la teoría de integración de Walsh [54]. Comenzamos estableciendo la definición de medida martingala-valuada y la medida covariación. Posteriormente, construimos la integral de campos simples y, a partir de ésta aproximando como es usual, construimos la integral para integrandos más generales. Finalmente, exploramos la relación entre la integral de Walsh con las bases de Lévy; estudiamos la relación entre la integral de Walsh y la de Rajput y Rosinski; y analizamos la integral sobre una hoja Browniana. La sección de procesos Ambit está ordenada de la siguiente manera. La primera parte introduce la definición de proceso Ambit y mencionamos algunas preguntas abiertas relacionadas. En la segunda sección analizamos brevemente a los procesos Ambit basados en la hoja Browniana. La última parte trata sobre el proceso Browniano semi-estacionario, el cual utilizaremos para establecer un modelo puramente temporal; en particular, presentamos condiciones bajo las cuales los procesos Brownianos semiestacionarios son semimartingalas y damos una expresión para su variación cuadrática.

El tercer capítulo contiene dos secciones en las que se establecen modelos para un campo de velocidad turbulento. En la primera exponemos un modelo espacio-temporal para el campo de velocidad de un fluido turbulento, homogéneo y estacionario; en particular estudiamos la dinámica Lagrangiana y calculamos el número de Reynolds en la microescala de Taylor. La segunda sección trata de una restricción temporal del modelo general. En esta parte, relacionamos la disipación energética temporal con los constituyentes del modelo, analizamos el comportamiento no Gaussiano de los incrementos de velocidad mediante el cumulante estandarizado de cuarto orden y estudiamos el comportamiento de la variable de Kolmogorov para tiempos grandes y tiempos pequeños.

En el Capítulo 4 discutimos un modelo Ambit particular para el proceso de disipación energética ϵ; hacemos especial enfásis en el caso multiescala, el cual en el límite de grandes escalas implica multifractalidad. La primera sección trata aspectos generales del modelo, en particular obtendremos una expresión para los correlacionadores. En la segunda sección proporcionamos un método para calcular la forma del conjunto Ambit con el fin de que el modelo exhiba ciertas propiedades deseables; aplicamos tal método para el caso multiescala. La tercera sección versa sobre la relación entre el modelo multiescala y la multifractalidad. Conviene tener en cuenta que el marco de modelación aquí expuesto es bastante general y puede usarse para otras aplicaciones; esto gracias a que el modelo se ajusta a partir de 2-correlacionadores. En este escrito nos concentraremos en ejemplos multifractales; sin embargo debe mantenerse en mente que el modelo general no está restringido a procesos multiescala o procesos multifractales.

Finalmente, presentamos un pequeño capítulo de conclusiones en donde abordamos algunos problemas abiertos relevantes respecto a la modelación Ambit de la turbulencia. Asimismo, concluimos con una reflexión sobre la posibilidad y la utilidad de utilizar modelos Ambit para modelar fenomenológicamente al movimiento Browniano relativista. Esto surge de forma natural al considerar los modelos para el movimiento Browniano relativista propuestos por los físicos Jörn Dunkel y Peter Hänggi, los cuales pueden ser consultados en [27, 38].

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo presentamos los elementos necesarios para entender el modelo para el campo de velocidad de un fluido turbulento (3.1) y el modelo del proceso de disipación de energía (4.1). Comenzamos mencionando algunos hechos teóricos sobre turbulencia; después exponemos los resultados de mayor relevancia sobre la integración estocástica usada en los modelos; y concluimos con una introducción a los campos Ambit.

2.1. Turbulencia

Iniciamos con los elementos de la teoría de turbulencia necesarios para entender la modelación que se desarrolla en los Capítulos 3 y 4. El resumen aquí presentado resulta de considerar múltiples referencias, pero sin duda la más importante es el libro de Frisch [30]. Además, para complementar esta información también se consultó: [22, 35, 37, 50, 51, 49, 52, 53] para abundar en la teoría general de turbulencia y la de la turbulencia completamente desarrollada, [19, 21, 24, 25, 31] para aspectos de la intermitencia y multifractalidad, [23, 25, 32, 33] para consultar sobre modelos de cascada discreta, [28, 35, 44] para extender sobre el proceso de disipación de energía y [4] para información sobre la distribución de los incrementos de velocidad. Esta de más decir que también se utilizó información de los articulos de procesos Ambit aplicados a la turbulencia de Barndorff-Nielsen y Schmiegel [3, 6, 7, 10, 11, 13, 45, 48].

2.1.1. Aspectos generales

No existe una definición de flujo turbulento, sin embargo hay una serie de propiedades que se acepta están presentes en todo flujo de este tipo; entre éstas se encuentran una alta difusividad, una naturaleza disipativa, etcétera. En general, los flujos turbulentos están caracterizados por una baja difusión del momento, una alta convección y por variaciones rápidas de presión y velocidad sobre el espacio-tiempo. Los flujos que no son turbulentos reciben el nombre de flujos laminares. Un flujo se puede caracterizar como laminar o turbulento observando el orden de magnitud del número de Reynolds Re, el cuál se define por

$$\mathrm{Re} = \frac{VL}{\nu},$$

donde V es la velocidad característica del flujo, L una escala característica (e.g. el diámetro hidráulico de un tubo) y ν la viscocidad cinemática. Típicamente los flujos con números de Reynolds mayores que 100000 son turbulentos. Si bien no hay un teorema que relacione al número de Reynolds con la turbulencia, aumentar el número de Reynolds incrementa el caracter turbulento de un flujo. La turbulencia de flujos con números de Reynolds muy altos recibe el nombre de turbulencia completamente desarrollada.

La turbulencia, como parte de la hidrodinámica, está gobernada por la ecuación de Navier-Stokes. Está ecuación se conoce desde 1823; sin embargo, su caracter no-lineal y no-local no permiten, por el momento, describir al fenómeno de la turbulencia desde primeros principios. En consecuencia, se han propuesto una gran cantidad de modelos fenomenológicos que están basados y diseñados para ciertos aspectos de la turbulencia. La mayoría de estos modelos pueden clasificarse de acuerdo a la cantidad física que modelan. Las cantidades más importantes son el campo de velocidad y el proceso de disipación de energía.

De forma general, la turbulencia se refiere a la dinámica en el flujo de un fluido del vector de velocidad $\overrightarrow{u}\left(\overrightarrow{r},t\right) = \left(u_x\left(\overrightarrow{r},t\right), u_y\left(\overrightarrow{r},t\right), u_z\left(\overrightarrow{r},t\right)\right)$ como función la posición $\overrightarrow{r} = (x,y,z)$ y del tiempo t. A partir de $\overrightarrow{u}$ podemos derivar a la disipación energía $\epsilon\left(\overrightarrow{r},t\right)$, la cual se define como

$$\epsilon\left(\overrightarrow{r},t\right) \equiv \frac{\nu}{2} \sum_{i,j=x,y,z} \left\{\partial_i u_j\left(\overrightarrow{r},t\right) + \partial j u_i\left(\overrightarrow{r},t\right)\right\}^2. \tag{2.1}$$

La disipación de energía describe la pérdida de energía cinética a causa de la fricción interna. La fricción interna está caracterizada por la viscosidad ν.

Podemos obtener una ilustración pedagógica valiosa de un flujo turbulento a partir de la casacada de energía de Kolmogorov. En esta representación, la energía cinética se inyecta en el flujo a grandes escalas (e.g. diámetro de un tubo). Efectos no-lineales redistribuyen la energía cinética a escalas más pequeñas. Esta cascada de energía termina cuando se llega a una escala suficientemente pequeña donde la viscosidad convierte a la energía cinética en calor. Tradicionalmente, la escala L en la que se inyecta la energía se denomina escala integral, mientras que la escala η donde la energía se disipa recibe el nombre de escala de Kolmogorov. Cuando se incrementa el número de Reynolds, la proporción L/η también aumenta. El conjunto de escalas $\eta \ll l \ll L$ recibe el nombre de rango inercial y se espera que, en tal conjunto, las estadísticas turbulentas tengan un caracter universal[1].

Actualmente, la mayoría de los experimentos para medir el 3-vector de velocidad, consisten en determinar series de tiempo de la componente $\overrightarrow{u}$ del vector de velocidad en la dirección principal del flujo en una única posición fija $\overrightarrow{r_0}$ (en la modelación estocástica denotaremos por σ a la localización espacial). Basados en esta restricción, definimos a la disipación de energía temporal como

$$\epsilon_{time}\left(\overrightarrow{r_0}, t\right) \equiv \frac{15\nu}{\overline{u}^2}\left(\frac{du\left(\overrightarrow{r_0}, t\right)}{dt}\right)^2, \tag{2.2}$$

donde $\overline{u}$ denota a la velocidad media.

Es posible justificar por qué (2.2) es una buena definición en el caso de un flujo estacionario, homogéneo e isotrópico (que es el tipo de flujos que se modelarán en el presente trabajo). En tal situación, (2.1) puede aproximarse por (ver [28])

$$\epsilon_{space}\left(\overrightarrow{r}, t\right) \equiv 15\nu\left(\frac{\partial u\left(\overrightarrow{r}, t\right)}{\partial x}\right)^2, \tag{2.3}$$

expresión que se cree tiene propiedades estadísticas similares a la disipación de energía a escalas no muy pequeñas. Las discrepancias aparecen en escalas pequeñas y se denominan efectos de subrogación. En particular, la función de autocorrelación de la disipación de energía subrogada (2.3), muestra un incremento adicional a escalas de tiempo pequeñas (ver [23]).

[1] Diremos que una propiedad de la turbulencia es universal si no depende del mecanismo que crea la turbulencia.

A partir de (2.3) se puede llegar a (2.2). Para transformar la derivada espacial (2.3) a la derivada temporal (2.2), se utiliza la Hipótesis de Taylor de Flujo Congelado (ver [52]). Esta hipótesis reinterpreta la variación temporal de u en una localización espacial fija como una variación espacial: Bajo esta hipótesis, los incrementos espaciales a lo largo de la dirección del flujo principal se expresan en términos de incrementos temporales como

$$u_{t+s}\left(\overrightarrow{r}\right) - u_t\left(\overrightarrow{r}\right) = u_t\left(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{\overline{u}}\, s\right) - u_t\left(\overrightarrow{r}\right).$$

De aquí es claro pasar de (2.1) a (2.2).

De lo anterior se tiene que la disipación de energía (2.2) aproxima a la verdadera disipación de energía (2.1) en flujos estacionarios, homogéneos e isotrópicos. Sin embargo, la disipación temporal de energía (2.2), además, proporciona información estadística importante sobre el campo de velocidad turbulento para cualquier condición de flujo.

2.1.2. Fenomenología de la turbulencia

El análisis de una gran variedad de series de tiempo ha revelado ciertas propiedades universales de los flujos homogéneos e isotrópicos. Entre éstas destacan la intermitencia y la caracterización de ciertas cantidades estadísticas en términos de relaciones de escalamiento. Aquí nos restringiremos a la discusión de la intermitencia y de la variable de Kolmogorov asociada. Las relaciones de escalamiento no serán discutidas, pero las utilizaremos en la modelación del proceso de disipación de energía. Las relaciones de escalamiento parecen cumplirse para flujos turbulentos completamente desarrollados, pero es díficil detectarlas en flujos con bajos números de Reynolds. La intermitencia y la universalidad de la estadística de Kolmogorov asociada se encuentran presentes en un rango más amplio de números de Reynolds.

Intermitencia

Definimos a la función de estructura de orden $p \in \mathbb{N}$ como

$$S_p\left(r\right) = \mathbb{E}\left[\left(\overrightarrow{u}\left(t, \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{r}\right) - \overrightarrow{u}\left(t, \overrightarrow{r_0}\right) \cdot \frac{\overrightarrow{r}}{r}\right)^p\right] \tag{2.4}$$

donde $\overrightarrow{r}$ denota un vector espacial con norma r. Para el caso de un flujo turbulento estacionario, homogéneo e isotrópico, S_p no dependerá de t, $\overrightarrow{r_0}$ y $\overrightarrow{r}$; sólo dependerá del módulo r y del orden p. Las hipótesis de la teoría de Kolmogorov de 1941 (K41), desarrollada para flujos turbulentos homogéneos e isotrópicos, implican relaciones de escalamiento

$$S_p(r) = a_p \left(r\mathbb{E}[\epsilon] \right)^{p/3}, \tag{2.5}$$

siendo a_p una constante universal. Empero, la única relación de escalamiento exacta conocida para la función de estructura es

$$S_3(r) = -\frac{4}{5} r\mathbb{E}[\epsilon],$$

la cual puede derivarse de las ecuaciones de Navier-Stokes y recibe el nombre de Ley 4/5 de Kolmogorov. Para ordenes $p \geq 4$, se sabe que $S_p(r) \propto r^{\varrho_p}$, pero los exponentes ϱ_p no coinciden con la predicción de Kolmogorov y cumplen $\varrho_p < p/3$.

Restrinjámonos a un incremento sobre la componente x, es decir que en (2.4) tomemos

$$\overrightarrow{u}(t, \overrightarrow{r}_0 + r\overrightarrow{e}_1) - \overrightarrow{u}(t, \overrightarrow{r}_0) \cdot \frac{r\overrightarrow{e}_1}{r} = u_x(t, \overrightarrow{r}_0 + re_1) - u_x(t, \overrightarrow{r}_0),$$

con $e_1 = (1, 0, 0)$. La discrepancia $\varrho_p < p/3$ implica que la forma de la densidad de probabilidad del incremento $u_x(t, \overrightarrow{r_0} + re_1) - u_x(t, \overrightarrow{r_0})$ variará dentro del rango inercial; sus colas se ensancharán con el decremento de la escala (hacia la escala disipativa). Este fenómeno es llamado intermitencia. Más precisamente, se puede ver que la densidad del incremento aumenta su comportamiento no Gaussiano al decrecer la escala (del incremento).

Desde los trabajos pioneros de Kolmogorov [37] y Obukhov [42], ambos en 1962, la intermitencia del campo de velocidad de un flujo turbulento ha sido de gran intéres en la investigación del fenómeno de la turbulencia. Desde un punto de vista probabilístico, la intermitencia se refiere, en particular, al incremento del comportamiento no Gaussiano de la densidad de probabilidad de los incrementos de velocidad cuando decrece la escala. Un escenario típico consiste en tener formas Gaussianas aproximadas para escalas grandes, colas exponenciales para escalas intermedias y colas exponenciales estiradas para las escalas de disipación; [22] y [53].

Se ha reportado en la literatura [4] que la evolución de la densidad de los incrementos de velocidad para todas las amplitudes y escalas puede describirse mediante la familia de distribuciones normal Gaussiana inversa (NIG). De forma más exacta, la densidad de probabilidad del logaritmo de los incrementos se puede aproximar por la familia NIG.

El análisis de los parámetros observados en las distribuciones NIG de muchos conjuntos de datos turbulentos condujó a la formulación de una ley fundamental de universalidad: La evolución temporal de un campo de velocidad turbulento tiene un reloj intrínseco que depende de las condiciones experimentales, pero en términos de éste las distribuciones marginales 1-dimensionales de las diferencias de velocidad se vuelven independientes de las condiciones experimentales. En consecuencia, el colapso de las densidades de probabilidad dio lugar a una reformulación más amplia y más general, en términos de una clase de equivalencia estocástica, del concepto de Auto-similitud Extendido [19]. Para más detalles ver [3].

La hipótesis refinada de Kolmogorov

En 1962, Kolmogorov publicó dos hipótesis (comúnmente referidas como K62) sobre la cantidad V, la cual combina a la disipación de energía y a incrementos de velocidad. La primera hipótesis establece que la densidad de probabilidad de la variable estocástica

$$V_r = \frac{\Delta u_t\,(r)}{r\epsilon_r}\ , \quad \text{con} \quad \Delta u\,(r) \equiv u_t\,(x+r,y,z) - u_t\,(x,y,z)\,, \tag{2.6}$$

depende, para $r \ll L$, sólo del número de Reynolds local

$$\mathrm{Re}_r = \frac{r\,(r\epsilon_r)^{1/3}}{\nu}.$$

Aquí,

$$\Delta u_t\,(r) \equiv u_t\,(x+r,y,z) - u_t\,(x,y,z)$$

denota el incremento de escala r de una componente del vector de velocidad y $r\epsilon_r$ es la disipación integrada de energía sobre un dominio (lineal) de tamaño r,

$$\epsilon_r = \frac{1}{r}\int_{x_0-r/2}^{x_0+r/2} \epsilon\,(\overrightarrow{r},t)\,dx.$$

La segunda hipótesis establece que, para $\mathrm{Re}_r \gg 1$, la densidad de probabilidad de V_r no depende de Re_r; es decir, la densidad de V_r es universal.

Aunque para r pequeño se ha observado una dependencia de la densidad de V_r con r, varios aspectos de K62 han sido verificados experimentalmente y por simulaciones númericas. En particular se ha mostrado que las densidades condicionales $f\left(V_r \mid r\epsilon_r\right)$ se vuelven independientes de $r\epsilon_r$ para cierto rango de escalas r en el rango inercial. Sin embargo, la universalidad de la distribución de V no ha sido verificada en la literatura. A este respecto, es importante señalar que la verificación experimental de la hipótesis de Kolmogorov se limita a las estadísticas temporales y, como tal, se basa en el uso de la disipación de energía temporal (2.2) en lugar de la disipación de energía verdadera (2.1).

2.2. Integración de bases de Lévy

En esta sección presentamos un resumen con los resultados fundamentales de la integración con respecto a bases de Lévy. Este apartado resulta necesario ya que los modelos propuestos para el campo de velocidad turbulento y la disipación energética usan este tipo de integrales. Cabe resaltar que separamos la integración en dos casos: el determinista y el aleatorio. En el primero se trata la integral de una función determinista respecto a una base de Lévy; tomámos el enfoque desarrollado por Rajput y Rosinski [43]. El segundo caso consiste en la integración, bajo ciertas restricciones, de funciones aleatorias respecto a una medida martingala-valuada. Esta integral fue introducida por Walsh [54] en sus estudios de ecuaciones diferenciales parciales estocásticas. Ambas integrales tiene un gran potencial para modelar procesos estacionarios que son continuos en el tiempo y el espacio, situación que se presenta en varios contextos físicos.

Para desarrollar esta teoría, a lo largo de toda esta subsección, supondremos que la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad.

2.2.1. Bases de Lévy

En esta subsección presentamos los resultados básicos sobre bases de Lévy. Enunciamos los resultados y nos remitimos a [43] para las demostraciones y detalles. Como ya se dijo, supondremos que la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad.

A continuación establecemos la definición de Base de Lévy, un elemento fundamental en el desarrollo de éste trabajo.

Definición 1 *Tomemos $R \neq \varnothing$ como un conjunto arbitrario. Además, sea $\mathcal{R}$ un δ-anillo de subconjuntos de R tal que existe $\{R_n\} \subset \mathcal{R}$ con $R_n \subset R_{n+1}$ y $\cup_n R_n = R$. Decimos que una función $L : \Omega \times \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ es una base de Lévy sobre $\mathcal{R}$ si cumplen las siguientes condiciones*

1. *$L(A)$ es una variable aleatoria infinitamente divisible, para cualquier $A \in \mathcal{R}$;*

2. *Para $A, B \in \mathcal{R}$ con $A \cap B = \varnothing$, $L(A)$ y $L(B)$ son variables aleatorias independientes; y*

3. *Para cualquier sucesión $\{A_n\} \subset \mathcal{R}$ de conjuntos disjuntos con $\cup_n A_n \in \mathcal{R}$, se tiene que*

$$L\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n L(A_n) \qquad c.s.,$$

donde la serie anterior converge casi seguramente.

Observación 2 *Conviene tener en cuenta lo siguiente:*

(i) La base de Lévy es simplemente una medida aleatoria con propiedades especiales;

(ii) A las medidas aleatorias que cumplen 2 se les denomina "random scattered"; y

(iii) Cuando sea claro el δ-anillo en el que una base de Lévy L está definida, sólo diremos que L es una base de Lévy en R. En otras ocasiones, manifestaremos explícitamente la dupleta $(R, \mathcal{R})$ diciendo que L es una base de Lévy sobre $(R, \mathcal{R})$.

Resulta natural preguntar por la descomposición de Lévy-Khintchine asociada a una base de Lévy. El siguiente resultado trata sobre el tema, sin embargo antes introduciremos un poco de notación.

Definición 3 *Sea X una variable aleatoria sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

1. *La función cumulante asociada a X esta dada por*

$$C\{\zeta \ddagger X\} = \log \mathbb{E}\left[e^{i\zeta X}\right], \qquad \zeta \in \mathbb{R},$$

siempre que $\mathbb{E}\left[e^{i\zeta X}\right] > 0$.

2. *Cuando la función cumulante de X existe, el cumulante de orden n para X se define como*

$$c_n(X) = i^n \frac{d^n}{d\zeta^n} C\{\zeta \ddagger X\}|_{\zeta=0}.$$

3. *La función kumulante*[2] $K\{\cdot \ddagger X\}$ *asociada a X esta dada por*

$$K\{\zeta \ddagger X\} = \log \mathbb{E}\left[e^{\zeta X}\right], \qquad \zeta \in \mathbb{R},$$

siempre que $\mathbb{E}\left[e^{i\zeta X}\right] < \infty$.

Observación 4 *(i) Cuando X es una variable aleatoria infinitamente divisible, la función cumulante está bien definida sobre todos los reales.*

(ii) Los dos primeros cumulantes coinciden con la media y la varianza. Luego, ocasionalmente, utilizaremos la notación $c_1(X)$ y $c_2(X)$ para referirnos a la media y a la varinza de X, respectivamente, sin preocuparnos por la existencia de la función cumulante.

Enseguida presentaremos la descomposición de Lévy-Khintchine asociada a una base de Lévy.

Teorema 5 *Sea L una base de Lévy sobre $\mathcal{R}$. Entonces,*

1. *Para cada $A \in \mathcal{R}$,*

$$\begin{aligned} C\{\zeta \ddagger L(A)\} &= i\zeta\nu_0(A) - \frac{1}{2}\zeta^2\nu_1(A) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \left[e^{i\zeta x} - 1 - i\zeta\tau(x)\right] F_A(dx), \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde $\nu_0 : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ es una medida signada, $\nu_1 : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ es una medida, $F_A(\cdot)$ es una medida de Lévy sobre $\mathbb{R}$ y

$$\tau(x) = \begin{cases} x & si\ |x| \le 1, \\ \frac{x}{|x|} & si\ |x| > 1. \end{cases}$$

Además, el mapeo $\mathcal{R} \ni A \longmapsto F_A(B)$, es una medida siempre que $0 \notin \overline{B}$.

[2] *Escribiremos función "cumulante" cuando usemos la transformada de Fourier y función "kumulante" cuando utilicemos la transformada de Laplace.*

2. *Recíprocamente, si ν_0, ν_1 y F cumplen las condiciones mecionadas en 1, existe una única (en el sentido de distribuciones finito-dimensionales) base de Lévy L tal que su función cumulante cumple (2.7).*

3. *Para ν_0, ν_1 y F como en 1, definamos*

$$\lambda(A) = |\nu_0|(A) + \nu_1(A) + \int_{\mathbb{R}} \left(1 \wedge |x|^2\right) F_A(dx). \tag{2.8}$$

Entonces λ es una medida sobre $\mathcal{R}$ tal que $\lambda(A_n) \longrightarrow 0$ implica que necesariamente $L(A_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Observación 6 *Debido a que $\lambda(R_n) < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$, podemos extender λ a una medida σ-finita sobre $(R, \sigma(\mathcal{R}))$. Dicha extensión se conoce como la medida de control de L y también será denotada por λ.*

El siguiente objetivo es establecer una expresión útil para la función cumulante de una base de Lévy. Esta igualdad será fundamental para poder calcular la función cumulante de la integral sobre una base de Lévy. Para esto necesitamos el siguiente lema.

Lema 7 *Sea F como en el teorema anterior. Entonces existe una única medida σ-finita m en $\sigma(\mathcal{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que*

$$m(A \times B) = F_A(B) \qquad A \times B \in \sigma(\mathcal{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Además, existe una función $\rho : R \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ tal que

1. *Para cada $s \in R$, $\rho(s, \cdot)$ es una medida de Lévy sobre $\mathbb{R}$;*

2. *Para cualquier $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\rho(\cdot, B)$ es una función $\sigma(\mathcal{R})$-medible;*

3. *Para cada $h : R \times \mathbb{R} \to [0, \infty]$ función $\sigma(\mathcal{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$-medible,*

$$\int_{R \times \mathbb{R}} h(s, x)\, m(ds, dx) = \int_R \left[\int_{\mathbb{R}} h(s, x)\, \rho(s, dx)\right] \lambda(ds).$$

A partir del Teorema 5 y el Lema 7 se obtiene una forma muy útil de la función característica de L.

Proposición 8 *Sea L una base de Lévy y λ su medida de control. Entonces*

$$C\left\{\zeta \ddagger L(A)\right\} = \int_A K(\zeta, s)\,\lambda(ds), \qquad \zeta \in \mathbb{R},\ A \in \mathcal{R},$$

donde

$$K(\zeta, s) = i\zeta a(s) - \frac{1}{2}\zeta^2 \sigma^2(s) + \int_{\mathbb{R}} \left[e^{i\zeta x} - 1 - i\zeta\tau(x)\right] \rho(s, dx),$$

$$a(s) = \frac{d\nu_0}{d\lambda}(s), \qquad \sigma^2(s) = \frac{d\nu_1}{d\lambda}(s)$$

y ρ está dada por el Lema 7.

Para cada $s \in R$, consideremos a la variable aleatoria infinitamente divisible $L'(s)$ que tiene asociada como terna de Lévy-Khintchine a $\left(a(s), \sigma^2(s), \rho(s, dx)\right)$. El corolario anterior implica que

$$C\left\{\zeta \ddagger L(A)\right\} = \int_A C\left(\zeta \ddagger L'(s)\right) \lambda(ds), \qquad \zeta \in \mathbb{R},\ A \in \mathcal{R}. \tag{2.9}$$

Lo anterior nos permite pensar en la distribución de $L(A)$ como la integral sobre A de variables aleatorias infinitamente divisibles. La colección $\{L'(s), s \in R\}$ recibe el nombre de semillas de Lévy asociadas a L.

Para concluir esta subsección, estableceremos cuando una base de Lévy es factorizable y homogénea.

Definición 9 *Sea L una base de Lévy sobre $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^d$ y (ν_0, ν_1, F) su terna de Lévy-Khintchine. Decimos que L es factorizable si*

$$F_{dz}(dx) = \eta(dx)\, c(dz),$$

para $\eta(dx)$ una medida de Lévy sobre $\mathbb{R}$ y $c(dz)$ una medida σ-finita. Además, cuando L es factorizable, se dice que L es homogénea si ν_0, ν_1 y c son proporcionales a la medida de Lebesgue.

Observación 10 *Notemos que del Lema 7 se sigue*

$$F_{dz}(dx) = \rho(z, dx)\,\lambda(dz),$$

con λ la medida de control de L y ρ dada como en el lema 7. Luego, para que una base de Lévy sea factorizable, basta que ρ no dependa de z. Además, para que L sea homogénea, ν_0, ν_1 y λ tienen que ser proporcionales a la medida de Lebesgue.

Observemos que para una base de Lévy L homogénea, con $\nu_0 = a \cdot Leb$, $\nu_1 = \sigma^2 \cdot Leb$ y $\lambda = c \cdot Leb$, la función cumulante cumple

$$C\left\{\zeta \ddagger L(A)\right\} = Leb(A)\left[i\zeta a - \frac{1}{2}\zeta^2\sigma^2 + c\int_{\mathbb{R}}\left[e^{i\zeta x} - 1 - i\zeta\tau(x)\right]\eta(dx)\right], \tag{2.10}$$

donde Leb es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{R}$ y $\zeta \in \mathbb{R}$. Esta relación permite encontrar la función cumulante de integrales sobre bases de Lévy.

2.2.2. Ejemplos de bases de Lévy

Veamos un par de ejemplos de bases de Levy. El primero de ellos se usa en la modelación del campo de velocidad de un fluido turbulento; el segundo puede ser usado en la modelación del campo de disipación energética. Las demostraciones de los resultados pueden consultarse en [29].

El primer ejemplo es bastante sencillo y puede considerarse como una generalización del ruido blanco con dos índices.

Definición 11 *La hoja Browniana BS es una base de Lévy sobre $\mathbb{R}^2$ que es homogénea y que tiene la terna de Lévy-Khintchine $(0, Leb, 0)$.*

Aplicando (2.10), se llegamos a que

$$C\left\{\zeta \ddagger BS(A)\right\} = -\frac{1}{2}\zeta^2 Leb(A), \qquad A \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right), \zeta \in \mathbb{R};$$

esto motiva el nombre de hoja Browniana. Este tipo de base de Lévy resulta ser útil para un primer acercamiento a la modelación de campos de velocidad turbulentos. Si bien es posible que con otras bases de Lévy se obtenga un modelo más preciso para el vector de velocidad turbulento, la simplicidad de la hoja Browniana ayuda a entender aspectos de la modelación y da luces sobre un modelo más exacto. Aunque por sí sola BS tiene ciertas ventajas; por ejemplo, la hoja Browniana permite que el modelo del campo de velocidad turbulento exhiba intermitencia.

Nuestro segundo ejemplo consiste en una base de Lévy normal Gaussiana inversa (NIG). Para esto, debemos comenzar estableciendo cuándo una variable aleatoria sigue una distribución NIG.

Definición 12 *Diremos que una variable aleatoria X sigue una distribución normal Gaussiana inversa si su densidad tiene la forma*

$$f(x;\alpha,\beta,\mu,\delta) = a(\alpha,\beta,\mu,\delta)\left[q\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)\right]^{-1} K_1\left(\delta\alpha q\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)\right)e^{\beta x}, \qquad x\in\mathbb{R} \tag{2.11}$$

donde $\mu\in\mathbb{R}$, $\delta\in\mathbb{R}^+$, $0\leq|\beta|<\alpha$, K_1 es una función de Bessel modificada de tercer tipo e índice 1, $q(x)=\sqrt{1+x^2}$, y

$$a(\alpha,\beta,\mu,\delta) = \pi^{-1}\alpha\exp\left\{\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}-\beta\mu\right\}.$$

Cuando una variable aleatoria X tenga como densidad a (2.11), escribiremos $X\sim NIG(\alpha,\beta,\mu,\delta)$.

La distribución NIG es un caso particular de la distribución hiperbólica generalizada y por tanto es infinitamente divisible. El parámetro μ es un parámetro de localización, β un párametro de simetría, δ un parámetro de escala y α un parámetro que tiene que ver tiene que ver con el peso de las colas de la NIG. La distribución NIG es cerrada bajo convoluciones, de hecho es el único miembro de la familia de la distribución hiperbólica generalizada que lo cumple,

$$NIG(\alpha,\beta,\mu_1,\delta_1) * NIG(\alpha,\beta,\mu_2,\delta_2) = NIG(\alpha,\beta,\mu_1+\mu_2,\delta_1+\delta_2).$$

Esto se puede ver claramente a partir del siguiente resultado, en el cual expone explícitamente la forma de la función cumulante de la distribución NIG.

Proposición 13 *Sea $X\sim NIG(\alpha,\beta,\mu,\delta)$. Luego, la función cumulante de X tiene la forma*

$$C\{\zeta\ddagger X\} = \delta\left\{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}-\sqrt{\alpha^2-(\beta+i\zeta)^2}\right\}+i\mu\zeta,$$

para cualquier $\zeta \in \mathbb{R}$.

La distribución NIG (2.11) tiene colas semi-pesadas, específicamente

$$f(x;\alpha,\beta,\mu,\delta) \sim \text{constante}\,|x|^{-3/2}\exp(-\alpha|x| + \beta x), \qquad x \to \pm\infty.$$

Además, la distribución normal Gaussiana inversa puede caracterizarse en términos de un movimiento Browniano subordinado aunque aquí no abundaremos en el tema.

En la próxima proposición, damos la descomposición de Lévy-Khinchine para la distribucion NIG.

Proposición 14 *Supongamos* $X \sim NIG(\alpha,\beta,\mu,\delta)$ *y definamos*

$$a = \mu + \frac{2\alpha\delta}{\pi}\int_0^1 \sinh(\beta x)\,K_1(\alpha x)\,dx,$$

$$F_{NIG}(dx) = \frac{\alpha\delta}{\pi}\frac{\exp\{\beta x\}\,K_1(a|x|)}{|x|}dx,$$

donde K_1 *es una función de Bessel modificada de tercer tipo e índice* 1. *Entonces, la función cumulante de* X *tiene la forma*

$$C\{\zeta \ddagger X\} = ia\zeta + \int_{\mathbb{R}}\left[e^{i\zeta x} - 1 - i\zeta 1_{[-1,1]}(x)\right]F_{NIG}(dx).$$

Observación 15 *Conviene observar que la función centro* $1_{[-1,1]}$ *de la descomposición de Lévy-Khinchine anterior no coincide con* τ. *Para nuestros objetivos, esto no causa ninguna dificultad. Al hacer*

$$a_\tau = a + \int_{\mathbb{R}} x\left(\tau(x) - 1_{[-1,1]}(x)\right)F_{NIG}(dx)$$

se obtiene que

$$C\{\zeta \ddagger X\} = ia_\tau\zeta + \int_{\mathbb{R}}\left[e^{i\zeta x} - 1 - i\zeta\tau(x)\right]F_{NIG}(dx). \tag{2.12}$$

Teniendo está información es posible obtener una base de Lévy cuya semilla será una NIG. Sea $\{L'(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$ una colección de variables aleatorias NIG cuya descomposición de Lévy-

Khinchine del tipo (2.12) cumple

$$a(s) = \mu(s) + \frac{2\alpha(s)\delta(s)}{\pi} \int_0^1 \sinh(\beta(s)x) K_1(\alpha(s)x)\,dx,$$

$$F_{NIG}(s, dx) = \frac{\alpha(s)\delta(s)}{\pi} \frac{\exp\{\beta(s)x\} K_1(a(s)|x|)}{|x|} dx,$$

siendo $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\mu(s)$ y $\delta(s)$ funciones $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-medibles. Suponiendo condiciones de integrabilidad adecuadas, podemos tomar

$$\begin{aligned}
G_A(\zeta) &= \int_A C\left\{\zeta \ddagger L'(s)\right\} ds \\
&= \int_A \left(\mu(s)\zeta + \frac{2\alpha(s)\delta(s)\zeta}{\pi} \int_0^1 \sinh(\beta(s)x) K_1(\alpha(s)x)\,dx\right) + \\
&\quad + \int_A \int_{\mathbb{R}} x\left(\tau(x) - 1_{[-1,1]}(x)\right) \frac{\alpha(s)\delta(s)}{\pi} \frac{\exp\{\beta(s)x\} K_1(a(s)|x|)}{|x|} dxds \\
&\quad + \int_A \int_{\mathbb{R}} \left[e^{i\zeta x} - 1 - i\zeta 1_{[-1,1]}(x)\right] \frac{\alpha(s)\delta(s)}{\pi} \frac{\exp\{\beta(s)x\} K_1(a(s)|x|)}{|x|} dxds,
\end{aligned}$$

para $\zeta \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. La función G corresponde al cumulante de una base de Lévy L con medida de control la de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y cuya descomposición de Lévy-Khinchine con función centro τ está dada por

$$\begin{aligned}
\nu_0(ds) &= \left(\mu(s)\zeta + \frac{2\alpha(s)\delta(s)\zeta}{\pi} \int_0^1 \sinh(\beta(s)x) K_1(\alpha(s)x)\,dx\right) ds \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} x\left(\tau(x) - 1_{[-1,1]}(x)\right) \frac{\alpha(s)\delta(s)}{\pi} \frac{\exp\{\beta(s)x\} K_1(a(s)|x|)}{|x|} dxds,
\end{aligned}$$

$$\nu_1 \equiv 0,$$

$$F_{ds}(dx) = F_{NIG}(s, dx)\,ds = \frac{\alpha(s)\delta(s)}{\pi} \frac{\exp\{\beta(s)x\} K_1(a(s)|x|)}{|x|} dxds.$$

A las bases de Lévy que tienen esta forma se les conoce como bases de Lévy NIG.

2.2.3. Integración: el caso determinista

En esta sección presentaremos un resumen con los principales resultados referentes a la teoría de integración respecto a bases de Lévy para integrandos no-aleatorios. Comenzamos estableciendo la definición de la integral, posteriormente damos una expresión para la función cumulante de dicha integral y finalizamos dando un criterio para saber cuando una función es integrable. Además, se incluye la descomposición de Lévy-Khintchine para esta integral. Las demostraciones de todos los resultados de esta sección, pueden consultarse en [43].

A continuación, presentamos la definición de función L-integrable y definimos la integral asociada. Como es usual, comenzamos definiendo la integración para funciones simples y de ahí pasamos al caso general.

Definición 16 *Sea L una base de Lévy sobre $(R, \mathcal{R})$ y λ su medida control. Definimos lo siguiente.*

(a) Sea $f = \sum_{j=1}^{n} x_j 1_{A_j}$ una función real simple sobre R, donde $A_j \in \mathcal{R}$ son disjuntos. Entonces, para cada $A \in \sigma(\mathcal{R})$, definimos

$$\int_A f(r) L(dr) = \sum_{j=1}^{n} x_j L(A \cap A_j). \tag{2.13}$$

(b) Sea $f : R \to \mathbb{R}$ una función $\sigma(\mathcal{R}) / \mathcal{B}(\mathbb{R})$-medible. Se dice que f es L-integrable si existe una sucesión $\{f_n\}$ de funciones simples como en (a) tal que

(i) $f_n \to f$ λ-casi donde sea; y

(ii) para cualquier $A \in \sigma(\mathcal{R})$, la sucesión $\left\{\int_A f_n(r) L(dr)\right\}$ converge en probabilidad cuando $n \to \infty$.

Cuando f es L-integrable, ponemos

$$\int_A f(r) L(dr) = \mathbb{P}\text{-}\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(r) L(dr), \tag{2.14}$$

siendo $\{f_n\}$ la sucesión que satisface (i) y (ii).

Observación 17 *Se puede probar que la integral $\int_A f(r) L(dr)$ no depende de la sucesión $\{f_n\}$, lo cual implica que tal integral está bien definida.*

Debido a que la suma de variables aleatorias independientes infinitamente divisibles también es infinitamente divisible, se tiene que la integral respecto a bases de Lévy de funciones simples es infinitamente divisible. Luego, como el límite de una sucesión de distribuciones infinitamente divisibles es infinitamente divisible (cuando existe tal límite), de la divisibilidad infinita de la integral de funciones simples se sigue que, en general, $\int_A f(r)\, L(dr)$ es infinitamente divisible. Aún más, se tiene que $A \longmapsto \int_A f(r)\, L(dr)$ define una base de Lévy.

El siguiente resultado nos provee de una expresión para la función cumulante de $\int_A f(r)\, L(dr)$, la cual quedará en términos de la semilla de Lévy L'.

Proposición 18 *Sea L una base de Lévy sobre $(R, \mathcal{R})$, λ la medida intensidad de L y L' la semilla de Lévy (2.9) asociada a L. Si f es L-integrable, entonces $\int_A |C\{\zeta f(r) \ddagger L'(r)\}|\, \lambda(dr) < \infty$ y*

$$C\left\{\zeta \ddagger \int_A f(r)\, L(dr)\right\} = \int_A C\left\{\zeta f(r) \ddagger L'(r)\right\} \lambda(dr), \qquad \zeta \in \mathbb{R}, \quad A \in \sigma(\mathcal{R}). \tag{2.15}$$

El siguiente resultado teórico es el más importante en lo que se refiere a integrandos deterministas. En él se establece una condición necesaria y suficiente para que una función sea integrable respecto a una base de Lévy. Además, se presenta la forma que tiene la tripleta de Lévy-Khintchine de la base de Lévy dada por $A \longmapsto \int_A f(r)\, L(dr)$.

Teorema 19 *Sea L una base de Lévy sobre $(R, \mathcal{R})$, λ la medida intensidad de L y $f : R \to \mathbb{R}$ una función $\sigma(\mathcal{R})$-medible. Entonces f es L-integrable si, y sólo si, se satisfacen las siguientes tres condiciones:*

1. $\int_R |U(f(r), r)|\, \lambda(dr) < \infty$;
2. $\int_R |f(r)|^2 \sigma^2(r)\, \lambda(dr) < \infty$;
3. $\int_R |V_0(f(r), r)|\, \lambda(dr) < \infty$;

   donde
   $$U(u, r) = ua(r) + \int_{\mathbb{R}} (\tau(xu) - u\tau(x))\, \rho(r, dx),$$
   $$V_0(u, r) = \int_{\mathbb{R}} \text{mín}\{1, |xu|\}\, \rho(r, dx),$$

   y tomando a, σ^2 y ρ como en la Proposición 8.

Además, si f es L-integrable y $A \in \sigma(\mathcal{R})$, la función cumulante de $\int_A f(r) L(dr)$ puede escribirse como

$$C\left\{\zeta \ddagger \int_A f(r) L(dr)\right\} = \exp\left\{i\zeta a_f - \frac{1}{2}\zeta^2\sigma_f^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\zeta x} - 1 + i\zeta\tau(x)\right)\right\} F_f(dx), \qquad \zeta \in \mathbb{R}$$

donde

$$a_f = \int_A U(f(r), r) \lambda(dr), \qquad \sigma_f^2 = \int_A |f(r)|^2 \sigma^2(r) \lambda(dr),$$

$$F_f(B) = m(\{(r,x) \in R \times \mathbb{R} : f(r) x \in B \backslash \{0\}\}), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

y m como en el Lema 7.

Observación 20 *Para encontrar la descomposición de Lévy-Khintchine, se desarrolla el lado derecho de (2.15) y se hace un cambio de variable (que de hecho está implícito en la forma de F_f).*

Hasta aquí llega nuestro resumen de integración respecto a integrandos deterministas. La formula (2.15) será especialmente útil. Ella nos permitirá dar expresiones para la función cumulante de los modelos Ambit. El resto de está teoría fundamenta los modelos Ambit cuando se tiene integrandos deterministas.

2.2.4. Integración: el caso L^2

En esta parte resumiremos los principales elementos de la teoría de integración sobre bases de Lévy en el caso de integrandos aleatorios. Sólo presentamos el caso L^2, para el caso general consúltese [39]. Exponemos los resultados sin demostración, sus pruebas pueden ser consultadas en [54], [16] y [39].

La estructura de esta subsección es la siguiente. Comenzamos estableciendo la definición de medida martingala-valuada y medida martingala-valuada ortogonal. Posteriormente, introducimos la medida de covariación y definimos la inegral estocástica para ciertos tipos de integrandos. Mayormente, seguiremos la notación utilizada en [16].

Medidas martingala-valuadas

A lo largo de toda la subsección 2.2.4, tomaremos a $(R, \mathcal{B}(R))$ como un espacio medible, donde R es un espacio polaco y $\mathcal{B}(R)$ es la σ-álgebra de Borel de R. También siempre supondremos que $T > 0$.

Las medidas martingala-valuadas son un concepto fundamental en esta teoría de integración. Para poder precisar su definición, es necesario definir cuándo una medida aleatoria signada es σ-finita.

Definición 21 *Sea $M : \Omega \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ una medida aleatoria signada, con $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(R)$ un δ-anillo. Se dice que M es σ-finita si existe $\{A_n\} \subset \mathcal{B}(R)$ sucesión con $\cup_n A_n = R$ y tal que $\forall n \in \mathbb{N}$*

(i) $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}$, *donde* $\mathcal{A}_n = \mathcal{B}(R)|_{A_n}$;

(ii) $\sup \left\{ \mathbb{E}\left[M(A)^2 \right] : A \in \mathcal{A}_n \right\} < \infty$.

Ahora estamos en condiciones de definir a las medidas martingala-valuadas.

Definición 22 *Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(R)$ un δ-anillo y $(\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}$ una filtración continua por la derecha. Un proceso $\{M_t(A), (t, A) \in [0, T] \times \mathcal{A}\}$ se denomina medida martingala-valuada si se satisfacen los siguientes tres puntos:*

1. $M_0(A) = 0$ *c.s., para cada* $A \in \mathcal{A}$;

2. *Para cualquier* $t \in [0, T]$, M_t *es* σ*-finita y* L^2*-valuada;*

3. *Para cada* $A \in \mathcal{A}$, $(M_t(A))_{0 \le t \le T}$ *es una martingala respecto a* $(\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}$.

Podemos extender una medida martingala-valuada a conjuntos $A \in \mathcal{B}(R)$ mediante

$$M_t(A) = L^2\text{-}\operatorname{lím} M_t(A \cap A_n), \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.16}$$

De forma general no podemos asegurar que este límite existe $\forall A \in \mathcal{B}(R)$ y $\forall t \in [0, T]$, sin embargo para nuestros objetivos podemos suponer que existe $\forall A \in \mathcal{B}(R)$ y $\forall t \in [0, T]$.

Nuestro objetivo en esta sección es darle sentido a expresiones de la forma $\int_0^t \int_A f(r, s)\, M_{ds}(dr)$, donde M es una medida martingala-valuada y f es cierta clase de procesos. Ya que $M_t(A)$ es una martingala, es posible utilizar la teoría de integración usual (de semimartingalas) para integrales de la forma $\int_0^t H_s M_{ds}(A)$. La dificultad para definir $\int_0^t \int_A f(r,s) M_{ds}(dr)$ se debe a que se integra sobre el tiempo y el espacio.

Desafortunadamente, en general no es posible definir la integral sobre cualquier medida martingala-valuada. Por esta razón surge la necesidad de considerar tipos especiales de medidas martingalas.

Definición 23 *Una medida martingala-valuada* $\{M_t(A), (t,A) \in [0,T] \times \mathcal{A}\}$ *es ortogonal si, para cualesquiera* $A, B \in \mathcal{A}$ *con* $A \cap B = \varnothing$*, las martingalas* $(M_t(A))_{0 \leq t \leq T}$ *y* $(M_t(B))_{0 \leq t \leq T}$ *son independientes.*

Observación 24 *Equivalentemente,* M *es una medida martingala-valuada ortogonal si* $M_t(A) M_t(B)$ *es una martingala para cualesquiera conjuntos disjuntos* A *y* B*.*

Walsh [54] desarrolla la integral para una clase de medidas martingala-valuadas llamadas worthy, la cual es más general que las ortogonales. Nosostros restringiremos nuestro tratamiento de la integral estocástica a medidas martingala-valuadas ortogonales, lo cual es suficiente en el contexto de bases de Lévy.

Consideremos $\{M_t(A), (t,A) \in [0,T] \times \mathcal{A}\}$ una medida martingala-valuada ortogonal y definamos

$$Q^M(A \times (s,t]) \equiv \langle M(A) \rangle_t - \langle M(A) \rangle_s,$$

para cualesquiera $A \in \mathcal{A}$ y $(s,t] \subset [0,T]$. Aquí, dado $A \in \mathcal{A}$, estamos tomando a $\{\langle M(A) \rangle_t, t \in [0,T]\}$ como el único proceso predecible de variación finita tal que $M_t(A) - \langle M(A) \rangle_t$ es una martingala. Además, para $(s_i,t_i] \subset [0,T]$, $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, ..., n$ con $(s_i,t_i] \times A_i \cap (s_j,t_j] \times A_j = \varnothing$ si $i \neq j$, definamos

$$Q^M\left(\bigcup_{k=1}^n \{A_i \times (s_i,t_i]\}\right) \equiv \sum_{i=1}^n Q^M(A_i \times (s_i,t_i]).$$

Se tiene que Q^M es una medida aleatoria sobre la semiálgebra de las uniones finitas de rectángulos de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}[0,T]$.

Es posible demostrar que Q^M es una medida aleatoria que se puede extender a una medida σ-finita sobre la σ-álgebra producto $\sigma(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{B}[0,T]$. Seguiremos denotado a dicha extensión por Q^M. Además, para cualquier $f : \Omega \times R \times [0,T] \to \mathbb{R}$ función medible, podemos definir la integral

$$\left(\int_{A\times B} f(r,s)\, Q^M(dr,ds) \right)(\omega) \overset{c.s.}{:=} \int_{A\times B} f(\omega,r,s)\, Q^M(\omega,dr,ds)$$

para $A \in \sigma(\mathcal{A})$ y $B \in \mathcal{B}[0,T]$.

Definición 25 *Sea $\{M_t(A), (t,A) \in [0,T] \times \mathcal{A}\}$ una medida martingala-valuada ortogonal. La medida aleatoria Q^M dada antes se denomina medida covariación de M.*

La medida covariación cumple las siguientes propiedades.

Proposición 26 *Sea $\{M_t(A), (t,A) \in [0,T] \times \mathcal{A}\}$ una medida martingala-valuada ortogonal y Q^M su medida covariación. Entonces, se tiene que:*

1. *El proceso dado por $Y_t := Q^M(A \times (0,t])$, $t \leq T$ es predecible y de variación finita.*
2. *Para $\{A_n\}$ como en la definición 21 , $E\left[Q^M(A_n \times (0,T])\right] < \infty$.*

La integral de medidas martingala-valuadas ortogonales

A continuación construiremos la integral estocástica respecto a medidas martingala-valuadas ortogonales para campos aleatorios. La teoría se presenta sólo para el caso L^2, para el caso general véase [39]. Supondremos que las medida martingala-valuada $\{M_t(A), (t,A) \in [0,T] \times \mathcal{A}\}$ que tomamos son tales que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(R)$.

A lo largo de esta subsección, denominaremos campos aleatorios a las funciones medibles $\xi : \Omega \times R \times [0,T] \to \mathbb{R}$. Especialmente relevantes son los campos aleatorios simples.

Definición 27 *Un campo aleatorio $\xi(\omega,r,s)$ se dice elemental si es de la forma*

$$\xi(\omega,r,s) = X(\omega)\, 1_{(a,b]}(s)\, 1_A(r), \qquad (\omega,r,s) \in \Omega \times R \times [0,T]$$

donde $0 \leq a < b \leq T$, $A \in \mathcal{B}(R)$ y X acotada y $\mathcal{F}_a$-medible. Además, la combinación lineal finita de campos elementales se denomina campo simple.

Denotemos por $\mathcal{T}$ al conjunto al conjunto de campos simples sobre $\Omega \times R \times [0,T]$. Además, omitiremos expresar la dependencia sobre Ω de los campos aleatorios. Esto no debe causar confusión. Como es usual, la integral estocástica de campos simples es la más sencilla de definir y el punto de partida para el caso general.

Definición 28 *Sea $\{M_t(A), (t, A) \in [0, T] \times \mathcal{A}\}$ una medida martingala-valuada ortogonal y Q^M su medida covariación. Además, supongamos que ξ es un campo simple dado por*

$$\xi(r, s) = \sum_{i=1}^{n} X_i 1_{(a_i, b_i]}(s)\, 1_{A_i}(r) \qquad 0 \le s \le T,\ r \in R,$$

donde X_i, a_i, b_i y A_i cumplen las condiciones de la definición 27. Definimos la integral de ξ respecto a M, denotada por $\xi\diamondsuit M$, como

$$\begin{aligned} \xi\diamondsuit M_t(A) &\equiv \int_0^t \int_A \xi(r, s)\, M(dr, ds) \\ &\equiv \sum_{i=1}^{n} X_i \left[M_{t\wedge b_j}(A_j \cap A) - M_{t\wedge a_j}(A_j \cap A)\right], \qquad 0 \le t \le T,\ A \in \mathcal{B}(R). \end{aligned}$$

Debido a que el espacio de las medidas martingala-valuadas es lineal, el proceso $\{\xi\diamondsuit M_t(A), (t, A) \in [0, T] \times \mathcal{B}(R)\}$ es una medida martingala-valuada. Además, un simple cálculo y una aplicación del lema de Dynkin, nos permite ver que

$$Q^{\xi\diamondsuit M}(dr, ds) \overset{c.s.}{=} \xi^2(r, s)\, Q^M(dr, ds);$$

de donde se sigue

$$\mathbb{E}\left[(\xi\diamondsuit M_t(A))^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_A \xi^2(r, s)\, Q^M(dr, ds)\right]. \tag{2.17}$$

La siguiente definición tiene que ver con las condiciones de medibilidad para los campos aleatorios que se pueden integrar.

Definición 29 *La σ-álgebra generada por $\mathcal{T}$ recibe el nombre de σ-álgebra predecible en $(\Omega \times R \times [0, T])$ y se denota por $\mathcal{P}$. Un campo aleatorio es predecible si es $\mathcal{P}$-medible.*

Denotaremos $\mathcal{P}_M := L^2\left(\Omega \times R \times [0, T], \mathcal{P}, Q^M \times \mathbb{P}\right)$. Se tiene que $\mathcal{P}_M$ es un espacio de

Hilbert, con producto escalar

$$(\xi,\vartheta)_{\mathcal{P}_M} := \mathbb{E}\left[(\xi\diamondsuit M_t(A))^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_R \xi(r,s)\,\vartheta(r,s)\,Q^M(dr,ds)\right].$$

Los elementos de $\mathcal{P}_M$ son el tipo de integrandos más generales que permite nuestra construcción. La integral para elementos de $\mathcal{P}_M$, se define utilizando una aproximando por campos simples. El siguiente resultado es fundamental para esto.

Lema 30 *$\mathcal{T}$ es denso en $\mathcal{P}_M$.*

Para definir la integral estocástica de $\xi \in \mathcal{P}_M$, tomamos una sucesión $\{\xi_n\} \subset \mathcal{T}$ tal que $\|\xi - \xi_n\|_{\mathcal{P}_M} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Se puede probar que, para cada $(t,A) \in [0,T] \times \mathcal{B}(R)$, $\{\xi_n \diamondsuit M_t(A)\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Por lo tanto, para cada $(t,A) \in [0,T] \times \mathcal{B}(R)$, existe $\vartheta \in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ tal que $\xi_n \diamondsuit M_t(A) \overset{L^2}{\to} \vartheta$; este límite define la integral estocastoca de $\xi \in \mathcal{P}_M$.

Proposición 31 *El mapeo $\xi \mapsto \xi\diamondsuit M$ es una contracción de $\mathcal{P}_M$ en $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Además, $\xi\diamondsuit M$ es una medida martingala-valuada ortogonal cuya medida covariación tiene la forma*

$$Q^{\xi\diamondsuit M}(dr,ds) \overset{c.s.}{=} \xi^2(r,s)\,Q^M(dr,ds).$$

Observación 32 *De forma similar a como se hizo antes, es posible construir Q^M en el espacio $\Omega \times R \times [0,T]$. Habría que garantizar que $(M_t(A))_{t\in\mathbb{R}}$ es una martingala acotada en L^2 con respecto a una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ que cumpla las condiciones usuales. De esta manera, el espacio de Hilbert $L^2(\Omega \times R \times [0,T], \mathcal{P}, Q^M \times \mathbb{P})$ cumple el lema 30 y se mantiene la construcción de la integral (con sus demás propiedades). Para un tratamiento de ésto véase [18].*

La relación con bases de Lévy

Las demostraciones de lo que aquí exponemos, pueden consultarse en [16] y [39]. Sea $\mathcal{S} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$. Consideremos una base de Lévy L definida sobre $(\mathcal{S} \times [0,T], \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+1}))$ y con valores en L^2. Pensamos a L como una base de Lévy donde se ha separado la última variable para denotar el tiempo. El conjunto $\mathcal{S}$ se puede pensar como el espacio.

Definimos el siguiente proceso medida-valuado,

$$M_t(A) := L(A \times (0,t]) \tag{2.18}$$

para $A \in \mathcal{B}_b(\mathcal{S})$, donde $\mathcal{B}_b(\mathcal{S})$ denota los conjuntos de Borel acotados de la σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{S})$. Este proceso cumple lo siguiente.

Proposición 33 *Sea $A \in \mathcal{B}_b(\mathcal{S})$. El proceso $M_t(A)$ definido en (2.18) es un proceso aditivo en ley; es decir, satisface las siguientes propiedades:*

1. *La ley de $M_t(A)$ es infinitamente divisible para cada t.*
2. *Los incrementos de $M_t(A)$ son independientes.*
3. *El proceso $M_t(A)$ es estocásticamente continuo.*
4. *El proceso $M_t(A)$ es continuo por la derecha, con $M_0 = 0$, c.s.*

Observación 34 *Para tener procesos de Lévy, necesitamos tener incrementos estacionarios. Lo cual no se tiene necesariamente.*

Queremos usar $M_t(A)$ como un integrador, tal y como se hizo antes. Para esto necesitamos encontrar una filtración bajo la cual el proceso $\{M_t(A), (t,A) \in [0,T] \times \mathcal{B}_b(\mathcal{S})\}$ se convierta en una medida martingala-valuada.

Sea $\mathcal{F}_t = \cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}^0_{t+1/n}$, donde

$$\mathcal{F}^0_t = \sigma\{M_s(A) : A \in \mathcal{B}_b(\mathcal{S}), 0 < s \leq t\} \vee \mathcal{N},$$

y siendo $\mathcal{N}$ los conjuntos $\mathbb{P}$-nulos de $\mathcal{F}$. Se tiene que $\mathcal{F}_t$ es una filtración continua por la derecha. Cuando la base de Lévy L tiene esperanza cero, el proceso $\{M_t(A), (t,A) \in [0,T] \times \mathcal{B}_b(\mathcal{S})\}$ es una medida martingala-valuada con filtración $\mathcal{F}_t$.

Proposición 35 *Supongamos L tiene esperaza cero. El proceso $\{M_t(A), (t,A) \in [0,T] \times \mathcal{B}_b(\mathcal{S})\}$ dado por (2.18) cumple las siguientes propiedades:*

1. *$\{M_t(A), (t,A) \in [0,T] \times \mathcal{B}_b(\mathcal{S})\}$ es una medida martingala-valuada con filtración $\mathcal{F}_t$;*

2. Si $A, B \in \mathcal{B}_b(\mathcal{S})$ y $A \cap B = \varnothing$, $M_t(A)$ y $M_t(B)$ son independientes.

Observación 36 *La segunda propiedad es una consecuencia de la independencia sobre conjuntos ajenos.*

Con el fin de poder integrar respecto al proceso medida-valuado $M_\cdot(\cdot)$, supondremos que la base de Lévy L es tal que se cumple que el límite (2.16) existe $\forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$ y $\forall t \in [0, T]$. La hoja Browniana es un ejemplo de base de Lévy que cumple la existencia de ese límite.

Por la segunda propiedad en la proposición anterior, se tiene que $\{M_t(A), (t, A) \in [0, T] \times \mathcal{B}_b(\mathcal{S})\}$ es una medida martingala-valuada ortogonal si L tiene media cero. Luego, cuando L tiene media cero, podemos hablar de la medida covariación de M. Utilizaremos indistintamente la notación Q^M ó Q^L para referirnos a la medida covariación de (2.18). También usaremos $\mathcal{P}_M = \mathcal{P}_L$, para M dado por (2.18).

Proposición 37 *Supongamos que L tiene esperanza cero. Se cumple*

$$Q^L(B) = \int_B \left[\sigma^2(r, s) + \int_{\mathbb{R}} x^2 \rho(r, s, dx)\right] \lambda(dr, ds),$$

donde λ es la medida control de L, σ^2 como en la Proposición 8 y ρ como en la Proposición 7. También se tiene que Q^L y λ son medidas equivalentes.

Como notación, para $\xi \in \mathcal{P}_L$,

$$\int_0^t \int_A \xi(r, s) L(drds) := \int_0^t \int_A \xi(r, s) M(dr, ds)$$

La relación entre la integral de Walsh y la de Rajput y Rosinski

La integral de Rajput y Rosinski extiende a la de Walsh en el caso de integrandos no-aleatorios; es decir, la integrabilidad en el sentido de Walsh implica integrabilidad en el sentido de Rajput y Rosinski. Supongamos que L una base de Lévy con valores en L^2 y con media cero; y sea $f \in \mathcal{P}_M$. Tomemos $\{f_n\} \subset \mathcal{T}$ una sucesión tal que $f_n \to f$ en $\mathcal{P}_L$, i.e.

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_R |f_n(r, s) - f(r, s)|^2 Q^L(dr, ds)\right] \underset{n\to\infty}{\to} 0 \\ \Rightarrow \quad &\int_0^T \int_R |f_n(r, s) - f(r, s)|^2 Q^L(dr, ds) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \end{aligned}$$

Luego, existe una subsucesión $\{f_{n_m}\}$ tal que

$$\int_0^T \int_R |f_{n_m}(r,s) - f(r,s)|^2 \, Q^L(dr,ds) \underset{m\to\infty}{\to} 0 \qquad \text{c.s.} \tag{2.19}$$

Denotemos por $\Omega_0 \subset \Omega$ el conjunto donde la convergencia (2.19) ocurre puntualmente. Para cada $\omega_0 \in \Omega_0$, se tiene que $f_{n_m}(\omega_0,r,s) \underset{m\to\infty}{\to} f(\omega_0,r,s)$ Q^L-casi todas partes. De la equivalencia entre Q^L y λ (proposición 37) se obtiene que, para cualquier $\omega_0 \in \Omega_0$, $f_{n_m}(\omega_0,r,s) \underset{m\to\infty}{\to} f(\omega_0,r,s)$ λ-casi todas partes. Por lo tanto, la función determinista $f(\omega_0,\cdot,\cdot)$ es L-integrable[3] para cualquier $\omega_0 \in \Omega_0$.

La integral respecto a una hoja Browniana

Para finalizar la subsección, discutiremos la integración respecto a una hoja Browniana. Es claro que podemos modifcar la teoría de integración de Walsh para definir integrales de la forma $\int_v^t \int_A \xi(r,s) \, L(drds)$, $v < 0$. Técnicamente, con los cambios obvios, todos los resultados siguen siendo válidos para bases de Lévy en L^2. Bajo esta teoría de integración extendida, $\mathcal{P}_{M,v} := L^2\left(\Omega \times \mathbb{R} \times [v,T], \mathcal{P}, Q^M \times \mathbb{P}\right)$ es el conjunto de los integrando admisibles, donde Q^M se toma con la extensión obvia para el intervalo $[v,T]$, $v < 0$.

Nuestra intención es definir integrales de la forma

$$\int_{-\infty}^t \int_A \xi(r,s) \, BS(drds), \qquad t \geq 0.$$

donde BS es una hoja Browniana. Para esto, pongamos

$$BS^n(drds) = 1_{[-n,T]}(r) \, 1_{[\sigma - c(t+n), \sigma + c(t+n)]}(s) \, BS(drds),$$

[3] Ya que, para cualquier $\omega_0 \in \Omega_0$, $f_{n_m}(\omega_0,r,s) \overset{m\to\infty}{\to} f(\omega_0,r,s)$ λ-casi todas partes; $f_{n_m}(\omega_0,\cdot,\cdot)$ cumple el primer punto de la definición 16. Para $\omega_0 \in \Omega_0$, como $f_{n_m}(\omega_0,\cdot,\cdot) \in \mathcal{T} \subset \mathcal{P}_M$, de (2.19) se sigue que $f(\omega_0,\cdot,\cdot) \in \mathcal{P}_M$; por lo que,

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_R f_{n_m}(\omega_0,r,s) \, L(dr,ds) \underset{m\to\infty}{\overset{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})}{\to}} \int_0^T \int_R f(\omega_0,r,s) \, L(dr,ds) \\ \Longrightarrow \quad &\int_0^T \int_R f_{n_m}(\omega_0,r,s) \, L(dr,ds) \underset{m\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} \int_0^T \int_R f(\omega_0,r,s) \, L(dr,ds). \end{aligned}$$

Luego, $f_{n_m}(\omega_0,\cdot,\cdot)$ cumple el segundo punto de la definición 16 donde σ y c son constantes positivas, y la igualdad anterior es en el sentido de Rajput y Rosinski. La elección de la segunda indicadora esta relacionada con el tipo de integrandos que tomaremos. Es posible extender ésto pero para nuestros objetivos esto es lo bastante general. Es claro que BS^n es una base de Lévy en L^2 con media cero y que, para $\xi \in \mathcal{P}_{M,-n}$, la integral $\int_{-n}^{t}\int_{\sigma-c(t-s)}^{\sigma+c(t-s)} \xi(r,s)\, BS^n(drds)$ está bien definida (por lo presentado en los apartados anteriores). De hecho pondremos,

$$\int_{-n}^{t}\int_{\sigma-c(t-s)}^{\sigma+c(t-s)} \xi(r,s)\, BS(drds) := \int_{-n}^{t}\int_{\sigma-c(t-s)}^{\sigma+c(t-s)} \xi(r,s)\, BS^n(drds),$$

para $\xi \in \mathcal{P}_{M,-n}$ y $-n \leq t \leq T$.

Finalmente, para $\xi \in \cap_{n=1}^{\infty}\mathcal{P}_{M,-n}$, definimos

$$\int_{-\infty}^{t}\int_{\sigma-c(t-s)}^{\sigma+c(t-s)} \xi(r,s)\, BS(drds) := L^2\text{-}\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{t}\int_{\sigma-c(t-s)}^{\sigma+c(t-s)} \xi(r,s)\, BS(drds), \quad t \leq T,$$

(cuando el límite existe). Entonces, como condiciones suficientes para que un campo aleatorio ξ sea integrable tenemos que

$$\int_{-\infty}^{t}\int_{\sigma-c(t-s)}^{\sigma+c(t-s)} \mathbb{E}\left[\xi^2(r,s)\right] drds < \infty$$

y

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_{-m}^{-n}\int_{\sigma-c(t-s)}^{\sigma+c(t-s)} \mathbb{E}\left[\xi^2(r,s)\right] drds = 0.$$

Las integrales sobre hojas Brownianas nos permitirán definir el modelo para el campo de velocidad turbulento.

2.3. Procesos Ambit

Damos una introducción a los procesos Ambit, haciendo énfasis en aquellos que serán usados en la modelación. Los procesos Ambit fueron propuestos por Ole Barndorff-Nielsen y Jürgen Schmiegel a partir de sus estudios sobre turbulencia [3]. Esta clase de procesos surge, de una manera más o menos natural, como una generalización de los modelos de cascada multiplicativa usados en la modelación de la disipación energética. Los procesos Ambit tienen la ventaja de ser contiunuos y evitan introducir jerarquías de escala artificiales; además, son invariantes bajo traslaciones (ver Capítulo 4).

En lo referente a la modelación del campo de velocidad turbulento, los procesos Ambit permiten modelar fluctuaciones en el espacio-tiempo de manera integrada. Es decir, las variaciones sobre cada coordenada son tomadas en cuenta simultáneamente. Esto es una propiedad adecuada pues la turbulencia es una consecuencia de cambios espacio-temporales.

Para una discusión más amplia sobre procesos Ambit se recomienda leer [3, 10, 13, 14, 15, 16].

2.3.1. Aspectos generales

A continuación presentamos la definición de conjunto Ambit que utilizaremos en este trabajo. El concepto puede extenderse pero en nuestro caso tiene la suficiente generalidad.

Definición 38 *Sea $(t,\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathcal{S}$. Diremos que $A_t(\sigma)$ es un conjunto Ambit en (t,σ) si*

$$A_t(\sigma) = \left\{(s,\rho) : s \leq t, \sigma - c_t^-(s;\sigma) \leq \rho \leq \sigma + c_t^+(s;\sigma)\right\},$$

para algunas funciones no-negativas $c_t^-(s,\sigma)$ y $c_t^+(s,\sigma)$.

Mediante los conjuntos Ambit y la integral estocástica respecto a bases de Lévy (ver Sección 2.2), podemos construir procesos continuos en el tiempo y el espacio. Los procesos Ambit caen en este tipo de procesos.

Definición 39 *Tomemos $(t,\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathcal{S}$. Se tiene las siguientes dos definiciones:*

1. *Un campo Ambit es un proceso espacio temporal estocástico $\{Y_t(\sigma), t \in \mathbb{R}\}$ de la forma*

$$\begin{aligned} Y_t(\sigma) &= \mu + \int_{A_t(\sigma)} g(t-s,\rho-\sigma)\, I_s(\rho)\, L(dsd\rho) \\ &\quad + \int_{D_t(\sigma)} h(t-s,\rho-\sigma)\, J_s(\sigma)\, dsd\rho, \end{aligned} \tag{2.20}$$

donde μ es constante, $\{A_t(\sigma), (t,\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathcal{S}\}$ y $\{D_t(\sigma), (t,\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathcal{S}\}$ son familias de conjuntos Ambit, g y h son funciones deterministas que aseguran la convergencia de las integrales, $I_s(\sigma)$ y $J_s(\sigma)$ son campos aleatorios en $\mathbb{R}^2$ y L es una base de Lévy en $\mathbb{R}^2$.

2. *Para* $-\infty < w < \infty$, *sea* $\gamma(w) \equiv (t(w), \sigma(w))$ *una curva suave en* $\mathbb{R}^2$ *donde* $t(w)$ *es no-decreciente. El proceso Ambit asociado al campo* $\{Y_t(\sigma), t \in \mathbb{R}\}$ *está dado por*

$$X_w := Y_{t(w)}(\sigma(w)),$$

para $w \in \mathbb{R}$.

Observación 40 *Conviene tener en cuenta lo siguiente:*

(i) Es posible extender, de la manera obvia, la defindión de campo Ambit a dimensiones mayores.

(ii) En el caso en que $I_s(\sigma)$ *y* $J_s(\sigma)$ *no son procesos deterministas, en la Sección anterior 2.2 sólo dimos sentido a expresiones del tipo (2.20) cuando* $L = BS$. *Es posible extender el método a casos más generales (véase [39]).*

(iii) En ocasiones nos referiremos a los campos Ambit como procesos Ambit, esto no debe causar confusión.

Un proceso Ambit en general no es una semimartingala. Debido a esto, una pregunta fundamental es cuándo la variación cuadrática $[X]$ de X está bien definida en el sentido

$$[X]_w = \mathbb{P}\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum \left(X_{w_i} - X_{w_{i-1}}\right)^2, \tag{2.21}$$

para cualquier sucesión de subdivisiones $0 = w_0 < w_1 < \ldots < w_n = w$ con $\max(w_i - w_{i-1}) \to 0$. Está también la interrogante de cuándo es posible definir diferenciales estocásticas dX_w y el cálculo símbólico asociado bajo el cual $(dX_w)^2 = d[X]_w$. Cuando X_w es una semimartingala o una combinación lineal de semimartingalas, la existencia de $[X]$ y de tales diferenciales está asegurada. De ahí surge otra pregunta, ¿cuándo X_w es la combinación lineal de semimartingalas?

La lista que a continuación presentamos contiene las preguntas básicas que debemos responder si queremos tener una teoría completa sobre los procesos Ambit:

1. ¿Bajo qué condiciones la variación cuadrática $[X]$ existe en el sentido de (2.21)? En particular, condiciones para los conjuntos Ambit $A_t(\sigma)$ y $D_t(\sigma)$.

2. ¿Qué condiciones, en especial para los conjuntos Ambit $A_t(\sigma)$ y $D_t(\sigma)$, son necesarias para que la diferencial dX_w exista?

3. ¿Cuándo X es una combinación lineal de semimartingalas?

Obviamente, las preguntas anteriores resultan relevantes desde el punto de vista de las matemáticas. Sin embargo, también son importantes en la modelación; de su solución depende que el modelo tenga consistencia.[4]

2.3.2. Procesos Ambit basados en la hoja Browniana

Para modelar el campo de velocidad turbulento usaremos campos Ambit de la forma

$$\begin{aligned} Y_t(\sigma) &= \mu + \int_{A_t(\sigma)} g(t-s, \rho-\sigma) I_s(\rho) BS(dsd\rho) \\ &\quad + \int_{D_t(\sigma)} h(t-s, \rho-\sigma) I_s^2(\sigma) dsd\rho. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Reformulando lo dicho en la última parte de la sección anterior, tenemos que, cuando $A_t(\sigma) = \left\{(s,\rho) : s \leq t, \sigma - c_t^-(s;\sigma) \leq \rho \leq \sigma + c_t^+(s;\sigma)\right\}$ para c_t^+ y c_t^- acotadas, la integral estocástica en la ecuación anterior tiene sentido para integrandos que cumplen

$$\int_{-\infty}^{t} \int_{\sigma-c_t^-(s;\sigma)}^{\sigma+c_t^+(s;\sigma)} g^2(t-s, \rho-\sigma) \mathbb{E}\left[I_s^2(\rho)\right] d\rho ds < \infty$$

y

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_{-m}^{-n} \int_{\sigma-c_t^-(s;\sigma)}^{\sigma+c_t^+(s;\sigma)} g^2(t-s, \rho-\sigma) \mathbb{E}\left[I_s^2(\rho)\right] drds = 0.$$

Así que, cuando I es un proceso estacionario (sobre ambas entradas) con segundo momento finito, la existencia de la primera integral en (2.22) depende sólo de la forma que tengan c_t^+, c_t^- y g.

Para $Y_t(\sigma)$ dada como en (2.22), del Teorema 19 se sigue que la función cumulante de

[4] En el sentido de que las diferenciales estocásticas existan y puedan identificarse con cantidades físicas.

$Y_t(\sigma) \mid I$ tiene la expresión

$$\begin{aligned} C\{\zeta \ddagger Y_t(\sigma) \mid I\} &= i\mu\zeta - \frac{1}{2}\int_{A_t(\sigma)} \zeta^2 g^2(t-s,\rho-\sigma) I_s^2(\rho)\, ds d\rho \\ &\quad + i\zeta \int_{D_t(\sigma)} h(t-s,\rho-\sigma) I_s^2(\sigma)\, ds d\rho. \end{aligned}$$

esta expresión es especialmente útil. Además, cuando $I_s(\rho)$ es un proceso estacionario en s para ρ fijo, se tiene que el proceso $Y_t(\sigma)$ también es estacionario en t. Esto se puede probar fácilmente usando la función cumulante y la propiedad de independencia *scattered*.

Una pregunta relevante para la hoja Browniana son las condiciones que se deben tener para que se satisfaga $(dX)^2 = d[X]$. Aunque por relaciones heurísticas, daremos por hecho que nuestro modelo del campo de velocidad turbulento cumple la relación $(dX)^2 = d[X]$.

2.3.3. Proceso Browniano semi-estacionario

Veamos algunas propiedades que cumple cierta clase especial de procesos Ambit: los procesos Brownianos semi-estacionarios. Mediante estos procesos estableceremos un modelo que sólo varíe en el tiempo para el vector de velocidad de un fluido turbulento (consúltese la Sección 3.2). Dicho modelo es útil pues la mayoría de datos a los que se tiene acceso consisten en series de tiempo donde la variable espacial está fija.

A continuación establecemos la definición de proceso Browniano semi-estacionario.

Definición 41 *Un proceso $\{Y_t, t \in \mathbb{R}\}$ se denomina un proceso Browniano semi-estacionario si está dado por*

$$Y_t = \mu + \int_{-\infty}^{t} g(t-s) I_s dB_s + \int_{-\infty}^{t} q(t-s) J_s ds, \tag{2.23}$$

donde μ es una constante, B_s es un movimiento Browniano estándar indexado por la recta, $g, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ son funciones deterministas con $g(t) = q(t) = 0$ para $t < 0$, e I y J son procesos càdlàg.

Observación 42 *Cuando I y J son estacionarios, el proceso Y también es estacionario. Esta situación motiva el mote semi-estacionario.*

Los proceso Brownianos semi-estacionarios son procesos Ambit, los cuales tienen componente espacial nula. Es más o menos fácil ver que (2.23) pertenece a los procesos Ambit.

Como veremos más adelante, la variación cuadrática de nuestro modelo temporal tiene interpretación física. Debido a que por el momento no contamos con resultados generales que nos aseguren la existencia de la variación cuadrática, necesitamos saber cuándo (2.23) es una semimartingala.

Proposición 43 *Sea Y un proceso Browniano semi-estacionario como en (2.23). Además, supongamos que*

(i) $g(0+)$ *y* $q(0+)$ *existen y son finitos;*

(ii) La función g es absolutamente continua y su derivada g' es cuadrado integrable;

(iii) El proceso $\left(g'(t-s)\, I_s\right)_{s\in\mathbb{R}}$ *es cuadrado integrable para cada* $t \in \mathbb{R}$*;*

(iv) El proceso $\left(q'(t-s)\, I_s\right)_{s\in\mathbb{R}}$ *es cuadrado integrable para cada* $t \in \mathbb{R}$*.*

Entonces Y es una semimartingala con respecto a la filtración natural generada por B.

Demostración. Definamos

$$Z_t := \mu + \int_0^t g(0+)\, I_s dB_s + \int_0^t A_s ds, \quad t \geq 0;$$

donde

$$A_s = \int_{-\infty}^s g'(s-u)\, I_u dB_u + q(0+)\, J_s + \int_{-\infty}^s q'(s-u)\, J_u du.$$

Claramente, bajo las condiciones (i)-(iv), las integrales de arriba están bien definidas y Z es una semimartingala. Luego, calculando llegamos a que

$$\begin{aligned}
Z_t &= \mu + \int_0^t g(0+)\, I_s dB_s + \int_0^t A_s ds \\
&= \mu + \int_0^t g(0+)\, I_s dB_s + \int_0^t \int_{-\infty}^s g'(s-u)\, I_u dB_u + q(0+)\, J_s + \int_{-\infty}^s q'(s-u)\, J_u ds \\
&= \mu + \int_0^t \left(g(0+)\, I_s dB_s + \int_{-\infty}^s g'(s-u)\, I_u dB_u \right) ds \\
&\quad + \int_0^t \left(q(0+)\, J_s + \int_{-\infty}^s q'(s-u)\, J_u ds \right) \\
&= \mu + \int_{-\infty}^t g(t-s)\, I_s dB_s + \int_{-\infty}^t q(t-s)\, J_s ds \\
&= Y_t,
\end{aligned}$$

lo que concluye la prueba. ■

En el caso de semimartingala, el proceso Browniano semi-estacionario tiene una forma explícita para su variación cuadrática.

Proposición 44 *Sea Y un proceso Browniano semi-estacionario como en (2.23). Además, supongamos que Y cumple las condiciones de la proposición 43. Entonces la variación cuadrática de Y está dada por*

$$[Y]_t = g^2(0+) \int_0^t I_s^2 ds$$

Demostración. Por las propiedades de la variación cuadrática

$$\begin{aligned} [Y]_t &= \left[\mu + \int_0^{\cdot} g(0+) I_s dB_s + \int_0^{\cdot} A_s ds\right]_t \\ &= \int_0^t g^2(0+) I_s^2 d[B]_s \\ &= g^2(0+) \int_0^t I_s^2 ds, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. ■

Capítulo 3

Modelación Estocástica de Campos de Velocidades

El modelo que aquí expondremos para el campo de velocidad turbulento, constituye un proceso Ambit que incorpora la disipación energética, la cual también será modelada vía procesos Ambit. Algunas características básicas que aparecen en turbulencia son capturadas por el modelo sin especificar los grados de libertad en todo detalle.

3.1. Modelo espacio-temporal

Denotemos por $u_t(\sigma)$ a una componente del vector de velocidad de un fluido turbulento al tiempo $t \geq 0$ y en la posición $\sigma \in \mathcal{S} = \mathbb{R}$. Para un fluido turbulento homogéneo y estacionario, modelaremos dicha componente como

$$\begin{aligned} u_t(\sigma) &= \mu + \int_{-\infty}^{t} \int_{\sigma - c^-(t-s)}^{\sigma + c^+(t-s)} g(t-s, \rho - \sigma)\, I_s(\rho)\, BS(dsd\rho) \\ &\quad + \beta \int_{-\infty}^{t} \int_{\sigma - c^-(t-s)}^{\sigma + c^+(t-s)} h(t-s, \rho - \sigma)\, J_s(\rho)\, dsd\rho \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde

- μ y β son constantes;
- c^+ y c^- son constantes positivas;

- g y h son funciones damping (asegurando la convergencia de las integrales);
- $I_s(\rho)$ y $J_s(\rho)$ son campos aleatorios en $\mathbb{R}^2$ tales que J es estacionario sobre sus dos parámetros y $J = I^2$;
- BS es una hoja Browniana.

Según Barndorff-Nielsen y Schmiegel [10], la condición $J = I^2$ es suficientemente general en el contexto de turbulencia. Además, como pedimos que J sea estacionario, se tiene que la media y la varianza de $J_s(\rho)$ no dependen de s y ρ; por esta razón, no debe haber confusión cuando escribimos $c_1(J)$ y $c_2(J)$ (primer y segundo cumulante). También, como u también es estacionario (ver la discusión de procesos Ambit basados en la hoja Browniana), sucede lo mismo con u.

La elección específica de un conjunto Ambit triangular, corresponde a la existencia de una velocidad máxima constante a la cual viaja la información al sitio dado (σ, t). En esta sencilla configuración, la influencia de un evento que ocurre en $\rho < \sigma$ ó $\sigma < \rho$, se experimenta en σ con un retraso de $(\sigma - \rho)/c^-$ ó $(\rho - \sigma)/c^+$, respectivamente. Esta diferencia en las velocidades de propagación para $\sigma < \rho$ y $\sigma > \rho$, se debe a la presencia de una velocidad media.

De forma general, las interacciones en el flujo se deben a las fluctuaciones de presión que viajan a la velocidad del sonido c y a interacciones que barren en el flujo. En este escrito sólo trataremos el caso más simple, aquel en el que la velocidad del barrido se supone igual a la velocidad media $\overline{u} > 0$. Para tal situación, se tiene que

$$c^+ = c - \overline{u}, \qquad c^- = c + \overline{u}.$$

Este caso corresponde a flujos compresibles, pues se están considerando fluctuaciones en la densidad del flujo. Para flujos incompresibles, las fluctuaciones de densidad no se toman en cuenta; así que, el modelo (3.1), captura esto cuando

$$c^+ = 0, \qquad c^- = \overline{u}.$$

La velocidad media es un parámetro libre en el modelo (3.1), la cual se relaciona a μ por

$$\begin{aligned}
\overline{u} &= E\left[u_t(\sigma)\right] = \mu + \beta \int_{-\infty}^{t} \int_{\sigma - c^-(t-s)}^{\sigma + c^+(t-s)} h(t-s, \rho - \sigma)\, \mathbb{E}\left[J_s(\rho)\right] ds d\rho \\
&= \mu + \beta c_1(J) \int_0^{\infty} \int_{-c^- s}^{c^+ s} h(s, \rho)\, ds d\rho \\
&\Rightarrow \mu = \overline{u} - \beta c_1(J) \int_0^{\infty} \int_{-c^- s}^{c^+ s} h(s, \rho)\, ds d\rho.
\end{aligned}$$

La intermitencia del modelo, i.e. su comportamiento no Gaussiano, surge de ambos términos en (3.1). En particular, el cumulante de tercer orden resulta en un polinomio de tercer grado en β. En este escrito no presentamos los resultados para la función cumulante de los incrementos de velocidad bajo (3.1). Más bien, trataremos de especificar el caracter intermitente y turbulento del modelo en términos del número de Reynolds basado en la microescala de Taylor, el cuál definiremos posteriormente.

3.1.1. Dinámica Lagrangiana

En esta subsección, a partir del modelo (3.1), deduciremos expresiones para las disipaciones de energía temporal y espacial. La expresión de la disipación temporal nos permitirá calcular una expresión para el número de Reynolds en la microescala de Taylor. El número de Reynolds es, probablemente, la cantidad más importantante en el estudio de la turbulencia.

Tomemos $\alpha(w) = (t(w), \sigma(w)) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$, para $-\infty < w < \infty$, como una curva suave en el espacio-tiempo tal que $w \mapsto t(w)$ es monótona creciente. Además, supongamos que $X = \left\{u_{t(w)}(\sigma(w))\right\}_{w \in \mathbb{R}}$ es un proceso estocástico bien definido y que $S = \mathbb{R}$.

Debido a que la teoría de los procesos Ambit aún se encuentra bajo desarrollo, muchas cantidades útiles y necesarias para la modelación de la turbulencia no están aún rigurosamente justificadas. En está subsección, supondremos que todas las diferenciales y manipulaciones que utilizaremos, pueden justificarse rigurosamente. Varias de ellas surgen más de argumentos heurísticos que de razonamientos formales.

Recordemos que supusimos $J = I^2$. Además, para simplificar notación, tomaremos $\mu = 0$.

El proceso X_w puede reescribirse como

$$\begin{aligned} X_w &= \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\sigma+c^+(t-s)} g\left(t-s,\rho-\sigma\right) I_s\left(\rho\right) BS\left(dsd\rho\right) \\ &+\beta\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\sigma+c^+(t-s)} h\left(t-s,\rho-\sigma\right) J_s\left(\rho\right) dsd\rho \\ &-\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\sigma-c^-(t-s)} g\left(t-s,\rho-\sigma\right) I_s\left(\rho\right) BS\left(dsd\rho\right) \\ &-\beta\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\sigma-c^-(t-s)} h\left(t-s,\rho-\sigma\right) J_s\left(\rho\right) dsd\rho \end{aligned} \tag{3.2}$$

con $(t,\sigma) = (t(w), \sigma(w))$. De lo anterior encontramos,

$$\begin{aligned} dX_w &= \int_{-\infty}^{t} g\left(t-s, c^+\left(t-s\right)\right) I_s\left(\sigma+c^+\left(t-s\right)\right) BS\left(dsd_w\left(\sigma+c^+\left(t-s\right)\right)\right) \\ &-\int_{-\infty}^{t} g\left(t-s, -c^-\left(t-s\right)\right) I_s\left(\sigma-c^-\left(t-s\right)\right) BS\left(dsd_w\left(\sigma-c^-\left(t-s\right)\right)\right) \\ &+dR_w, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{dR_w}{dw} &= \int_{-\infty}^{t}\int_{\sigma-c^-(t-s)}^{\sigma+c^+(t-s)} d_w g\left(t-s,\rho-\sigma\right) I_s\left(\rho\right) BS\left(dsd\rho\right) \\ &+\beta\int_{-\infty}^{t}\int_{\sigma-c^-(t-s)}^{\sigma+c^+(t-s)} d_w h\left(t-s,\rho-\sigma\right) J_s\left(\rho\right) dsd\rho \\ &+\beta\int_{-\infty}^{t} h\left(t-s, c^+\left(t-s\right)\right) J_s\left(\sigma+c^+\left(t-s\right)\right) dsd_w\left(\sigma+c^+t\right) \\ &-\beta\int_{-\infty}^{t} h\left(t-s, -c^-\left(t-s\right)\right) J_s\left(\sigma-c^-\left(t-s\right)\right) dsd_w\left(\sigma-c^-t\right). \end{aligned}$$

Así que, pensando a $BS\left(dsd_w\left(\sigma-c^-\left(t-s\right)\right)\right)$ [1] como la diferencial de un movimiento Brow-

[1] El significado de expresiones de la forma $BS\left(dsd_w\left(\sigma-c^-\left(t-s\right)\right)\right)$, todavía es una cuestión abierta.

niano, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{(dX_w)^2}{dw} &= \left|\sigma' + c^+ t'\right| \int_{-\infty}^{t} g^2\left(t-s, c^+(t-s)\right) J_s\left(\sigma + c^+(t-s)\right) ds \\
&\quad + \left|\sigma' - c^- t'\right| \int_{-\infty}^{t} g^2\left(t-s, -c^-(t-s)\right) J_s\left(\sigma - c^-(t-s)\right) ds \\
&= \left|\sigma' + c^+ t'\right| \int_{0}^{\infty} g^2\left(s, c^+ s\right) J_{t-s}\left(\sigma + c^+ s\right) ds \\
&\quad + \left|\sigma' - c^- t'\right| \int_{0}^{\infty} g^2\left(s, -c^- s\right) J_{t-s}\left(\sigma - c^- s\right) ds. \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

Hay tres casos de interés particular para la curva α: (i) $t(w) = w$, $\sigma(w) = \sigma \equiv cte.$; (ii) $t(w) = t \equiv cte.$, $\sigma(w) = w$; (iii) $t(w) = w$, $\sigma(w) = \sigma + c^- w$. Mediante estás curvas, usando la dinámica lagrangiana de fluidos, podemos obtener expresiones que aproximan a la disipación energética. El primer caso nos permite encontrar la disipación energética temporal; el segundo la disipación energética espacial en el sentido (2.3); y el tercero la disipación energética cuando se sigue el flujo principal para turbulencia incompresible[2]. Sustituyendo la información de (i)-(iii), llegamos a que la expresión (3.3) se reduce, respectivamente, en

$$
\epsilon_{time}(t,\sigma) = \int_0^{\infty} \left[c^- g^2\left(s, -c^- s\right) J_{t-s}\left(\sigma - c^- s\right) + c^+ g^2\left(s, c^+ s\right) J_{t-s}\left(\sigma + c^+ s\right)\right] ds \qquad (3.4)
$$

$$
\epsilon_{space}(t,\sigma) = \int_0^{\infty} \left[g^2\left(s, -c^- s\right) J_{t-s}\left(\sigma - c^- s\right) + g^2\left(s, c^+ s\right) J_{t-s}\left(\sigma + c^+ s\right)\right] ds \qquad (3.5)
$$

$$
\epsilon_{Lagr}(t,\sigma) = \left(c^- + c^+\right) \int_0^{\infty} g^2\left(s, c^+ s\right) J_{t-s}\left(\sigma + c^+ s\right) ds \qquad (3.6)
$$

En el contexto de turbulencia ϵ_{time} se identifica con la disipación de energía temporal y ϵ_{space} con la aproximación energética (2.3).

En el contexto de ecuaciones diferenciales estocásticas de semimartingalas Gaussianas del tipo (3.1), la cantidad $[du_t(\sigma)]^2/dt$ (3.4) es el análogo natural del cuadrado de la derivada de primer orden de la velocidad, la cual, en la formulación clásica, constituye la disipación temporal local de energía (2.2), salvo alguna constante como factor. Con un razonamiento similar, $[du_t(\sigma)]^2/d\sigma$ (3.5) se puede identificar, salvo una constante como factor, con (2.3). En

[2] El que se pueda encontrar tales disipaciones con estas formas de la curva α, es una consecuencia directa de los métodos lagrangianos.

ambos casos, ya que (3.5) y (2.3) son independientes de β, la disipación local de energía es independiente del segundo término de (3.1). Esto permite elegir a la función h y a la constante β de forma independiente del proceso de disipación de energía.

3.1.2. El número de Reynolds en la microescala de Taylor

En esta parte, trataremos de especificar el caracter intermitente y turbulento del modelo (3.1) en términos del número de Reynolds basado en la microescala de Taylor, el cual se define como

$$R_\lambda = \frac{c_2(u)}{\nu\sqrt{\mathbb{E}[\epsilon_{space}]}}.$$

Usando (3.5) y (3.1), podemos dar una expresión para R_λ; siendo esta cantidad la característica más destacada en turbulencia.

Teorema 45 *El número de Reynolds en la microescala de Taylor R_λ cumple*

$$R_\lambda = \frac{1}{\nu}\left(G_1 + G_2(\beta)\right),$$

donde

$$G_1 = \sqrt{c_1(J)}\frac{\int_0^\infty \int_{-c^- s}^{c^+ s} g^2(s,\rho)\,dsd\rho}{\sqrt{\int_0^\infty g^2(s,-c^- s) + g^2(s,c^+ s)\,ds}} \tag{3.7}$$

y $G_2(\beta) = \beta^2 G_2$, siendo

$$G_2 = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-c^- s}^{c^+ s} \int_{-c^- s}^{c^+ s} h(s,\rho)\,h(s',\rho')\operatorname{Cov}\{J_s(\rho), J_{s'}(\rho')\}\,dsds'd\rho d\rho'}{\sqrt{c_1(J)}\sqrt{\int_0^\infty g^2(s,-c^- s) + g^2(s,c^+ s)\,ds}}. \tag{3.8}$$

Demostración. De (3.5) es inmediato que

$$\mathbb{E}[\epsilon_{space}] = c_1(J)\int_0^\infty g^2\left(s,-c^- s\right) + g^2\left(s,c^+ s\right)ds. \tag{3.9}$$

Por otro lado, ya que BS es una hoja Browniana

$$
\begin{aligned}
& C\left(\zeta \ddagger \int_{-\infty}^{t} \int_{\sigma-c^{-}(t-s)}^{\sigma+c^{+}(t-s)} g(t-s,\rho-\sigma)\, I_s(\rho)\, BS(dsd\rho)\right) \\
= \quad & \log \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\zeta^2 \int_{-\infty}^{t} \int_{\sigma-c^{-}(t-s)}^{\sigma+c^{+}(t-s)} g^2(t-s,\rho-\sigma)\, J_s(\rho)\, dsd\rho\right\}\right].
\end{aligned}
$$

De la igualdad anterior, al condicionar respecto J y aplicar el Teorema 19, se obtiene que

$$
c_2(u) = \mathrm{Var}(u) = \mathrm{Var}(u-\mu) = \mathbb{E}\left[(u-\mu)^2\right] - (\overline{u}-\mu)^2
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \mathbb{E}\left[\left(\int g(t-s,\rho-\sigma)\, I_{s'}(\rho)\, BS(dsd\rho)\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\left(\beta \int h(t-s,\rho-\sigma)\, J_s(\rho)\, dsd\rho\right)^2\right] \\
& +2\mathbb{E}\left[\beta \int \int h(t-s,\rho-\sigma)\, J_s(\rho)\, g(t-s',\rho'-\sigma)\, I_{s'}(\rho')\, dsd\rho BS(ds'd\rho')\right] - (\overline{u}-\mu)^2 \\
= \quad & c_1(J) \int_{-\infty}^{t} \int_{-c^{-}(t-s)}^{c^{+}s} g^2(s,\rho)\, dsd\rho \\
& +\beta^2 \int_{0}^{\infty} \int_{-c^{-}s}^{c^{+}s} h(s,\rho)\, h(s',\rho')\, \mathbb{E}\left[J_{t-s}(\rho+\sigma)\, J_{t-s'}(\rho'+\sigma)\right] dsd\rho ds' d\rho' \\
& -\beta^2 c_1(J)^2 \int_{0}^{\infty} \int_{-c^{-}s}^{c^{+}s} \int_{0}^{\infty} \int_{-c^{-}s}^{c^{+}s} h(s,\rho)\, h(s',\rho')\, dsd\rho ds' d\rho' \\
= \quad & c_1(J) \int_{-\infty}^{t} \int_{-c^{-}(t-s)}^{c^{+}s} g^2(s,\rho)\, dsd\rho \\
& +\beta^2 \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \int_{-c^{-}s}^{c^{+}s} \int_{-c^{-}s}^{c^{+}s} h(s,\rho)\, h(s',\rho')\, \mathrm{Cov}\left[J_s(\rho)\, J_{s'}(\rho')\right] dsds' d\rho d\rho'. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

Luego, de (3.9) y (3.10), se sigue el resultado buscado. ■

El primer término en (3.7) es independiente de la función βh. Así que podemos incrementar R_λ al manipular β o a la función h, esto sin modificar la disipación energética. En otras palabras el nivel de turbulencia puede incrementarse independientemente del proceso de disipación de energía. Este tipo de comportamiento se ha observado en cierto tipo de flujos, donde la intermitencia del campo de velocidad varía pero la disipación energética se comporta igual (veáse [22]). Esto es un importante indicio para nuestro modelo.

3.2. Modelo temporal

El modelo espacio-temporal $(1+1)$-dimensional (3.1), así como su generalización a dimensiones mayores, proporciona el marco de modelación general para un campo de velocidad turbulento. Para un verificación experimental preliminar del modelo propuesto, Barndorff-Nielsen y Schmiegel [7] se restringen a un modelo que sólo varia en el tiempo. Esto se debe a que las estadísticas puramente temporales en una posición espacial fija son el tipo de datos accesibles con una calidad razonable; además de que su estudio analítico puede resultar más simple. En esta sección, analizamos el modelo puramente temporal que surge al restringir (3.1) tal y como lo hicieron Barndorff-Nielsen y Schmiegel en [7].

Para mayor simplicidad, definimos una versión puramente temporal de (3.1) como

$$u_t = \mu + \int_{-\infty}^{t} g\left(t-s\right) \sqrt{J_s} dB_s + \beta \int_{-\infty}^{t} g\left(t-s\right) J_s ds, \tag{3.11}$$

donde $t \geq 0$ y B denota un movimiento Browniano. En el contexto de turbulencia y (3.11), interpretaremos a J como intermitencia que varía en el tiempo. Este modelo es un caso límite de (3.1) con $h = g$, $g\left(s, \rho\right) = c^{-1} s^{-1+c} g\left(s\right)$ y tomando $c^{+} = c^{-} \rightarrow \infty$. Adicionalmente a las condiciones que consideramos en la definición de (3.1), supondremos que J es un proceso positivo, estacionario, con trayectorias cádlág y con media finita; además, que la función determinista g es no-negativa, diferenciable, cuadrado integrable en $[0, \infty)$ y que está acotada por $g\left(0\right) = 1$. Pedimos estas condiciones con el fin de asegurar que (3.11) sea una semimartingala Browniana; con esto garantizamos que la variación cuadrática de u existe y le damos consistencia al modelo. Algunos trabajos de Barndorff-Nielsen y otros autores sugieren que es posible omitir la condición de semimartingala, sin embargo las ideas que aquí se expondremos son suficientemente generales para ser extendidas.

Proposición 46 *Si J cumple las condiciones arriba descritas, u_t dada por (3.11) es una semimartingala.*

Demostración. Se sigue de la proposición 43. ■

La descomposición de la velocidad u_t en (3.11) es un reminiscente de la descomposición de Reynolds (Monin y Yaglom, [41]) con $\int_{-\infty}^{t} g\left(t-s\right) J_s ds$ jugando el papel de la componente de variación lenta y $\int_{-\infty}^{t} g\,(t-s)\,\sqrt{J_s}dB_s$ teniendo el papel de la componente de variación fuerte (con media cero).

Como ventaja del modelo (3.11), tenemos que el término que genera intermitencia J y la función g pueden, en gran medida, ser elegidos de manera arbitraria. Más adelante veremos que J puede identificarse con la disipación de energía. Por lo tanto, el modelo (3.11) establece un marco que deriva el modelo para un campo de velocidad a partir del modelo de la disipación energética. Sin embargo, como veremos después, una parte considerable de las estadísticas del vector de velocidad son independientes de la elección de un modelo específico para la disipación de energía. En particular, veremos que la evolución de la densidad de los incrementos de velocidad (de colas pesadas a formas Gaussianas con el incremento del lag) y que las estadísticas vinculadas con la teoría K62 dependen más de la estructura de (3.11) que del modelo para J.

Como u es una semimartingala, podemos calcular su variación cuadrática. La siguiente proposición establece una relación entre la variación cuadrática y el término de intermitencia J. Dicho resultado nos permitirá identificar J como la disipación de energía.

Proposición 47 *Suponiendo que u sigue la ecuación (3.11), se tiene que*

$$[u]_t = \int_0^t J_s ds, \quad t \geq 0. \tag{3.12}$$

Demostración. Utilizaremos el álgebra de Itô para calcular lo deseado. Sea $t \geq 0$. La diferencial estocástica asociada a u está dada por

$$u_t = a_t dt + \sqrt{J_t} dB_t, \tag{3.13}$$

donde

$$a_t = \beta J_t + \beta \int_{-\infty}^{t} g^{'}\,(t-s)\left(J_s ds + \sqrt{J_s} dB_s\right).$$

Notemos que $A_t = \int_0^t a_s ds$ es de variación finita. Así,

$$(du_t)^2 = a_t^2\,(dt)^2 + a_t \sqrt{J_t} dt dB_t + J_t\,(dB_t)^2\,.$$

El álgebra de Itô establece que $(dt)^2 = 0$, $dtdB_t = 0$ y que $(dB_t)^2 = dt$. Aplicando ésto a la ecuación anterior, obtenemos

$$du_t = J_t dt,$$

y, por tanto,

$$[u]_t = \int_0^t (du_t)^2 = \int_0^t J_s ds,$$

siendo esto lo que queríamos probar. ■

En el contexto de ecuaciones diferenciales estocásticas (del tipo semimartingala Browniana) $(du_t)^2 / dt$ es el análogo natural del cuadrado de la derivada temporal de la velocidad, la cual en la formulación clásica se toma como la disipación temporal local de energía. En consecuencia, la variación cuadrática $[u]_t$ es el análogo estocástico de la disipación de energía integrada y J_t puede indentificarse como la disipación local de energía.

Conviene notar que la variación cuadrática $[u]_t$ es independiente de β, lo cual indica que $[u]_t$ es independiente del segundo término de (3.11). Tal término es el responsable de la asimetría estadística (skewness) de los incrementos de la velocidad. Encontrar el factor de asimetría nos permitirá observar que nuestro modelo cumple la famosa ley 4/5 de Kolmogorov, algo que debería cumplir cualquier modelo. El factor de asimetría de la distribución de $u_t - u_0$ tiene una expresión relativamente complicada y en éste escrito restringiremos nuestra atención al factor de asimetría infinitesimal $\mathbb{E}\left((du_t)^3\right)$, notando que $\mathbb{E}(du_t) = 0$ debido a la estacionariedad de u_t.

Por simplicidad, de aquí en adelante, supondremos que J y B son independientes. De la diferencial (3.13) y pensando dB_t como $B_{t+dt} - B_t$, se obtiene que

$$\mathbb{E}\left((du_t)^3\right) = 3\beta \left[\mathbb{E}\left(J_0^2\right) + \int_0^\infty g'(t)\, \mathbb{E}(J_0 J_t)\, dt\right] (dt)^2 .$$

Además, suponiendo que g es monótona decreciente y que

$$\int_0^\infty \left|g'(t)\right| dt = 1, \qquad \mathbb{E}\left(J_0^2\right) - \mathbb{E}(J_0 J_t) > 0, \tag{3.14}$$

finalmente llegamos a que

$$\mathbb{E}\left((du_t)^3\right) = 3\beta (dt)^2 \int_0^\infty \left|g'(t)\right| \left[\mathbb{E}\left(J_0^2\right) - \mathbb{E}(J_0 J_t)\right] dt > 0.$$

El resultado anterior es acorde con la ley 4/5 de Kolmogorov, la cual establece un factor de asimetría positivo para los incrementos temporales del campo de velocidad de un fluido turbulento. En el modelo (3.11), el factor de asimetría positivo de los incrementos temporales de la velocidad está directamente relacionado con la autocorrelación positiva (3.14) de la disipación energética local.

La ley 4/5 de Kolmogorov predice un factor de asimetría negativo para la distribución de los incrementos espaciales de la velocidad $u(x+r) - u(x)$, donde r es una distancia espacial en la dirección del flujo principal. Los incrementos del tipo tiempo $u_{t+s} - u_t$, donde s es un lag de tiempo positivo, exhiben un factor de asimetría positivo (véase [4] y [30]). Este cambio en el factor de asimetría al ir de cantidades espaciales a catidades temporales puede explicarse usando la hipótesis del flujo congelado de Taylor [52]. Tal hipótesis establece que la variación temporal $u_{t+s} - u_t$ en una posición fija puede interpretarse como una variación espacial $u(x) - u(x+r)$ en un tiempo fijo; esto al poner $r = Us$, donde U denota la velocidad media. Aquí es importante notar que u_{t+s} se identifica con $u(x)$ y u_t con $u(x+r)$ (para r en la dirección del flujo principal), siendo tal correspondencia la responsable del cambio de signo del coeficiente de asimetría.

3.2.1. Evolución de los incrementos de velocidad

Como se mencionó anteriormente, la densidad empírica de los incrementos de la velocidad evoluciona de colas pesadas, cuando se tienen incrementos de tiempo s pequeños, a formas aproximadamente Gaussianas, cuando se tienen incrementos de tiempo s grandes. Al relacionar lo anterior con el modelo (3.11), el primer hecho a notar es que bajo (3.11) la ley asintótica de $u_t - u_0$ para $t \to \infty$ no será Gaussiana a menos que el campo de intermitencia J sea determinista. Esto concuerda con resultados experimentales, como lo han mostrado Barndorff-Nielsen y Schmiegel en [10]. A continuación trataremos de cuantificar el comportamiento de los incrementos $u_t - u_0$ cuando t es pequeño y cuando t es grande. Esto nos pemitirá advertir que el modelo (3.11) cumple el comportamiento deseado de colas pesadas para t pequeño y de formas casi Gaussiana para t grande.

Para cuantificar el caracter no Gaussiano de la densidad de los incrementos del modelo (3.11), nos enfocaremos en el cumulante de cuarto orden estandarizado $\overline{c}_4$. El orden de dicho cumulante, cuando $\beta = 0$ (i.e. bajo simetría), es el primero que distingue entre una forma

Gaussiana y una distribución de colas pesadas. Para los cálculos que realizaremos adelante, supondremos que $\beta = 0$, lo cual hará que los incrementos del campo de velocidad tengan un factor de asimetría nulo. La asimetría no es esencial en la evolución de la densidad de los incrementos temporales de velocidad. También es de esperarse que el hacer $\beta = 0$ no afecte las propiedades estadísticas básicas de la variable de Kolmogorov, en particular a sus distribuciones condicionales.

En general, $u_t - u_0$ tenderá en ley a una variable aleatoria de la forma $v_0 - u_0$, donde v_0 es una copia independiente de u_0 y la ley $v_0 - u_0$ es una mezcla de Gaussianas cuando J es independiente del movimiento Browniano B.

Lema 48 *Supongamos que u cumple la ecuación (3.11) con $\beta = 0$. Entonces, se tiene que*

$$\overline{c}_4 (u_t - u_0) \equiv \frac{c_4 (u_t - u_0)}{c_2 (u_t - u_0)^2} = 3 \frac{c_2 (J_0)}{c_1 (J_0)^2} D(t),$$

donde

$$\begin{aligned} D(t) &= \frac{1}{G^2(t)} \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{t} \left[\left(g(t-s) - 1_{(-\infty,0]}(s) g(-s) \right) \left(g(t-s') - 1_{(-\infty,0]}(s') g(-s') \right) \right]^2 \\ &\quad \tau \left(|s-s'| \right) ds ds', \end{aligned}$$

$$G(t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{t} \left[\left(g(t-s) - 1_{(-\infty,0]}(s) g(-s) \right) \left(g(t-s') - 1_{(-\infty,0]}(s') g(-s') \right) \right]^2 ds ds'$$

y τ es la función de autocorrelación de J.

Observación 49 *Recordemos que J es un proceso estacionario y que, por tanto, su función de autocorrelación τ sólo depende del valor absoluto de la diferencia de los tiempos.*

Demostración. Ya que $\beta = 0$, podemos escribir

$$u_t - u_0 = \int_{-\infty}^{t} \left[g(t-s) - 1_{(-\infty,0]}(s) g(-s) \right] \sqrt{J_s} dB_s.$$

Debido a que, condicionalmente sobre J, el proceso de velocidad es Gaussiano, la función cumulante de $u_t - u_0$ cumple que

$$\begin{aligned} C\left(\zeta \ddagger u_t - u_0\right) &= \log \mathbb{E}\left(\exp\left\{i\zeta\left(u_t - u_0\right)\right\}\right) \\ &= \log \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\exp\left\{i\zeta\left(u_t - u_0\right)\right\} \mid J\right)\right) \\ &= \log \mathbb{E}\left(\exp\left\{-\frac{1}{2}\zeta^2 \int_{-\infty}^{t} \left[g\left(t-s\right) - 1_{(-\infty,0]}\left(s\right) g\left(-s\right)\right]^2 J_s ds\right\}\right) \\ &= K\left(\frac{1}{2}\zeta^2 \ddagger Q\left(t\right)\right), \end{aligned} \tag{3.15}$$

donde K es la función kumulante y

$$Q\left(t\right) = c_2\left(u_t - u_0 \mid J\right) = \int_{-\infty}^{t} \left[g\left(t-s\right) - 1_{(-\infty,0]}\left(s\right) g\left(-s\right)\right]^2 J_s ds$$

es la varianza condicional de $u_t - u_0 \mid J$.

Diferenciando la relación (3.15) y evaluando en cero, se obtiene que

$$\begin{aligned} c_2\left(u_t - u_0\right) &= -\frac{d^2}{d\zeta^2} C\left(\zeta \ddagger u_t - u_0\right)\Big|_{\zeta=0} \\ &= \left[K'\left(\frac{1}{2}\zeta^2 \ddagger Q\left(t\right)\right) + \zeta^2 K''\left(\frac{1}{2}\zeta^2 \ddagger Q\left(t\right)\right)\right]\Big|_{\zeta=0} \\ &= c_1\left(Q\left(t\right)\right) = \mathbb{E}\left(Q\left(t\right)\right) = c_1\left(J_0\right) G\left(t\right). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Con un método similar, se encuentra que

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} c_4\left(u_t - u_0\right) &= \frac{1}{3}\frac{d^4}{d\zeta^4} C\left(\zeta \ddagger u_t - u_0\right) = K''\left(0 \ddagger Q\left(t\right)\right) \\ &= c_2\left(Q\left(t\right)\right) = c_2\left(J_0\right) \langle g, \tau\rangle\left(t\right), \end{aligned} \tag{3.17}$$

donde

$$\begin{aligned} \langle g, \tau\rangle\left(t\right) = & \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} \left[\left(g\left(t-s\right) - 1_{(-\infty,0]}\left(s\right) g\left(-s\right)\right)\left(g\left(t-s'\right) - 1_{(-\infty,0]}\left(s'\right) g\left(-s'\right)\right)\right]^2 \\ & \tau\left(\left|s - s'\right|\right) ds ds'. \end{aligned}$$

De (3.16) y (3.17) se sigue que

$$\overline{c}_4\left(u_t-u_0\right)=\frac{3c_4\left(J_0\right)}{c_1\left(J_0\right)^2}\frac{\langle g,\tau\rangle\left(t\right)}{G\left(t\right)^2}=\frac{3c_2\left(J_0\right)}{c_1\left(J_0\right)^2}D\left(t\right),$$

que prueba lo deseado. ■

Ahora estudiamos el comportamiento de $\overline{c}_4$ para tiempos grandes y tiempos pequeños.

Corolario 50 *Supongamos que u cumple la ecuación (3.11) con $\beta=0$. Además, pongamos D como en la Proposición 48. Entonces,*

$$\lim_{t\to0}\overline{c}_4\left(u_t-u_0\right)=3\frac{c_2\left(J_0\right)}{c_1\left(J_0\right)^2}$$

y

$$\lim_{t\to\infty}\overline{c}_4\left(u_t-u_0\right)\leq3\frac{c_2\left(J_0\right)}{c_1\left(J_0\right)^2}$$

Demostración. Comencemos observando que

$$\frac{\left[\left(g\left(t-s\right)-1_{\left(-\infty,0\right]}\left(s\right)g\left(-s\right)\right)\left(g\left(t-s'\right)-1_{\left(-\infty,0\right]}\left(s'\right)g\left(-s'\right)\right)\right]^2}{G^2\left(t\right)}\to\delta_0\left(s,s'\right)$$

donde δ_0 es una función delta de Dirac centrada en $(0,0)$. De ahí que,

$$\lim_{t\to0}D\left(t\right)=\tau\left(0\right)=1.$$

Luego, de la proposición anterior se llega a

$$\lim_{t\to0}\overline{c}_4\left(u_t-u_0\right)=\lim_{t\to0}\frac{3c_2\left(J_0\right)}{c_1\left(J_0\right)^2}D\left(t\right)=3\frac{c_2\left(J_0\right)}{c_1\left(J_0\right)^2}.$$

que prueba la primera igualdad.

Para el segundo límite, recordemos que $|\tau| \leq 1$. Luego, ya que g es cuadrado integrable,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} D(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} 1_{(-\infty,0]}(s)\, g^2(-s)\, 1_{(-\infty,0]}(s')\, g^2(-s')\, \tau\left(|s-s'|\right) ds ds' \\
&\quad \times \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} 1_{(-\infty,0]}(s)\, g^2(-s)\, 1_{(-\infty,0]}(s')\, g^2(-s')\, ds ds'\right]^{-1} \\
&= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{g^2(s)}{\int_0^\infty g^2(r)\, dr} \frac{g^2(s')}{\int_0^\infty g^2(r')\, dr'} \tau\left(|s-s'|\right) ds ds' \leq 1, \\
&\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \overline{c}_4(u_t-u_0) \leq 3\frac{c_2(J_0)}{c_1(J_0)^2}
\end{aligned}$$

con lo que se demuestra la segunda ecuación. ■

Del corolario anterior, se sigue que $\overline{c}_4(u_t-u_0)$ será pequeño para t grande si $c_2(J_0)/c_1(J_0)^2$ es pequeño o si $\lim_{t\to\infty} D(t) \ll 1$. En ambos casos se espera que la ley de $u_t - u_0$ aproxime a una Gaussiana (sin ser una Gaussiana estrictamente) para t grande. Cuando $c_2(J_0)/c_1(J_0)^2$ no es pequeño pero g y τ decrecen lo suficientemente rápido para hacer $\lim_{t\to\infty} D(t) \ll c_1(J_0)^2/(3c_2(J_0))$, se espera que el modelo (3.11) muestre una evolución de la densidad para los incrementos de velocidad que vaya de colas pesadas, a escalas de tiempo pequeñas, a formas aproximadamente Gaussianas, para escalas grandes.

A continuación calcularemos el cumulante de cuarto orden estandarizado para un ejemplo específico de J. Antes conviene tener en cuenta el siguiente resultado, cuya prueba puede ser consultada en [14].

Lema 51 *Sea Y el proceso dado por*

$$Y_t = \int_{-\infty}^{t} g(t-s)\, dL_s, \qquad t \in \mathbb{R},$$

donde L es un proceso de Lévy indexado por la recta y g es una función determinista tal que la integral existe. Entonces, para $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[Y_t] = E[Y_1]\int_0^\infty g(x)\, dx$$

y

$$\operatorname{Var}[Y_t] = \operatorname{Var}[L_1]\int_0^\infty g^2(x)\, dx.$$

Al final de esta sección analizamos el comportamiento de la variable de Kolmogorov bajo el modelo (3.11) especificando una función g. El siguiente resultado nos proporciona, bajo la función g que se considerará para la variable de Kolmogorov y para un modelo específico para J, una expresión del cumulante $\overline{c}_4(u_t - u_0)$ para escalas tiempo pequeñas y grandes.

Teorema 52 *Supongamos que u satisface la ecuación (3.11) con $\beta = 0$. Además, tomemos*

$$g(t) = e^{-\gamma t}, \qquad J_t = \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda(s-t)} dL_s,$$

donde $\gamma, \lambda > 0$ y L es el proceso de Lévy Gaussiano inverso. Entonces, se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} \overline{c}_4(u_t - u_0) = \frac{3c_2(L_1 - L_0)}{2c_1(L_1 - L_0)^2}\frac{\gamma\lambda}{2\gamma + \lambda}$$

y

$$\lim_{t\to 0} \overline{c}_4(u_t - u_0) = \frac{3c_2(L_1 - L_0)}{2c_1(L_1 - L_0)^2}\lambda.$$

Demostración. Nos auxiliaremos de la Proposición 48 para probar lo deseado. Tenemos que la función de autocorrelación de J está dada por

$$\tau(s) = e^{-\lambda|s|},$$

por lo que,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} D(t) &= \frac{1}{\left[\int_0^\infty g^2(s)\,ds\right]^2}\int_0^\infty\int_0^\infty g^2(s)\,g^2(s')\,\tau\left(|s-s'|\right)dsds' \\
&= \left[\frac{1}{4\gamma^2}\right]^{-1}\frac{1}{2\gamma(2\gamma+\lambda)} = \frac{2\gamma}{2\gamma+\lambda}.
\end{aligned}$$

Entonces, de la ecuación anterior y los lemas 48 y 51, se sigue que

$$\lim_{t\to\infty} \overline{c}_4(u_t - u_0) = \lim_{t\to\infty}\frac{3c_2(J_0)}{c_1(J_0)^2}D(t) = \frac{3c_2(L_1 - L_0)}{2c_1(L_1 - L_0)^2}\frac{\gamma\lambda}{2\gamma+\lambda}.$$

Con esto probamos el primer límite. El segundo límite es una consecuencia inmediata del corolario anterior y del Lema 51. ■

En el teorema anterior, el peso de las colas de la densidad de los incrementos de velocidad aumentará cuando λ también aumente; es decir, el peso de las colas incrementará cuando se tenga un decrecimiento de la correlación de la disipación de energía local. Cualitativamente, el mismo comportamiento se observa en fluidos turbulentos ya que el peso de las colas de la densidad de los incrementos temporales de velocidad aumenta con el número de Reynolds y con el exponente de intermitencia μ_2, definido como $\mathbb{E}(J_0 J_t) \sim t^{\mu_2}$.

3.2.2. La variable de Kolmogorov

Para concluir está sección, analizaremos la variable de Kolmogorov, la cual se define por

$$V_r = \frac{\Delta u(r)}{(r\epsilon_r)^{1/3}},$$

donde $\Delta u(r)$ denota un incremento espacial en la escala r y ϵ_r el proceso de disipación de e- nergía. En particular, mostraremos que dicha variable puede ser respresentada como el producto de dos variables aleatorias independientes.

La definición original de V contiene estadísticas espaciales que no son accesibles en experimentos. Por lo tanto, la verificación experimental de la teoría K62 se ha realizado en términos de análisis temporal. Considerando lo discutido a lo largo de la sección y contextualizando la variable de Kolmogorov en el modelo (3.11), remplazaremos el proceso de disipación de energía ϵ por la variación cudrática $[u]$ y definiremos el análogo estocástico de la variable clásica de Kolmogorov (1962) V como

$$V_t = \frac{u_t - u_0}{\{\overline{u}\,[u]_t\}^{1/3}}.$$

La equivalencia del proceso anterior y la variable V es una consecuencia del la hipótesis del flujo congelado de Taylor. Además, conviene observar que la velocidad media $\overline{u}$ convierte a V_t en un proceso adimensional.

Para estudiar las propiedades estadísticas de V_t, notemos que tal proceso puede expresarse como

$$V_t = \frac{u_t - u_0}{Q(t)^{1/2}} \frac{Q(t)^{1/2}}{\{\overline{u}\,[u]_t\}^{1/3}} = UR_t,$$

donde

$$U = \frac{u_t - u_0}{Q(t)^{1/2}}$$

y

$$R_t = \frac{Q(t)^{1/2}}{\{\overline{u}\,[u]_t\}^{1/3}}.$$

Al calcular las funciones características de U y de R_t, podemos demostrar que U es una variable aleatoria normal estándar independiente de R_t. Luego, la dependencia de V_t con $[u]_t$ queda completamente contenida en el proceso R_t.

De aquí a lo que resta de esta sección, supondremos que la función g tiene la forma

$$g(t) = e^{-\gamma t}.$$

Nuestra intención es estudiar al proceso R_t a tiempo pequeños t. Podemos obtener algo de información del proceso R_t considerando la descomposición de la varianza condicional de los incrementos de velocidad

$$Q(t) = \left[1 - e^{-\gamma t}\right]^2 \int_{-\infty}^{0} e^{2\gamma s} J_s ds + \left[\int_0^t e^{-2\gamma(t-s)} J_s ds - [u]_t\right] + [u]_t\,. \tag{3.18}$$

Enfocándonos en el primer término del lado derecho de la ecuación anterior, obtenemos que al hacer tender $t \to 0$

$$\mathbb{E}\left[\left[1 - e^{-\gamma t}\right]^2 \int_{-\infty}^{0} e^{2\gamma s} J_s ds\right] = c_1(J_0)\,[2\gamma]^{-1}\left[1 - e^{-\gamma t}\right]^2 \sim \frac{c_1(J_0)\,\gamma}{2} t^2.$$

Para el segundo término de (3.18), de la ecuación (3.12) y la fórmula de integración por partes se sigue que

$$\int_0^t e^{-2\gamma(t-s)} J_s ds - [u]_t = -\int_0^t \left[1 - e^{-2\gamma(t-s)}\right] J_s ds,$$

y al hacer tender $t \to 0$ se llega a que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left[1 - e^{-2\gamma(t-s)}\right] J_s ds\right] = c_1(J_0)\left[t - (2\gamma)^{-1}\left(1 - e^{-2\gamma t}\right)\right] \sim 2c_1(J_0)\,\gamma t^2.$$

Ya que el primer término en la igualdad (3.18) es estrictamente positivo y el segundo es estrictamente negativo, podemos concluir que ambos son predominantemente de orden t^2 para t pequeño. Por lo tanto, debido a que la media de $[u]_t$ es lineal en t, se tiene que la variación cuadrática domina en (3.18) para t pequeño y, en consecuencia,

$$V_t \sim U \, [u]_t^{1/6} \,. \tag{3.19}$$

La poca dependencia de V_t con la disipación energética integrada concuerda con el resultado cinemático correspondiente para el campo de velocidad turbulento a escalas más pequeñas que las escalas de disipación.

Bajo ciertas condiciones, también podemos lograr una conclusión para el límite $t \to \infty$. Si suponemos que el proceso de intermitencia J es ergódico, al tomar $t \to \infty$ obtenemos que $[u]_t \sim tc_1 \left(J_0\right)$. Además, como se cumple

$$\mathbb{E}\left[Q\left(t\right)\right] = c_1\left(J_0\right)\gamma^{-1}\left[1 - e^{-\gamma t}\right],$$

también para $t \to \infty$, llegamos a que

$$\mathbb{E}\left[\left|V_t\right|\right] \sim t^{1/3}. \tag{3.20}$$

El comportamiento $\mathbb{E}\left[\left|V_t\right|\right] \propto t^{-0,4}$ ha sido reportado para datos atmosféricos con alto número de Reynolds en [50]. Según Barndorff-Nielsen y Schmiegel [7], en el análisis de Stolovitzky [50, 51] el rango de t donde el exponente 0,4 se sigue es pequeño. El exponente $1/3$ parece ajustar mejor a los datos para t's más grandes.

Es relevante mencionar que tanto el límite para escalas pequeñas (3.19), como el límite para escalas grandes (3.20), están en concordancia con resultados experimentales.

Capítulo 4

Modelación Estocástica del Proceso de Disipación de Energía

El proceso de intermitencia es el ingrediente básico del modelo para la velocidad de un flujo turbulento. Mientras que en el modelo temporal (3.11) J coincide con la disipación de energía ϵ_{time}, en el modelo general (3.1) la disipación de energía se puede expresar como una integral sobre el proceso ponderado J (ver subsección 3.1.1). En algunos casos, usando la información anterior y un modelo para la disipación energética, es posible determinar o estimar la forma de J. De aquí surge, en parte, la necesidad de tener un modelo explícito para la disipación de energía ϵ; aunque tener un modelo para ϵ tiene por sí solo sus ventajas, como lo es estimar la energía perdida en un sistema.

4.1. Generalidades del modelo

Denotemos por $\epsilon_t(\sigma)$ al proceso de disipación de energía de un fluido turbulento al tiempo $t \geq 0$ y la posición $\sigma \in \mathcal{S} = \mathbb{R}$. Modelaremos al proceso de disipación de energía como un proceso Ambit con forma exponencial

$$\epsilon_t(\sigma) = \exp\left\{\int_{C_t(\sigma)} f\left(|t-s|, |\rho-\sigma|\right) L\left(dsd\rho\right)\right\}, \tag{4.1}$$

donde f es una función determinista y L es una base de Lévy homogénea y factorizable. En este caso, tenemos la relación

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{\int_B f(c)\,L(dc)\right\}\right] = \exp\left\{\int_B K\left[f(c)\right]dc\right\}, \qquad B \in R; \tag{4.2}$$

donde K denota la función cumulante de $L(dc)$, definida por

$$\ln \mathbb{E}\left[\exp\left\{\zeta L(dc)\right\}\right] = K\left[\zeta\right]dc.$$

La utilidad de la relación (4.2) es obvia: una vez que se conoce la función K, podemos calcular explícitamente la función de correlación del campo ϵ. Además, para que ϵ siempre tenga n-ésimos momentos finitos, nos restringiremos a bases de Lévy L tales que $K[n] < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (ver (4.3)).

Claramente, (4.1) es un proceso multiplicativo de factores independientes $\exp\left\{f\left(|t-s|, |\rho-\sigma|\right)L(dsd\rho)\right\}$ y bastante más general que los modelos de cascada multiplicativa discretos. La generalidad del modelo (4.1) reside en la posibilidad de elegir idependientemente sus constituyentes; sus grados de libertad disponibles son: la ley infinitamente divisible de la base de Lévy L, la función determinista f y la forma de la familia de conjuntos Ambit C. Como todas estas cantidades se pueden elegir para adaptarse a la finalidad y aplicación en mente, el enfoque de (4.1) permite el modelado sensible y flexible de la estructura de correlación de $\epsilon_t(\sigma)$. Además, a pesar de su generalidad, el modelo es suficientemente tratable para obtener expresiones explícitas para n-correlaciones arbitrarias $\mathbb{E}\left[\epsilon_{t_1}(\sigma_1)\cdots\epsilon_{t_n}(\sigma_n)\right]$.

Proposición 53 *Supongamos que ϵ está dado por (4.1). Se tiene que*

$$\mathbb{E}\left[\epsilon_{t_1}(\sigma_1)\cdots\epsilon_{t_n}(\sigma_n)\right] = \exp\left\{\int_{\mathbb{R}\times S} K\left[\sum_{i=1}^{n} 1_{C_{t_i}(\sigma_i)} f\left(|t_i-s|, |\rho-\sigma_i|\right)\right]dsd\rho\right\} \tag{4.3}$$

Demostración. De (4.2), se sigue

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\epsilon_{t_1}(\sigma_1)\cdots\epsilon_{t_n}(\sigma_n)\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\int_{\mathbb{R}\times S}\left(\sum_{i=1}^{n}1_{C_{t_i}(\sigma_i)}f\left(\left|t_i-s\right|,\left|\rho-\sigma_i\right|\right)\right)L\left(dsd\rho\right)\right\}\right]\\ &= \exp\left\{\int_{\mathbb{R}\times S}K\left[\sum_{i=1}^{n}1_{C_{t_i}(\sigma_i)}f\left(\left|t_i-s\right|,\left|\rho-\sigma_i\right|\right)\right]dsd\rho\right\}.\end{aligned}$$

■

El enfoque de (4.1) también incluye una medida multifractal que se construye sin un argumento límite. Además, dicho modelo permite multifractalidad simultánea en el tiempo y el espacio.

Por el momento, nos enfocaremos en 2-correlacionadores de orden (n_1, n_2), los cuales se definen como

$$c_{n_1,n_2}\left(\sigma_1,t_1;\sigma_2,t_2\right)=\frac{\mathbb{E}\left[\epsilon_{t_1}\left(\sigma_1\right)^{n_1}\epsilon_{t_2}\left(\sigma_2\right)^{n_2}\right]}{\mathbb{E}\left[\epsilon_{t_1}\left(\sigma_1\right)^{n_1}\right]\mathbb{E}\left[\epsilon_{t_2}\left(\sigma_2\right)^{n_2}\right]}.$$

De aquí en adelante pondremos $f\equiv 1$. Tal elección para la función de peso f, se motiva en el hecho de que el 2-correlacionador que se obtiene en una variedad de conjuntos de datos turbulentos muestra la propiedad de auto-escalamiento. Además, la libertad para elegir arbitrariamente el conjunto Ambit C, es suficiente para modelar un amplio rango de 2-correlacionadores de orden $(1, 1)$, los cuales son de interés fundamental en el presente contexto.

De la igualdad (4.3) es directo que

$$c_{n_1,n_2}\left(\sigma_1,t_1;\sigma_2,t_2\right)=\exp\left\{\overline{K}\left[n_1,n_2\right]\int_{C_{t_1}(\sigma_1)\cap C_{t_2}(\sigma_2)}d\sigma dt\right\}, \tag{4.4}$$

siendo $\overline{K}[n_1, n_2] = K[n_1 + n_2] - K[n_1] - K[n_2]$. Conviene tener en cuenta que, debido a la convexidad estricta de la función kumulante, se cumple $\overline{K}[n_1, n_2] > 0$. El punto importante en (4.4) es que el exponente se factoriza como el volumen euclidiano del traslape de dos conjuntos Ambit multiplicado por un factor que sólo depende del orden (n_1, n_2). De esta manera podemos reescribir (4.4) como una relación de auto-escalamiento entre 2-correlacionadores de orden (n_1, n_2) y (m_1, m_2)

$$c_{n_1,n_2}\left(\sigma_1,t_1;\sigma_2,t_2\right)=c_{m_1,m_2}\left(\sigma_1,t_1;\sigma_2,t_2\right)^{k[m_1,m_2;n_1,n_2]}, \tag{4.5}$$

siendo

$$k\left[m_1, m_2; n_1, n_2\right] = \frac{\overline{K}\left[n_1, n_2\right]}{\overline{K}\left[m_1, m_2\right]}.$$

Llamaremos a k exponente de autoescalamiento.

La relación de auto-escala (4.5) implica que los correlacionadores de orden arbitrario (n_1, n_2) son determinados por el correlacionador de orden $(1, 1)$ y los exponentes de auto-escala k. Conviene observar que los exponentes de auto-escala sólo dependen de la base de Lévy L.

4.2. Construcción de un conjunto Ambit vía los 2-correlacionadores

Proporcionaremos, bajo condiciones específicas, un método para calcular la forma explícita del conjunto Ambit en (4.1). Además, aplicaremos dicho método al caso multiescala, el cual surge en numerosos contextos en la teoría de turbulencia.

Para una base de Lévy L dada, es posible determinar directamente, a partir del 2-correlacionador de orden $(1, 1)$, la forma que debe tener el conjunto Ambit para que el modelo exhiba un comportamiento realista. Cabe destacar que los 2-correlacionadores pueden ser medidos experimentalmente y, por esta razón, sirven para ajustar el modelo (4.1).

Con el fin de encontrar un conjunto Ambit realista, supondremos que el conjunto Ambit $C_t(\sigma)$ es de la forma

$$C_t(\sigma) = \{(\rho, s) : t - T < s < t, \rho \in [\sigma - q(s - t + T), \sigma + q(s - t + T)]\}, \tag{4.6}$$

donde la función $q : [0, T] \to \mathbb{R}^+$ es decreciente, diferenciable y con inversa diferenciable. La constante T es un tiempo finito de decorrelación para el proceso de disipación energética, una propiedad físicamente deseable. Además, el que la función q sea no constante, implica la existencia de una longitud de decorrelación γ que depende del tiempo: para dos observaciones separadas por una distancia espacio-temporal (ρ, s), la correlación $\mathbb{E}\left[\epsilon_t(\sigma)\,\epsilon_{t+s}(\sigma + \rho)\right] - c_1(\epsilon)^2$ se anula $\forall \rho \geq \gamma(s) = q(0) + q(s)$. La longitud de decorrelación $\gamma(s)$ decrece monotonámente (con s) y su máximo $\gamma(0) = 2q(0) \equiv \Gamma$ constituye la longitud de decorrelación. Está también es una propiedad físicamente deseable.

En el caso (4.6), es fácil dar condiciones suficientes y necesarias para los 2-correlacionadores de orden $(1,1)$ a fin de ser modelados mediante (4.1). Observemos que, para $l \in [-\Gamma, \Gamma]$, se cumple

$$C_t(\sigma) \cap C_t(\sigma + l) = \left\{ (\rho, s) : 0 < s < g^{-1}(l/2), \rho \in [\sigma + l - q(s - t + T), \sigma + q(s - t + T)] \right\}.$$

Entonces, de (4.4) se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial l} \log c_{1,1}(\sigma, t; \sigma + l, t) &= \overline{K}[1,1] \frac{\partial}{\partial l} \left(2 \int_0^{q^{-1}(l/2)} \left(q(s) - \frac{l}{2} \right) ds \right) \\ &= -\overline{K}[1,1] q^{-1}(l/2) \end{aligned} \tag{4.7}$$

y

$$\frac{\partial^2}{\partial l^2} \log c_{1,1}(\sigma, t; \sigma + l, t) = -\frac{1}{2} \overline{K}[1,1] \frac{\partial}{\partial l} q^{-1}(l/2).$$

Luego, mediante el modelo (4.1) y la frontera decreciente $q(t) > 0$, es posible modelar cualquier 2-correlacionador que sea dos veces diferenciable que cumpla

$$\frac{\partial}{\partial l} \log c_{1,1}(\sigma, t; \sigma + l, t) < 0$$

y

$$\frac{\partial^2}{\partial l^2} \log c_{1,1}(\sigma, t; \sigma + l, t) > 0.$$

La relación (4.7) se ha aplicado (Schmiegel et al (2004)) a datos reales para determinar la forma del conjunto Ambit.

También es posible encontrar expresiones para $c_{1,1}(\sigma, t; \sigma, t + s)$ que sirvan para determinar el conjunto Ambit, el método para deducirlas es similar al anterior.

Ejemplo 54 (Caso multiescala) *En ciertos flujos turbulentos, se ha observado que los* 2*-correlacionadores de orden* $(1,1)$ *del proceso de disipación de energía cumplen*

$$\mathbb{E}[\epsilon_t(\sigma) \epsilon_t(\sigma + l)] = a_\sigma l^{-\tau(2)}, \qquad l \in [\gamma_{scal}, \Gamma_{scal}] \subset [0, \Gamma], \tag{4.8}$$

$$\mathbb{E}[\epsilon_{t+s}(\sigma) \epsilon_t(\sigma)] = a_s s^{-\tau(2)}, \qquad s \in [t_{scal}, T_{scal}] \subset [0, T], \tag{4.9}$$

con $\tau(2) > 0$, a_σ *y* a_s *constantes. En principio, existe la posibilidad de tener potencias distintas en (4.8) y (4.9); en este caso, al determinar el conjunto Ambit asociado a (4.1) con* $f \equiv 1$, *se podrían obtener funciones* q *distintas para cada correlacionador*[1]*. Para tener cierta consistencia en nuestro modelo (4.1) con* $f \equiv 1$, *nos restringiremos al caso dado por (4.8) y (4.9), y, además, pediremos que* $(\gamma_{scal}, \Gamma_{scal}, t_{scal}, T_{scal})$ *cumpla*

$$q(t_{scal}) = \frac{\Gamma_{scal}}{2}, \qquad q(T_{scal}) = \frac{\gamma_{scal}}{2}. \tag{4.10}$$

Con esto logramos que las condiciones de escalamiento (4.8) y (4.9) sean completamente compatibles bajo el supuesto de una función de peso $f \equiv 1$. *Más precisamente, conseguimos que la función* q *que se ecuentra usando* $c_{1,1}(\sigma, t; \sigma + l, t)$, *coincida con la función que se haya con* $c_{1,1}(\sigma, t; \sigma, t + s)$.

Aplicando (4.7), (4.8) y las relaciones (4.10), encontramos que

$$q(s) = \frac{\tau(2)}{2\overline{K}[1,1]} \frac{1}{s}, \qquad s \in [t_{scal}, T_{scal}].$$

En principio, para terminar de precisar q, *es necesario especificar la forma que tiene tal función* q *en los intervalos* $[0, t_{scal}]$ *y* $[T_{scal}, T]$. *Sin embargo, para los objetivos de este escrito no será necesario. Sólo pediremos que, para* $s < t_{scal}$ $\left(\leq q^{-1}(\gamma_{scal}/2)\right)$, $q(s)$ *sea tal que la integral en (4.7) converja; más precisamente, que* $\int_0^{q^{-1}(0)} q(s)\, ds < \infty$. *El punto aquí importante es que la validez de las relaciones de escalamiento (4.8) y (4.9) es independiente de una elección específica de* $q(s)$ *para* $s \notin [t_{scal}, T_{scal}]$.

Este ejemplo resulta importante pues sirve para modelar una gran cantidad de situaciones que surgen en turbulencia y otros contextos. En la siguiente sección, para éste ejemplo específico, estudiaremos la relación con la multifractalidad.

[1] *La función* q *encontrada mediante* $c_{1,1}(\sigma, t; \sigma + l, t)$ *no necesariamente coincide con la función encontrada con* $c_{1,1}(\sigma, t; \sigma, t + s)$.

4.3. Relación con multifractalidad: caso multiescala

Concluiremos nuestra discusión sobre el modelo de la disipación energética estudiando la relación que hay entre la multiescala y la multifractalidad clásica. En el resultado principal de esta sección, demostraremos que el modelo (4.1) con $f \equiv 1$ es un modelo multifractal límite.

Schmiegel demostró en su disertación doctoral [44] que, bajo las relaciones del ejemplo 54, la función de correlación cumple

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\epsilon_t(\sigma_1)^{m_1}\cdots\epsilon_t(\sigma_n)^{m_n}\right] \quad &\propto \quad \left(\prod_{i=1}^{n-1}(\sigma_{i+1}-\sigma_i)^{-\tau(m_i,m_{i+1})}\right) \\ &\times\prod_{j=2}^{n-1}\prod_{k=j+1}^{n}(\sigma_k-\sigma_{k-j})^{-\xi\left(m_{k-j},\ldots,m_k\right)}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

para $\sigma_1 < \ldots < \sigma_n$ ordenados, $(m_1, \ldots, m_n)$ arbitrario, $\sigma_{i+1} - \sigma_i \in [\gamma_{scal}, \Gamma_{scal}]$ y siendo

$$\xi\left(m_{k-j},\ldots,m_k\right)=\tau\left(m_{k-j}+\ldots+m_{k-1},m_k\right)-\tau\left(m_{k-j+1}+\ldots+m_{k-1},m_k\right), \tag{4.12}$$

$$\tau(n_1,n_2)=\frac{\tau(2)}{2\overline{K}[1,1]}\left(K[n_1+n_2]-K[n_1]-K[n_2]\right)$$

Físicamente, la ecuación (4.11) implica que las n-correlaciones se factorizan en contribuciones que surgen desde todas las escalas; empezando por las más pequeñas $\sigma_{i+1} - \sigma_i$, pasando por las escalas medias e incluyendo a las mayores escalas $\sigma_n - \sigma_1$. Schmiegel también probó para el caso temporal

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\epsilon_{t_1}(\sigma)^{m_1}\cdots\epsilon_{t_n}(\sigma)^{m_n}\right] \quad &\propto \quad \left(\prod_{i=1}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)^{-\tau(m_i,m_{i+1})}\right) \\ &\times\prod_{j=2}^{n-1}\prod_{k=j+1}^{n}(t_k-t_{k-j})^{-\xi\left(m_{k-j},\ldots,m_k\right)}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

donde $t_1 < \ldots < t_n$ ordenados, $(m_1, \ldots, m_n)$ arbitrario y $|t_{i+1} - t_j| \in [t_{scal}, T_{scal}]$, $i, j = 1, \ldots, n$. Cabe mencionar que las relaciones (4.11) y (4.13) sólo son válidas para correlaciones puramente espaciales y puramente temporales, respectivamente. El caso general no permite una descripción similar en términos de relaciones de escala. Las relaciones (4.11) y (4.13) resultarán fundamentales al momento de establecer la multifractalidad límite del modelo.

En un sentido clásico, diremos que un proceso $\widehat{\epsilon}(\rho)$ es multifractal si los n-ésimos momentos "de grano grueso"

$$M_n(\rho, l) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{l}\int_{\sigma-l/2}^{\sigma+l/2} \epsilon(\rho')\, d\rho'\right)^n\right],$$

exhiben un comportamiento de escalamiento $M_n(\sigma, l) \propto l^{-\mu(n)}$ para algún exponente no-lineal $\mu(n) > 0$. Observemos que, como $l^{-\mu(n)}$ no depende de ρ, la relación de multifractalidad aplica para procesos estacionarios $\widehat{\epsilon}(\rho)$. Derivando dos veces con respecto a l en dicha relación y considerando la estacionariedad, se obtiene que las correlaciones de dos puntos

$$\mathbb{E}\left[\widehat{\epsilon}(\rho + l)\widehat{\epsilon}(\rho)\right] \propto l^{-\mu(2)},$$

muestran un escalamiento con el mismo exponente $\mu(2)$ de M_2. Si bien el inverso no es necesariamente cierto, la relación de escalamiento anterior indica un fuerte conexión entre el escalamiento de los n-correlacionadores y el escalamiento multifractal de orden n.

Más adelante, probaremos que los momentos de tipo espacial

$$M_n^{(s)}(\sigma, l) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{l}\int_{\sigma-l/2}^{\sigma+l/2} \epsilon_t(\rho)\, d\rho\right)^n\right] \propto l^{-\mu(n)} \tag{4.14}$$

exhiben asintóticamente un comportamiento de escalamiento para $\gamma_{scal} \ll l$. Esto también es cierto en los momentos de tipo temporal

$$M_n^{(t)}(t, l) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{l}\int_{t-l/2}^{t+l/2} \epsilon_{t'}(\sigma)\, dt'\right)^n\right] \propto l^{-\mu(n)}, \tag{4.15}$$

para $t_{scal} \ll l$. En ambos casos, el exponente de escala multifractal estará dado por

$$\mu(n) = \frac{\tau(2)}{\overline{K}[1,1]}\left(K[n] - nK[1]\right).$$

En nuestra prueba de (4.14) y (4.15), el supuesto crucial es la cota

$$\tau(2)\frac{\left(K[n] - K[n-1] - K[1]\right)}{\overline{K}[1,1]} = \mu(n) - \mu(n-1) < 1. \tag{4.16}$$

esta relación es una condición suficiente para tener multifractalidad en el límite de grandes escalas. Con este supuesto aseguramos que las correlaciones de gran escala dominan los momentos "de grano grueso" del campo. El proceso de disipación energética[2] constituye un ejemplo importante de una cantidad (experiementalmente) medible donde la condición (4.16) se cumple; ver [49].

En la última parte de este escrito, nos dedicaremos a demostrar la condición de multifractalidad (4.15) para el modelo multiescala. Aquí solo desarrollaremos el caso espacial; la contraparte temporal es análoga. Antes de pasar a tal prueba, conviene tener en cuenta el siguiente resultado.

Lema 55 *Sea ϵ el campo definido en (4.1) y $M_n^{(s)}(\sigma,l)$ dado por (4.14). Luego,*

$$M_n^{(s)}(\sigma,l) = n!l^{-n}\int_0^l dl_n \int_0^{l_n} dl_{n-1}\cdots\int_0^{l_3} dl_2\,(l-l_n)\,d_n(l_2,\ldots,l_n)\,,\qquad n\geq 2,$$

donde utilizamos la notación $d_n(l_2,\ldots,l_n)=\mathbb{E}\left[\epsilon_s(0)\,\epsilon_s(l_2)\cdots\epsilon_s(l_n)\right]$.

Demostración. Tenemos que, para todo $m\geq 2$,

$$\begin{aligned}
& \int_0^l dl_m \int_0^l dl_{m-1}\cdots\int_0^l dl_1\mathbb{E}\left[\epsilon_s(l_1)\,\epsilon_s(l_2)\cdots\epsilon_s(l_m)\right] \\
= {} & m!\int_{0<l_1<\ldots<l_m<l}\mathbb{E}\left[\epsilon_s(l_1)\,\epsilon_s(l_2)\cdots\epsilon_s(l_m)\right]dl_1\cdots dl_m \\
= {} & m!\int_{0<l_1,\ldots,l_m}^{l_1+\ldots+l_m\leq l}\mathbb{E}\left[\epsilon_s(l_1)\,\epsilon_s(l_1+l_2)\cdots\epsilon_s(l_1+\ldots+l_n)\right]dl_1\cdots dl_n \\
= {} & m!\int_0^l dl_m\int_0^{l-l_m} dl_{m-1}\cdots\int_0^{l-l_m-\ldots-l_2} dl_1\mathbb{E}\left[\epsilon_s(l_1)\,\epsilon_s(l_1+l_2)\cdots\epsilon_s(l_1+l_2+\ldots+l_m)\right]
\end{aligned}\tag{4.17}$$

Luego, de la invarianza traslacional de la correlación y (4.17), se sigue que

$$\begin{aligned}
M_n^{(s)}(\sigma,l) &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{l}\int_{\sigma-l/2}^{\sigma+l/2}\epsilon_s(\rho)\,d\rho\right)^n\right] \\
&= l^{-n}\int_{\sigma-l/2}^{\sigma+l/2}dl_n\int_{\sigma-l/2}^{\sigma+l/2}dl_{n-1}\cdots\int_{\sigma-l/2}^{\sigma+l/2}dl_1\mathbb{E}\left[\epsilon_s(l_1)\,\epsilon_s(l_2)\cdots\epsilon_s(l_n)\right] \\
&= l^{-n}\int_0^l dl_n\int_0^l dl_{n-1}\cdots\int_0^l dl_1\mathbb{E}\left[\epsilon_s(l_1)\,\epsilon_s(l_2)\cdots\epsilon_s(l_n)\right] \\
&= n!l^{-n}\int_0^l dl_n\int_0^{l-l_n}dl_{n-1}\cdots\int_0^{l-l_n-\ldots-l_2}dl_1\mathbb{E}\left[\epsilon_s(l_1)\,\epsilon_s(l_1+l_2)\cdots\epsilon_s(l_1+l_2+\ldots+l_n)\right]
\end{aligned}$$

[2] En la turbulencia completamente desarrollada.

y que

$$
\begin{aligned}
& \int_0^l dl_n \int_0^{l-l_n} dl_{n-1} \cdots \int_0^{l-l_n-\ldots-l_2} dl_1 \mathbb{E}\left[\epsilon_s(l_1)\,\epsilon_s(l_1+l_2)\cdots\epsilon_s(l_1+l_2+\ldots+l_n)\right] \\
= & \int_0^l dl_{n-1} \int_0^{l-l_{n-1}} dl_{n-2} \cdots \int_0^{l-l_{n-1}-\ldots-l_2} dl_1 \int_0^{l-l_{n-1}-\ldots-l_1} dl_n \mathbb{E}\left[\epsilon_s(0)\,\epsilon_s(l_2)\cdots\epsilon_s(l_2+\ldots+l_n)\right] \\
= & \int_0^l dl_{n-1} \cdots \int_0^{l-l_{n-1}-\ldots-l_2} dl_1 \int_{l_{n-1}+\ldots+l_2}^{l-l_1} dl_n \mathbb{E}\left[\epsilon_s(0)\,\epsilon_s(l_2)\cdots\epsilon_s(l_2+\ldots+l_{n-1})\,\epsilon_s(l_n)\right] \\
= & \int_0^l dl_{n-1} \cdots dl_2 \int_{l_{n-1}+\ldots+l_2}^{l} dl_n \int_0^{l-l_n} dl_1 \mathbb{E}\left[\epsilon_s(0)\,\epsilon_s(l_2)\cdots\epsilon_s(l_2+\ldots+l_{n-1})\,\epsilon_s(l_n)\right] \\
= & \int_0^l dl_{n-1} \cdots dl_3 \int_{l_{n-1}+\ldots+l_3}^{l} dl_n \int_0^{l_n-l_{n-1}\ldots-l_3} dl_2\,(l-l_n)\,\mathbb{E}\left[\epsilon_s(0)\,\epsilon_s(l_2)\cdots\epsilon_s(l_2+\ldots+l_{n-1})\,\epsilon_s(l_n)\right] \\
= & \int_0^l dl_n \int_0^{l_n} dl_{n-1} \int_0^{l_n-l_{n-1}} dl_{n-2} \cdots \int_0^{l_n-l_{n-1}-\ldots-l_3} dl_2\,(l-l_n)\,\mathbb{E}\left[\epsilon_s(0)\,\epsilon_s(l_2)\cdots\epsilon_s(l_2+\ldots+l_{n-1})\,\epsilon_s(l_n)\right] \\
= & \int_0^l dl_n \int_{0<l_2,\ldots,l_{n-1}}^{l_2+\ldots+l_{n-1}\le l_n} \mathbb{E}\left[\epsilon_s(0)\,\epsilon_s(l_2)\cdots\epsilon_s(l_2+\ldots+l_{n-1})\,\epsilon_s(l_n)\right] dl_2\cdots dl_{n-1} \\
= & \int_0^l dl_n \int_{0<l_2<\ldots<l_{n-1}<l_n} (l-l_n)\,\mathbb{E}\left[\epsilon_s(0)\,\epsilon_s(l_2)\cdots\epsilon_s(l_{n-1})\,\epsilon_s(l_n)\right] dl_2\cdots dl_n \\
= & \int_0^l dl_n \int_0^{l_n} dl_{n-1} \cdots \int_0^{l_3} dl_2\,(l-l_n)\,d_{n,s}(l_2,\ldots,l_n)\,.
\end{aligned}
$$

Combinando las últimas dos sucesiones de igualdades, llegamos a

$$
M_n^{(s)}(\sigma,l) = n!\,l^{-n} \int_0^l dl_n \int_0^{l_n} dl_{n-1} \cdots \int_0^{l_3} dl_2\,(l-l_n)\,d_n(l_2,\ldots,l_n)\,, \tag{4.18}
$$

que es lo que queríamos probar. ■

Finalmente, demostramos la multifractalidad del modelo (4.1), bajo los supuestos (4.16) y $K[n] < \infty$.

Teorema 56 *Sea ϵ el campo definido en (4.1). Además, supongamos que ϵ cumple las relaciones del ejemplo 54 y que la función cumulante K satisface*

$$
\tau(2)\,\frac{K[n]-K[n-1]-K[1]}{\overline{K}[1,1]} < 1. \tag{4.19}
$$

Entonces, tenemos que ϵ cumple la condición de multifractalidad (4.14)

$$
M_n(\rho,l) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{l}\int_{\sigma-l/2}^{\sigma+l/2} \epsilon_s(\rho')\,d\rho'\right)^n\right] \propto l^{-\mu(n)}
$$

para $t_{scal} \ll s \leq T$ *y* $\gamma_{scal} \ll l \leq \Gamma$.

Demostración. La prueba de la multifractalidad de $M_n^{(s)}(\sigma, l)$ se desarrolla en dos pasos. En la primera parte mostraremos que

$$\widetilde{M}_n^{(s)}(l) \equiv n! l^{-n} \int_{(n-1)\gamma_{scal}}^{l} dl_n \int_{(n-2)\gamma_{scal}}^{l_n-\gamma_{scal}} dl_{n-1} \cdots \int_{\gamma_{scal}}^{l_3-\gamma_{scal}} dl_2 \,(l-l_n)\, d_n(l_2, \ldots, l_n) \propto l^{-\mu(n)}$$

para $\gamma_{scal} \ll l$. En el segundo paso, demostraremos que la aproximación $M_n^{(s)}(\sigma, l) \approx \widetilde{M}_n^{(s)}(l)$ vale para $\gamma_{scal} \ll l$. En este último punto, además proporcionaremos una aproximación burda para el error relativo $\left| M_n^{(s)}(\sigma, l) - \widetilde{M}_n^{(s)}(l) \right| / \widetilde{M}_n^{(s)}(l)$.

Utilizando (4.11), la función de correlación d_n puede reescribirse como

$$d_n(l_2, \ldots, l_n) \propto \prod_{k=2}^{n} \prod_{j=1}^{k-1} (l_k - l_{k-j})^{-\xi_{j+1}} \tag{4.20}$$

donde

$$\xi_{j+1} = \xi \underbrace{(1, \ldots, 1)}_{j \text{ veces}}$$

y $\xi_2 \equiv \tau(1,1)$. Definamos

$$\begin{aligned} & F_n(l, \gamma_{scal}) \\ \equiv \;& l^{-n} \int_{(n-1)\gamma_{scal}}^{l} dl_n \int_{(n-2)\gamma_{scal}}^{l_n-\gamma_{scal}} dl_{n-1} \cdots \int_{\gamma_{scal}}^{l_3-\gamma_{scal}} dl_2 \,(l-l_n) \prod_{k=2}^{n} \prod_{j=1}^{k-1} (l_k - l_{k-j})^{-\xi_{j+1}}. \end{aligned}$$

Notemos que $\widetilde{M}_n^{(s)}(l) \propto F_n(l, \gamma_{scal})$ con una constante de proporcionalidad independiente de l.

Denotando

$$h(k) = -\sum_{j=1}^{k-1} \xi_{j+1}, \tag{4.21}$$

de (4.12) se sigue que

$$\sum_{k=2}^{n} h(k) = -\mu(n),$$

siendo

$$\mu(n) = \tau(2) \frac{K[n] - nK[1]}{\overline{K}[1,1]}.$$

Luego, usando la condición (4.19), se obtiene que

$$h(n) = \mu(n-1) - \mu(n) = -\tau(2)\frac{K[n] - K[n-1] - K[1]}{\overline{K}[1,1]} > -1.$$

Aplicando un cambio de variable[3], es inmediato que

$$\widetilde{M}_n^{(s)}(l)\, l^{\mu(n)} \propto F_n(1, \gamma_{scal}/l) .$$

La función $F_n(1, \gamma_{scal}/l)$ es creciente sobre l y acotada (es fácil probarlo). De (4.20) y (4.21) se sigue que $d_n < \prod_{k=2}^{n} l_k^{h(k)}$; de esto y (4.19), se obtiene

$$F_n(1, \gamma_{scal}/l) < \int_{\gamma_{scal}/l}^{1} dl_n \int_{\gamma_{scal}/l}^{1} dl_{n-1} \cdots \int_{\gamma_{scal}/l}^{1} dl_2 \prod_{k=2}^{n} l_k^{h(k)} \leq \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1+h(k)}. \tag{4.22}$$

La última desigualdad en (4.22) es consecuencia de (4.19). Debido a que $F_n(1, \gamma_{scal}/l)$ es creciente en l y acotada, existe una constante a tal que

$$\lim_{l\to\infty} \widetilde{M}_n^{(s)}(l)\, l^{\mu(n)} = a < \infty$$

y, por lo tanto,

$$\widetilde{M}_n^{(s)}(l) \propto l^{-\mu(n)}$$

en el límte $l \gg \gamma_{scal}$.

Para completar la prueba, daremos una estimación del error relativo entre la relación exacta (4.18) y su aproximación $\widetilde{M}_n^{(s)}(\sigma, l)$. Mediante un argumento de inducción es posible demostrar que

$$\begin{aligned} \left| M_n^{(s)}(\sigma,l) - \widetilde{M}_n^{(s)}(\sigma,l) \right| &\leq n! l^{-n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \gamma_{scal}^k l^{n-k} d_n(0,\ldots,0) \\ &= n! l^{-n} d_n(0,\ldots,0)\left[(\gamma_{scal}+l)^n - l^n\right] \end{aligned}$$

(asumiendo que las integrales sean finitas). Además, observemos que $n > \mu(n)$ (se sigue de la

[3]Para ser exactos, el cambio de variable a considerar es $l_i' = l l_i$, $i = 2, \ldots, n$ en las integrales de F_n.

definición de μ y de (4.19)). Por lo tanto, el error relativo

$$\frac{\left|M_n^{(s)}(\sigma,l)-\widetilde{M}_n^{(s)}(\sigma,l)\right|}{\widetilde{M}_n^{(s)}(\sigma,l)} \leq \text{const.} \times l^{\mu(n)-n}\left[(\gamma_{scal}+l)^n - l^n\right]$$

tiende a cero cuando $l \to \infty$. Esto completa la prueba. ■

Se ha encontrado evidencia experimental de que el proceso de disipación energética tiene un comportamiento multifractal [40]. El resultado anterior muestra que el modelo (4.1) logra capturar este hecho; cabe mencionar que los modelos de cascada multiplicativa también tienen la propiedad de multifractalidad, sin embargo su tratamiento puede resultar bastante más engorroso. Es importante destacar que la naturaleza multifractal de la disipación energética implica una estructura espacial no trivial, la cual queda de manifiesto, por ejemplo, en el comportamiento de los 2-correlacionadores.

Con esto concluimos la modelación estocástica del campo de disipación de energía.

Capítulo 5

Conclusiones

Además de los problemas puramente matemáticos mencionados en las secciones 2.3.1 y 3.1.1, la modelación estocástica Ambit, tanto para el campo de velocidad turbulento como para el proceso de disipación de energía, tiene varias cuestiones abiertas. Aquí mencionaremos algunas de ellas.

Uno de los problemas abiertos más relevantes en la modelación expuesta es la identificación de los parámetros de los modelos con cantidades físicas observables. Si bien en la exposición de (3.1), (3.11) y (4.1) relacionamos algunos elementos de dichos modelos con cantidades físicas, aún quedan algunos parámetros sin interpretación. El tener completamente identificados a los parámetros es importante por varias razones. Por ejemplo, el especificar cantidades observables adecuadas es de gran importancia para el análisis estadístico del proceso de intermitencia J.

Otro problema relevante es la separación de las características no-universales del modelo, i. e. aquellas que reflejan la situación experimental específica, de las propiedades universales que son independientes de los detalles experimentales. El colapso de las densidades de los incrementos de velocidad de escala s como funciones del parámetro $\delta(s)$ de las aproximaciones en la clase de distribuciones NIG, indica que $\delta(s)$ incorpora la mayoría de las características individuales de cada situación experiemental. Luego, la identificación de $\delta(s)$ en el marco de modelación (3.1) puede considerarse el primer paso en la separación de las características no-universales del modelo. Además, la determinación de la dependencia de la función de peso g y del campo de intermintencia J en (3.1) respecto a la función $\delta(s)$, debe permitir modelar la evolución de las densidades de los incrementos de velocidad con más detalle.

En el caso del modelo para el campo de velocidad turbulento (3.1), el análisis de la variable de Kolmogorov podría ser fructífero. De llegar a demostrarse que bajo ciertas condiciones la variable de Kolmogorov asociada al modelo (3.1) exhibe densidades condicionales (con respecto a la disipación de energía integrada) similares a las halladas en datos experimentales, se tendría una validación importante del modelo. Incluso ésta podría ser una forma de calibrar el modelo (3.1). Si bien mediante simulaciones se ha encontrado que la variable de Kolmogorov asociada al modelo (3.11) parece mostrar el comportamiento deseado, la válidación análitica permanece sin respuesta.

También en el caso del modelo (3.1), es posible que la elección de un conjunto Ambit triangular no sea adecuada para todo flujo turbulento. Por ejemplo, en sistemas bajo la influencia de fuerzas externas, la elección de conjuntos Ambit triangulares es cuestionable pues la velocidad con que llega la información a un punto dado del espacio-tiempo sufre perturbaciones. Determinar cuándo el uso de conjuntos triangulares es adecuado puede resultar relevante, al igual que extender la teoría a conjuntos generales. Esto puede ser especialmente importante cuando se determine que propiedades de los procesos Ambit dependen de la forma y el tamaño de los conjuntos Ambit.

En lo que respecta al modelo (4.1), un problema interesante será ver bajo que condiciones, además del caso multiescala, la propiedad de multifractalidad sigue valiendo. De particular interés resultan aquellos modelos donde se reduzcan los grados de libertad impuestos por el conjunto Ambit, la función de peso y la base de Lévy.

En el modelo (4.1) también puede resultar relevante el considerar conjuntos Ambit no triangulares y determinar que propiedades físicas comparten con el modelo triangular.

Finalmente, los procesos Ambit también pueden usarse para modelar fenómenos en fluidos relativistas, es decir, en fluidos cuyas partículas se mueven a velocidades grandes (usualmente cercanas a la de la luz). Una primera exploración que hemos hecho ha mostrado evidencia de que es plausible modelar el movimiento Browniano relativista, vía el momento relativista de la partícula Browniana. Pensamos que

$$P_t = \int_{A_t} f(\rho, s)\, L(d\rho ds), \tag{5.1}$$

siendo P_t el momento relativista de una partícula Browniana, L una base de Lévy, A_t un conjunto Ambit y f una función determinista. La primera condición que debiera cumplirse para que (5.1) sea válida es que la distribución de P_t sea infinitamente divisible. Cuando se considera un baño térmico estacionario, homogéneo e isotrópico que está en equilibrio térmico, se sabe que el momento relativista P de una partícula Browniana debe seguir una distribución de Jüttner

$$h\left(p\right) = \mathcal{Z}_d \exp\left\{-\beta\left(\left\|p\right\|^2 + M^2\right)^{1/2}\right\}, \qquad p \in \mathbb{R}^d,$$

donde $M > 0$ es la masa de la partícula Browniana, β es un término que envuelve a la temperatura y $\mathcal{Z}_d$ es una constante que depende de la dimensión del espacio que se considere. Esta distribución resulta ser un caso particular de una distribución hiperbólica generalizada [1], la cual es una distribución infinitamente divisible. Una posible ventaja del modelo (5.1) es que se consideran fluctuaciones espacio-temporales, lo cuál en al algunos contextos tiene cierta relevancia. Además, sospechamos que la interpretación de los tiempos de paro en la definición de la distribución hiperbólica generalizada en términos de subordinación (de un movimiento Browniano d-dimensional) está relacionada a un marco de referencia inercial comoviendose con la partícula.

En las líneas anteriores sólo presentamos unos pocos detalles a considerar, aunque la lista de cuestiones por explorar incluye varias otras preguntas. Es innegable el potencial de los procesos Ambit para modelar flujos turbulentos y fluidos en general; sin embargo, muchos de sus aspectos necesitan ser desarrollados con más profundidad. Esto permitirá aclarar sus alcances, sus justificaciones y sus predicciones.

Bibliografía

[1] Barndorff-Nielsen, O.E. (1982): The hyperbolic distribution in statistical physics. *Scand J Statist* **9**, 43–46.

[2] Barndorff-Nielsen, O.E. (1998): Processes of normal inverse Gaussian type. *Finance and Stochastics* **2**, 41–68.

[3] Barndorff-Nielsen, O.E. y Schmiegel, J. (2004): Lévy-based tempo-spatial modelling; with applications to turbulence. *Uspekhi Mat. NAUK* **59**, 63–90 / *Russian Math. Surveys* **59**, 65–90.

[4] Barndorff-Nielsen, O.E., Blæsild, P. y Schmiegel, J. (2004): A parsimonious and universal description of turbulent velocity increments. *Eur. Phys. J.* **B 41**, 345–363.

[5] Barndorff-Nielsen, O.E.. (2005): On some concepts of infinite divisibility and their roles in turbulence, finance and quantum statistics. In A. Davison, Y. Dodge and N. Wermuth (Eds.): *Celebrating Statistics. Papers in honour of Sir David Cox on his 80th Birthday.* Oxford University Press. Pp. 233–256.

[6] Barndorff-Nielsen, O.E., Eggers, H.C. y Schmiegel, J. (2005): A class of spatio-temporal and causal stochastic processes with application to multiscaling and multifractality. *South African Journal of Science* **101**, 513–519.

[7] Barndorff-Nielsen, O.E. y Schmiegel, J. (2005): *A stochastic differential equation framework for the turbulent velocity field.* (Thiele Research Reports; 4). Thiele Centre, Institut for Matematiske Fag, Aarhus Universitet.

[8] Barndorff-Nielsen, O.E. y Stelzer, R. (2005): Absolute moments of generalised hyperbolic distributions and approximate scaling of normal inverse Gaussian Lévy-processes. *Scand. J. Statist.* **32**, 617–637.

[9] Barndorff-Nielsen, O.E., Shephard, N. y Schmiegel, J. (2006): Time change and universality in turbulence and finance. Research Report 18/2006. Thiele Centre for Applied Mathematics in Natural Science, Univ. Aarhus.

[10] Barndorff-Nielsen, O.E. y Schmiegel, J. (2007): Ambit processes; with applications to turbulence and tumour growth. In F.E. Benth, Nunno, G.D., Linstrøm, T., Øksendal, B. and Zhang, T. (Eds.): *Stochastic Analysis and Applications: The Abel Symposium 2005.* Heidelberg: Springer. Pp. 93–124.

[11] Barndorff-Nielsen, O.E. y Schmiegel, J. (2008): A stochastic differential equation framework for the timewise dynamics of turbulent velocities. *Theory Prob. Its Appl.* **52**, 372–388.

[12] Barndorff-Nielsen, O.E. y Schmiegel, J. (2008): Time change, volatility and turbulence. In A. Sarychev, A. Shiryaev, M. Guerra and M.d.R. Grossinho (Eds.): Proceedings of the *Workshop on Mathematical Control Theory and Finance* Lisbon 2007. Berlin: Springer. Pp. 29–53.

[13] Barndorff-Nielsen, O.E. y Schmiegel, J. (2009): Brownian semistationary processes and volatility/intermittency. In H. Albrecher, W. Rungaldier and W. Schachermeyer (Eds.): *Advanced Financial Modelling.* Radon Series Comp. Appl. Math. **8**. Pp. 1–26. Berlin: W. de Gruyter.

[14] Barndorff-Nielsen, O.E., Benth, F.E. y Veraart, A. (2010): *Modelling electricity spot prices by Lévy semistationary processes.* (CREATES Research papers; 2010–18). Aarhus: Institut for Økonomi, Aarhus Universitet.

[15] Barndorff-Nielsen, O.E., Benth, F.E. y Veraart, A. (2010): *Modelling electricity forward markets by ambit fields.* (CREATES Research Papers; 2010–41). Aarhus: Institut for Økonomi, Aarhus Universitet.

[16] Barndorff-Nielsen, O.E., Benth, F.E. y Veraart, A. (2011): Ambit processes and stochastic partial differential equations. In DiNunno, G. and Øksendal, B. (Eds.): *Advanced Mathematical Methods for Finance*. Berlin: Springer. Pp. 35–74.

[17] Barndorff-Nielsen, O.E. y Stelzer, R. (2011): Multivariate supOU processes. *Ann. Appl. Prob.* **21**, 140–182.

[18] Basse-O'Connor, A., Graversen, S. E., y Pedersen, J. (2010): Martingale-type processes indexed by the real line. *Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics*. **7**, 117–137.

[19] Benzi, R., Ciliberto, S., Tripiccione, R., Baudet, C., Massaioli, F. y Succi, S. (1993): Extended self-similarity in turbulent flows. *Phys. Rev. E* **48**, R29–R32.

[20] Cairoli, R. y Walsh, J.B. (1975): Stochastic integrals in the plane. *Acta Math.* **134**, 111–183.

[21] Casciola, C.M., Benzi, R., Gualtieri, P., Jacob, B. y Piva, R. (2001): Double scaling and intermittency in shear dominated flows. *Phys. Rev. E* **65**, 015301(R).

[22] Castaing, B., Gagne, Y. y Hopfinger, E.J. (1990): Velocity probability density functions of high Reynolds number turbulence. *Physica D* **46**, 177–200.

[23] Cleve, J. y Greiner, M. (2000): The markovian metamorphosis of a simple turbulent cascade model. *Phys. Lett. A* **273**, 104–108.

[24] Cleve, J., Greiner, M. y Sreenivasan, K.R. (2003): On the effects of surrogacy of energy dissipation in determining the intermittency exponent in fully developed turbulence. *Europhys. Lett.* **61**, 756–761.

[25] Cleve, J., Greiner, M., Pearson, B.R. y Sreenivasan, K.R. (2004): Intermittency exponent of the turbulent energy cascade. *Phys. Rev. E* **69**, 066316.

[26] Darrigol, O. (2005): World of Flow: A History of Hydrodynamics from Bernoullis to Prandt. Oxford Univ. Press, Oxford.

[27] Dunkel, J. y Hänggi, P. (2009): Relativistic Brownian Motion. *Phys. Rep.*, **471**(1):1–73.

[28] Elsner, J.W. y Elsner, W. (1996): On the measurement of turbulence energy dissipation. *Meas. Sci. Technol.* **7**, 1334–1348.

[29] Eberlein, E. y Hammerstein, E. A. v. (2004): Generalized hyperbolic and inverse Gaussian distributions: limiting cases and approximation of processes. In Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications IV, Progress in Probability 58, R.C. Dalang, M. Dozzi, F. Russo (Eds.), Birkhäuser Verlag 221–264.

[30] Frisch, U. (1995): *Turbulence. The legacy of A.N. Kolmogorov.* Cambridge University Press.

[31] Hosokawa, I., Van Atta, C.W. y Thoroddsen, S.T. (1994): Experimental study of the Kolmogorov refined similarity variable. *Fluid Dyn. Res.* **13**, 329–333.

[32] Jouault, B., Lipa, P. y Greiner, M. (1999): Multiplier phenomenology in random multiplicative cascade processes. *Phys. Rev. E* **59**, 2451–2454.

[33] Jouault, B., Greiner, M. y Lipa, P. (2000): Fix-point multiplier distributions in discrete turbulent cascade models. *Physica D* **136**, 125–144.

[34] Klein, R. y Giné, E. (1975): On quadratic variation of processes with Gaussian increments. *Ann. Prob.* **3**, 716–721.

[35] Kolmogorov, A.N. (1941): Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **32**, 16–18.

[36] Kolmogorov, A. N. (1941): On degeneration (decay) of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **31**, 538–540.

[37] Kolmogorov, A.N. (1962): A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number, *J. Fluid Mech* **13**, 82–85.

[38] Márquez, J. U. (2010): Modelos de cálculo estocástico para el modelo Browniano relativista. Tesis de licenciatura, Universidad de Guanajuato. Guanajuato, México.

[39] Márquez, J. U., Pérez-Abreu, V. y Sauri, O. (2012): Notes on stochastic integration with respect to Lévy bases. (En preparación).

[40] Meneveau, C. y Sreenivasan, K.R. (1991): The multifractal nature of turbulent energy dissipation. *J. Fluid Mech* **224**, 429–484.

[41] Monin, A.S. y Yaglom, A.M. (1975): *Statistical Fluid Mechanics,* Vols 1 y 2. Cambridge, MS: MIT Press.

[42] Obukhov, A.M. (1962): Some specific features of atmospheric turbulence. *J. Fluid Mech.* **13**, 77–81.

[43] Rajput, B. y Rosinski, J. (1989): Spectral representations of infinitely divisible processes. *Probab. Th. Rel. Fields* **82**, 451–487.

[44] Schmiegel, J. (2002): Ein dynamischer Prozess für die statische Beschreibung der Energiedissipation in der vollentwickelten Turbulenz. Dissertation TU Dresden, Germany.

[45] Schmiegel, J. (2005): Self-scaling of turbulent energy dissipation correlators. *Phys. Lett. A* **337**, 342–353.

[46] Schmiegel, J. (2006): Self-scaling tumor growth. *Physica A.* **367**, 509–524.

[47] Schmiegel, J., Cleve, J., Eggers, H.C., Pearson, B.R. y Greiner, M. (2004): Stochastic energy-cascade model for (1+1)-dimensional fully developed turbulence. *Phys. Lett. A* **320**, 247–253.

[48] Schmiegel, J., Barndorff-Nielsen, O.E. y Eggers, H.C. (2006): A class of spatiotemporal and causal stochastic processes, with application to multiscaling and multifractality. South African Journal of Science 101, 513–519.

[49] Sreenivasan, K.R. y Antonia, R.A. (1997): The phenomenology of small-scale turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech* **29**, 435–472.

[50] Stolovitzky, G., Kailasnath, P. y Sreenivasan, K.R. (1992): Kolmogorov's refined similarity hypothesis. *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1178–1181.

[51] Stolovitzky, G. y Sreenivasan, K.R. (1994): Kolmogorov's refined similarity hypotheses for turbulence and general stochastic processes. *Rev. Mod. Phys.* **66**, 229–239.

[52] Taylor, G.I. (1938): The spectrum of turbulence. *Proc. R. Soc. Lond. A* **164**, 476–490.

[53] Vincent, A. y Meneguzzi, M. (1991): The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.* 225, 1–25.

[54] Walsh, J.B. (1986): An introduction to stochastic partial differential equations. In *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour* **XIV-1984**. Berlin: Springer. Pp. 265–439.

[55] Wong, E. y Zakai, M. (1974): Martingales and stochastic integrals for processes with a multi-dimensional parameter. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **29**, 109–122.

[56] Zhu, Y., Antonia, R.A. y Hosokawa, I. (1995): Refined similarity hypotheses for turbulent velocity and temperature fields. *Phys. Fluids* **7**, 1637–1648.