UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

MODELOS DE CÁLCULO ESTOCÁSTICO PARA EL MOVIMIENTO BROWNIANO RELATIVISTA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

P R E S E N T A

JOSÉ ULISES MÁRQUEZ URBINA

DIRECTOR DE TESIS

Dr. VÍCTOR MANUEL PÉREZ-ABREU CARRIÓN

GUANAJUATO, GTO. AGOSTO DE 2010

Tesis presentada el día 20 de agosto de 2010.

Sinodales

Dr. Daniel Hernández Hernández

Dr. Alfredo Sandoval Villalbazo

Dr. Víctor Manuel Pérez-Abreu Carrión

A mis padres y mi hermana…

Índice general

Agradecimientos

En estas líneas deseo expresar mi sincero reconocimiento a todos aquellos que, directa o indirectamente, forman parte de este logro.

Comienzo con mis padres, cuyo invaluable apoyo y dirección me llevaron a bien concluir una carrera. ¡Gracias por todo!

Una mención muy especial merece mi asesor, el Dr. Víctor Manuel Pérez-Abreu Carrión, por su tiempo, tolerancia (¡mucha!), entusiasmo y apoyo. También le agradezco el tema de esta tesis, el cual me ha permitido entrar en contacto con temas e ideas que me han conmocionado.

Agradezco a mis sinodales, el Dr. Daniel Hernández Hernández y el Dr. Alfredo Sandoval Villalvazo, por el tiempo que dedicaron a la revisión de esta tesis y por sus valiosos comentarios. También aprecio enormemente la lectura minuciosa y los provechosos comentarios hechos por el Dr. Constantin Tudor.

Me siento afortunado de poder haber escuchado de viva voz los comentarios del Dr. Leopoldo García-Colín Scherer y Tomoi Koide, fueron de gran ayuda para entender las dificultades asociadas al movimiento Browniano relativista.

A todos mis profesores, amigos y compañeros les doy gracias por la convivencia y por haberme compartido sus conocimientos. Aquí quiero reconocer la ayuda que recibí por parte de mi compañero Guillermo Basulto en la elaboración de la portada de este trabajo y en la disolución de algunos problemas con Latex.

Finalmente, agradezco a la Universidad de Guanajuato y al CIMAT por las becas y apoyos que me otorgaron durante mis estudios de licenciatura, pero sobre todo por la eduación que me proporcionaron.

Capítulo 1

Introducción General

En 1905 Albert Einstein (1879-1955) publicó cuatro artículos que, según algunos especialistas, cambiaron para siempre la Física y la forma como percibimos el mundo. Estos trabajos explicaron el efecto fotoeléctrico, establecieron los fundamentos de la teoría especial de la relatividad y justificaron teóricamente el fenómeno del movimiento Browniano clásico (no-relativista). Eliminando los efectos gravitacionales, la relatividad especial ha probado ser el marco correcto para describir procesos físicos en las escalas terrestres. Durante el siglo pasado se hicieron grandes esfuerzos para adaptar las teorías no-relativistas como la termodinámica, la mecánica cuántica o las teorías de campo a los requerimientos de la relatividad especial. Siguiendo esta línea, se ha venido desarrollando lo propio para el movimiento Browniano relativista en el marco de la relatividad especial. La presente tesis analiza los aspectos matemáticos de algunos progresos recientes hechos en este tema y que siguen el enfoque del cálculo estocástico de Itô.

Históricamente, el término 'movimiento Browniano' hace referencia a la dinámica irregular que se observa en algunas partículas (e.g. granos de polen) que se encuentran en un medio líquido. Este fenómeno físico, que ya había sido descrito en 1784 por el médico holandés Jan Ingenhousz (1730-1799), fue observado en detalle por primera vez en 1827 por el botánico inglés Robert Brown (1773-1858). Tuvieron que pasar alrededor de 80 años para que William Sutherland (1859-1911), Albert Einstein y Marian von Smoluchowski (1872-1917) pudieran dar una explicación física teórica de estas observaciones. Ellos propusieron que el movimiento Browniano es causado por interacciones microscópicas cuasi-aleatorias con las partículas que forman el líquido. En 1909 sus teorías fueron confirmadas experimentalmente por Jean Baptiste Perrin (1870-1942), lo cual proporciono evidencia adicional apoyando la estructura atómica de la materia. La teoría física del movimiento Browniano fue elaborada más a fondo durante la primera mitad del siglo XX por los físicos Paul Langevin (1872-1946), Adriaan Fokker (1887-1972), Max Planck (1858-1947), Oskar Klein (1894-1977), George Eugene Uhlenbeck (1900-1988), Leonard Salomon Ornstein (1880-1941) y Hendrik Anthony Kramers (1894-1952).

Desde el punto de vista matemático, el estudio del movimiento Browniano aparece en la tesis doctoral de Bachelier (1870-1946) en 1900, quién propuso este proceso para estudiar la teoría de especulación de la Bolsa de Valores en París. El estudio riguroso del movimiento Browniano fue iniciado en la década de 1920 por Wiener (1894-1964). Igualmente pioneros son los trabajos de Lévy (1886-1971), Kolmogorov (1903-1987), Doob (1910-2004) y Feller (1906-1970), entre otros, quienes contribuyeron a las bases matemáticas de la teoría de procesos estocásticos. Posteriormente, entre 1944 y 1970 Itô (1915-2008), Gihman (1918-1985), Fisk y Stratonovich (1930-1997), introdujeron y caracterizaron diferentes tipos de integrales estocásticas y ecuaciones diferenciales estocásticas. Estos modelos son un herramienta muy útil y eficiente para describir procesos estocásticos que surgen en el mundo real y su estudio atrajo considerable interés en las décadas pasadas; especialmente en el área de finanzas [9, 27, 30] y biología [3, 59]. Cabe destacar que en el año 2006, la Unión Matemática Internacional otorgó a Itô el primer Premio Gauss por Aplicaciones Matemáticas, como reconocimiento a que el cálculo estocástico que él fundó es actualmente una rica, importante y exitosa rama de las matemáticas, con un impacto formidable en la tecnología, los negocios y la vida diaria de la gente.

El tema central de este trabajo de tesis es el estudio de generalización de los modelos del movimiento Browniano basados en ecuaciones diferenciales estocásticas al marco de la teoría especial de la relatividad. En la literatura física, las ecuaciones diferenciales estocásticas a menudo se conocen como ecuaciones de Langevin, sin embargo nosotros dejaremos este nombre para un tipo de ecuaciones específicas: aquellas que modelan la dinámica de una partícula Browniana. Así mismo, reservaremos el término "movimiento Browniano" para el fenómeno físico y utilizaremos "proceso de Wiener" para el caso del movimiento Browniano en el campo de la probabilidad.

Desde una perspectiva matemática, las ecuaciones diferenciales estocásticas determinan modelos precisos y bien definidos de procesos estocásticos. Desde el punto de vista físico, su utilidad para la descripción de un sistema realista es, *a priori*, un tema abierto. La derivación de ecuaciones diferenciales estocásticas a partir de modelos microscópicos atrajo gran interés en las décadas pasadas. Algunos esfuerzos en esta dirección ayudaron a clarificar la aplicabilidad de las ecuaciones diferenciales estocásticas a problemas en física.

Cuando se intenta generalizar los conceptos del movimiento Browniano clásico a la relatividad especial, varios elementos de la termodinámica relativista del equilibrio y la mecánica estadística relativista juegan un papel importante. Más precisamente, algunos principios termoestadísticos gobiernan el comportamiento estacionario de las partículas Brownianas y, así, imponen restricciones en la estructura de la ecuación de Langevin relativista. Los primeros artículos sobre termodinámica relativista fueron publicados en 1907 por Planck y Einstein. Un objetivo principal de sus trabajos fue el identificar las llamadas leyes de transformación de Lorentz de las variables termodinámicas (temperatura, presión, étc.). Estos resultados fueron cuestionados en 1963 por Ott [49], cuyo trabajo inició un intenso debate sobre el comportamiento correcto de la transformación de las cantidades termodinámicas en la relatividad especial. Sin embargo, como clarificaron van Kampen (1921-) [39] y Yuen [61] a finales de la década de los 60, la controversia que rodeaba a la termodinámica relativista puede resolverse al darse cuenta de que las cantidades termodinámicas pueden ser definidas de una manera diferente e igualmente consistente.

Mientras algunos autores consideraron a la termodinámica relativista como un teoría puramente macroscópica, otros trataron de adoptar un planteamiento más fundamental al enfocarse en la mecánica estadística relativista del equilibrio (térmico). Los trabajos pioneros en esta última dirección fueron hechos por los estudiantes de Planck, von Mosengeil (1884-1906) [47] y von Laue (1879-1960) [45], y su colaborador Jüttner (1878-?) [38], quién en 1911 derivó la generalización relativista de la distribución de Maxwell para la velocidad.

El debate recurrente sobre la termoestadística relativista puede rastrearse a la dificultad de tratar interacciones que envuelven muchas partículas de una manera ‘relativistamente’ consistente. En la física no-relativista, las interacciones pueden propagarse a velocidades arbitrariamente grandes, por lo que es posible modelarlas mediante potenciales de interacción instantáneos los cuales entran en la función de Hamilton; a partir de este punto, la mecánica estadística no-relativista surge sin mucha dificultad. Desafortunadamente, la situación se vuelve más complicada en el caso relativista: debido a su propagación acotada, las interacciones relativistas deben ser modeladas por medio de campos que pueden intercambiar energía con las partículas. Estos campos agregan un número infinito de grados de libertad al sistema de partículas. Así, en relatividad especial usualmente es muy complicado, o incluso imposible, desarrollar un formalismo consistente de campo Hamiltoniano libre para las partículas interactuantes.

A pesar de las dificultades que impiden un tratamiento riguroso de los sistemas relativistas de muchas partículas, durante la última mitad del Siglo XX se hicieron progresos considerables en la construcción de una teoría cinética relativista aproximada basada en la ecuación de Boltzmann relativista para las densidades de probabilidad en el espacio fase de una partícula. A partir de tal teoría cinética, solo hay un paso relativamente pequeño en la formulación de una teoría relativista del movimiento Browniano en términos de ecuaciones de Fokker-Planck y ecuaciones de Langevin. Mientras que la ecuación de Boltzmann relativista es una ecuación integro-diferencial no-lineal de la densidad de probabilidad, las ecuaciones de Fokker-Planck son ecuaciones diferenciales parciales lineales y, por lo tanto, pueden ser resueltas o analizadas con mayor facilidad.

Esta tesis se enfoca en procesos estocásticos relativistas que están caracterizados por ecuaciones de evolución lineales para sus respectivas densidad de probabilidad en el espacio fase. La correspondiente teoría fenomenológica del movimiento Browniano relativista experimentó un progreso considerable durante la década pasada, con aplicaciones en varias áreas de la astrofísica [12, 8, 62, 13, 4] y la física de altas energías [55, 35, 60, 36, 52, 1, 2, 63]. Desde una perspectiva general, los procesos estocásticos relativistas proporcionan un enfoque útil cuando se tiene que modelar el comportamiento cuasi-aleatorio de partículas relativistas en un entorno complejo. Por lo tanto, es de esperarse que los conceptos de movimiento Browniano relativista y de difusión jugarán un papel cada vez más importante en investigaciones futuras de, por ejemplo, procesos de relajación y termalización en astrofísica o en los experimentos de colisiones a altas energías.

De acuerdo a nuestro conocimiento, los primero estudios matemáticos detallados sobre procesos de difusión relativistas fueron realizados de manera independiente por Lopuszànski, Rudberg y Schay, entre 1953 y 1961. En las décadas de 1960 y 1970 su trabajo pionero fue complementado por Dudley quien publicó una serie de artículos [14, 15, 16, 17] que buscaban proveer de un enfoque axiomático a los procesos de Markov que fuesen Lorentz invariantes en el espacio fase. De manera independiente, Hakim persiguió el mismo objetivo [31, 32, 33, 34], cuyo análisis ayudo a dilucidar las sutilezas conceptuales de los procesos estocásticos relativistas. Específicamente, Dudley y Hakim probaron la inexistencia de procesos de Markov Lorentz invariantes no triviales en el espacio-tiempo de Minkowski, como había sido sugerido por Lopuszànski. Este resultado fundamental implica que es difícil encontrar generalizaciones relativistas de la ecuación de difusión no-relativista

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho = \mathcal{D}\nabla^2\varrho,$$

donde $\mathcal{D} > 0$ es la constante de difusión y $\varrho\,(t, \mathbf{x}) \geq 0$ es la densidad de probabilidad para las posiciones $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ de la partícula al tiempo t. Con el fin de evitar una confrontación con el resultado de inexistencia de Dudley y Hakim, usualmente se adoptan alguna de las siguientes estrategias:

- Se consideran procesos de difusión no Markovianos $\mathbf{X}\,(t)$ en el espacio-tiempo de Minkowski.

- Se construyen procesos de Markov en el espacio fase, aceptables desde el punto de vista de la relatividad, al considerar no sólo la posición $\mathbf{X}\,(t)$ de la partícula difusiva sino también su momento $\mathbf{P}\,(t)$.

En esta tesis se tratará exclusivamente la segunda estrategia. Algunos ejemplos típicos de procesos de Markov relativistas en el espacio fase son procesos descritos por ecuaciones de Fokker-Planck o por ecuaciones de Langevin. De forma similar a lo que se hace con la ecuación de Boltzmann relativista, las ecuaciones de Fokker-Planck relativistas en el espacio fase pueden utilizarse para describir fenómenos fuera del equilibrio térmico y fenómenos de relajación en sistemas relativistas de muchas partículas. Las ecuaciones de Fokker-Planck pueden derivarse de la ecuaciones de Langevin, como aproximaciones a ecuaciones lineales maestras más generales o al aproximar las integrales de colisión en la ecuación no-lineal de Boltzmann por expresiones diferenciales que contienen los coeficientes de fricción efectiva y de difusión. En particular, este último método fue aplicado exitosamente en diferentes áreas de la física en la décadas pasadas, incluyendo la física de plasmas, la física de altas energías y la astrofísica. En las décadas de 1980 y 1990 este enfoque fue mejorado y se desarrollaron varios métodos numéricos para resolver la ecuación de Fokker-Planck. Aplicaciones recientes incluyen la modelación de procesos de difusión y termalización en plasmas quark-gluón, así como en la descripción de procesos complejos de alta energía en astrofísica, por mencionar algunos.

Un enfoque complementario para el estudio de los procesos estocásticos relativistas en el espacio fase parten de la ecuación de Langevin. Las ecuaciones diferenciales estocásticas del tipo Langevin generan trayectorias muestrales explícitas para el movimiento de una partícula Browniana relativista. Estas ecuaciones de Langevin pueden postularse como modelos fenomenológicos u obtenerse de modelos microscópicos más precisos al imponer una serie de aproximaciones. Comparado con el caso no-relativista, la última tarea se vuelve considerablemente más complicada, debido a las dificultades conceptuales y técnicas ya mencionadas en la formulación de teorías relativistamente consistentes para sistemas de muchas partículas. El enfoque fenomenológico de Langevin del movimiento Browniano relativista fue iniciado por Debbasch, Mallick y Rivet [10], quienes propusieron una generalización relativista simple del proceso de Ornstein-Uhlenbeck, que representa casos límite especiales de una clase mayor de procesos de Langevin relativistas. Desde un punto de vista práctico, las ecuaciones de Langevin relativistas proporcionan una herramienta útil para modelar la dinámica de partículas relativistas en un medio aleatorio, debido a que estas ecuaciones pueden simularse usando técnicas Monte-Carlo que son numéricamente eficientes. Aplicaciones recientes incluyen el análisis de los efectos de la termalización en los plasmas quark-gluón [36, 52] y en la colisión de haces de plasmas ultrarelativistas [13].

Algunos de los trabajos más recientes en la modelación del movimiento Browniano relativista utilizando el enfoque descrito en el párrafo anterior fueron desarrollados por los físicos Jörn Dunkel y Peter Hänggi, en una serie de artículos de los últimos cinco años [18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26]. En particular estos autores consideran una ecuación de Langevin relativista usando integrales estocásticas de Itô, de Stratonovich y Backward-Itô; lo cual simplifica el tratamiento del modelo al tener libertad de usar una de las integrales según el problema específico bajo estudio. Asimismo, estos autores propusieron otro dos modelos específicos del movimiento Browniano relativista: el RBM y el RBM(I). Estos dos ejemplos de procesos estocásticos relativistas, al igual que el proceso de Ornstein-Uhlenbeck relativista, logran exhibir el comportamiento límite no-relativista adecuado. En los artículos de Dunkel y Hänggi también se encuentra las reparametrizaciones de la ecuación de Langevin en términos del tiempo propio y del tiempo de un observador en movimiento; además, se propone un modelo microscópico heurístico para determinar ecuaciones de Langevin "apegadas a la realidad".

El objetivo principal de esta tesis de licenciatura en matemáticas es exponer de manera rigurosa los modelos de cálculo estocástico para el movimiento Browniano relativista estudiados por Dunkel y Hänggi. En particular, se presentan de manera detallada las condiciones y demostraciones precisas de los resultados para los procesos estocásticos relativistas de Langevin expuestos en estos trabajos. La exposición de esta tesis pretende ser autocontenida y teniendo en mente como lector a personas con interés en la matemática, y en especial en la probabilidad y los procesos estocásticos.

La estructura del trabajo de tesis es la siguiente. En el Capítulo 2 se introduce la teoría matemática necesaria para nuestro enfoque al tratamiento de los modelos del movimiento Browniano relativista: el cálculo estocástico. Se presentan las integrales estocásticas de Itô, Stratonovich y Backward con sus correspondientes fórmulas de cambio de variable. Asimismo se presentan resultados clásicos sobre existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô, las relaciones entre la integral de Itô y las otras dos integrales y los teoremas de cambio de tiempo aleatorio. Este capítulo puede considerarse el punto de partida al análisis del caso relativista, además de que ayuda a clarificar algunos de los objetivos del caso general. Se recomienda leer el Apéndice de notación para entender alguna de la simbología que se utiliza en el capítulo.

En el Capítulo 3 se analiza un modelo para el movimiento Browniano no-relativista unidimensional: se establecen las ecuaciones de Langevin y un teorema de fluctuación-disipación, se deducen las ecuaciones de Fokker-Planck no-relativistas, se analiza el modelo del proceso de Ornstein-Uhlenbeck y se describe un modelo microscópico para encontrar coeficientes de ruido y fricción realistas. La teoría de Langevin para movimiento Brownianos relativistas se estudia en el Capítulo 4; en donde se establece la ecuación de Langevin relativista, se encuentran las ecuaciones de Fokker-Planck correspondientes y se presenta un teorema de fluctuación-disipación relativista. Para leer el Capítulo 4 y los siguientes, es altamente recomendable leer primero los apéndices B, C, D y E, ésto con el fin de tener en cuenta las convenciones y la notación que se toma en éste y los próximos apartados. En el Capítulo 5 se proporciona una forma de calcular constantes de difusión asintóticas para algunos modelos de movimiento Browniano y se analizan ejemplos específicos de procesos estocásticos relativistas. El Capítulo 6 trata las reparametrizaciones de Langevin en términos del tiempo propio y del tiempo de un observador en movimiento. La contraparte relativista del modelo microscópico no-relativista expuesto en el Capítulo 3 se trata en el Capítulo 7. Los apéndices contienen información y resultados que son útiles desde el punto de vista matemático y, sobre todo, físico. Aquellas personas sin conocimiento de las teorías físicas involucradas, se les recomienda comenzar la lectura de esta tesis con los Apéndices B, C, D y E.

Capítulo 2

Preliminares de Cálculo Estocástico

El objetivo de este capítulo es presentar la teoría matemática necesaria para trabajar en la modelación del movimiento Browniano relativista. Se presentan las ideas y resultados principales del cálculo estocástico indicando las referencias en donde se pueden ver demostraciones y aspectos más generales.

2.1. Procesos de Wiener

En esta sección se presenta un breve resumen sobre procesos de Wiener, lo suficiente para tratar la integral estocástica con respecto a este proceso. Estos procesos constituyen el ejemplo más simple y mejor estudiado de un proceso de difusión.

Definición 1 *Un proceso estocástico real* $\{W_t,\, t \geq 0\}$ *se llama un proceso de Wiener si*

(i) $W_0 = 0$ *a.s.;*

(ii) $W_t - W_s$ *se distribuye como una variable aleatoria normal* $N(0, t-s)$*, para cualesquiera* $t > s \geq 0$*;*

(iii) para todos $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$*, las variables aleatorias* W_{t_1}, $W_{t_2} - W_{t_1}$,..., $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ *son independientes;*

(iv) W_t *tiene trayectorias continuas a.s.*

A los procesos de Wiener también se les denomina *movimiento Browniano* en el campo de la probabilidad. Para evitar confusiones con el movimiento Browniano físico, el cual trataremos ampliamente en este trabajo, solo nos referiremos a ellos como procesos de Wiener. Cabe mencionar que es común identificar al espacio de parámetros con el tiempo y referirse a la condiciones (ii) y (iii) como incrementos normales independientes.

Los primeros momentos estadísticos del proceso de Wiener son fáciles de calcular.

Lema 2 *Si $\{W_t,\, t \geq 0\}$ es un proceso de Wiener, entonces $\langle W_t \rangle = 0$ y $\langle W_t W_s \rangle = \text{mín}(s,t)$ para $t \geq 0,\ s \geq 0$.*

Ahora extenderemos la definición de proceso de Wiener al caso n-dimensional.

Definición 3 *Un proceso estocástico $\{\mathbf{W}_t = (W_t^1, ..., W_t^n),\ t \geq 0\}$ en $\mathbb{R}^n$ es un proceso de Wiener n-dimensional si, para cada $k = 1, ..., n$, se cumple que*

(i) W^k es un proceso de Wiener (1-dimensional); y

(ii) las σ-álgebras $\mathcal{W}^k := \sigma(W^k(t); t \geq 0)$ son independientes.

Usando los momentos estadísticos del proceso de Wiener unidimensional, es fácil ver lo siguiente.

Lema 4 *Si $\{\mathbf{W}_t,\, t \geq 0\}$ es un proceso de Wiener n-dimensional y δ_{kl} una delta de Kronecker, entonces*

(i) $\left\langle W_t^k W_s^l \right\rangle = \text{mín}(s,t)\delta_{kl}$ para $k, l = 1, ...n,\ t \geq 0,\ s \geq 0$; y

(ii) $\left\langle (W_t^k - W_s^k)(W_t^l - W_s^l) \right\rangle = (t-s)\delta_{kl}$ para $k, l = 1, ..., n$ y $t \geq s \geq 0$.

La dificultad de integrar sobre un proceso de Wiener es una consecuencia del próximo resultado.

Teorema 5 *Sea $\{\mathbf{W}_t,\, t \geq 0\}$ es un proceso de Wiener n-dimensional. Entonces, para casi toda ω, la trayectoria muestral $t \longmapsto \mathbf{W}_t(\omega)$ es de variación infinita en cada subintervalo y no es diferenciable en ningún $t \geq 0$.*

2.2. Cálculo estocástico de Itô

En esta sección se presentan las herramientas necesarias del cálculo estocástico de Itô. En la primera parte se establecen los conceptos de familia y proceso no-anticipante. En la segunda subsección se define la integral de Itô y se establecen algunas de la propiedades más importantes de esta. La tercera subsección trata las diferenciales estocásticas y presenta la fórmula de Itô. En la cuarta parte se define el concepto de ecuación diferencial estocástica (de Itô) y su solución, se presenta un Teorema de existencia y unicidad para las soluciones y se establecen algunos otros resultados relacionados. En la Subsección 5 se presentan las condiciones necesarias para que la solución de una ecuación diferencial estocástica sea un proceso de Markov o un proceso de difusión. En la Subsección 6 se establecen un par de teoremas relacionados con el cambio de tiempo en una integral Itô.

Los resultados de esta sección fueron tomados de las referencias [6, 28, 46, 48, 29, 56]; ahí mismo puede ser consultada la demostración de los resultados. Para profundizar en los temas tratados en esta sección, se recomienda consultar, además de las referencias anteriores, los libros de Protter [51] y Karatzas et al. [42].

2.2.1. Procesos estocásticos no-anticipantes

Los procesos estocásticos no-anticipantes son de gran importancia en la definición de la integral estocástica de Itô. Bajo este concepto quedan asentadas las condiciones de medibilidad que debe cumplir un proceso para poder definir su integral estocástica en el sentido de Itô. Antes de presentar la definición de proceso no-anticipante, es necesario definir lo que se entiende por familia de σ-álgebras no-anticipante.

Definición 6 *Sea $t_0 \geq 0$ un real y $\mathbf{W}_t$ un proceso de Wiener m-dimensional definido sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$. Las siguientes σ-álgebras resultan de interés:*

(i) La σ-álgebra $\mathfrak{W}[t_0, s; \mathbf{W}] := \sigma(W_t; t_0 \leq t \leq s)$ es llamada la historia del proceso de Wiener desde el tiempo t_0 hasta (e incluyendo) el tiempo s.

(ii) La σ-álgebra $\mathfrak{W}^+[t; \mathbf{W}] := \sigma(W_s - W_t; t \leq s < \infty)$ es el futuro del proceso de Wiener desde el tiempo t.

Cuando no haya confusión sobre el proceso de Wiener al que se hace referencia, se utilizará $\mathfrak{W}[t_0,s]$ y $\mathfrak{W}_t^+$, en lugar de $\mathfrak{W}[t_0,s;\mathbf{W}]$ y $\mathfrak{W}^+[t;\mathbf{W}]$, respectivamente.

Definición 7 *Sea $t_0 \geq 0$ un real y $\mathbf{W}_t$ un proceso de Wiener m-dimensional definido sobre el espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{U},\mathbb{P})$. Una familia $(\mathcal{F}_t)_{t_0\leq t<\infty}$ de sub-σ-álgebras de $\mathcal{U}$ es llamada no-anticipante respecto a $\mathbf{W}_t$ si tiene las siguientes tres propiedades:*

(i) $\mathcal{F}_t \supset \mathcal{F}_s$ *para cualesquiera* $t \geq s \geq t_0$*;*

(ii) $\mathcal{F}_t \supset \mathfrak{W}[t_0,t]$ *para todo* $t \geq t_0$*;*

(iii) $\mathcal{F}_t$ *es independiente de* $\mathfrak{W}_t^+$ *para todo* $t \geq t_0$*.*

Es usual solo hablar de familia no-anticipante, sin hacer referencia explícita al proceso de Wiener. En ocasiones, se usará esta convención.

Ahora es posible escribir la definición de proceso no-anticipante, sólo hay que tener en cuenta que $\mathrm{Mat}_{d\times m}(\mathbb{R})$ denota al conjunto de las matrices con coeficientes reales y dimensión $d\times m$.

Definición 8 *Sea $t_0 \geq 0$ un real y $\mathbf{W}_t$ un proceso de Wiener m-dimensional definido sobre el espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{U},\mathbb{P})$. Sea $(\mathcal{F}_t)_{t_0\leq t<\infty}$ una familia de σ-álgebras no-anticipante respecto a $\mathbf{W}_t$. Sea $\mathbf{G}=\mathbf{G}(s,\omega)$ proceso estocástico definido en $[t_0,t]\times\Omega$, que toma valores en $\mathrm{Mat}_{d\times m}(\mathbb{R})$ y medible en (s,ω). Se dice que $\mathbf{G}$ es no-anticipante con respecto a $\mathcal{F}_t$ si $\mathbf{G}(s,\cdot)$ es $\mathcal{F}_s$-medible para todo $s\in[t_0,t]$.*

Cuando es claro sobre que familia se trabaja, se acostumbra hablar de procesos no-anticipantes sin mencionar sobre que familia.

La siguiente proposición establece un propiedad muy útil de los procesos estocásticos no-anticipantes.

Proposición 9 *Sea $t_0 \geq 0$ un real y $(\mathcal{F}_t)_{t_0\leq t<\infty}$ una familia de σ-álgebras no-anticipante. Sea $g:[t_0,t]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ una función medible y $\mathbf{G}$ un proceso estocástico no-anticipante definido en $[t_0,t]\times\Omega$ y que toma valores en $\mathrm{Mat}_{d\times m}(\mathbb{R})$. Entonces $g(t,\mathbf{G}_t)$ es un proceso no-anticipante.*

Para poder definir la integral de Itô de un proceso estocástico, no es suficiente que este sea no-anticipante. También es necesario que el proceso cumpla ciertas condiciones de integrabilidad (no estocástica). En la definición del siguiente conjunto quedan establecidas tales condiciones.

Definición 10 *Sea $t_0 \geq 0$ un real, $(\mathcal{F}_t)_{t_0 \leq t < \infty}$ una familia de σ-álgebras no-anticipante y Ω el espacio muestral donde está definido el proceso de Wiener sobre el cual la familia anterior es no-anticipante. Denotaremos por $M_2^{d,m}[t_0, t; \mathcal{F}]$ al conjunto de procesos estocásticos no-anticipantes $\mathbf{G}$ definidos en $[t_0, t] \times \Omega$ $t > t_0$ y que toman valores en $\mathrm{Mat}_{d\times m}(\mathbb{R})$, los cuales cumplen con probabilidad 1*

$$\int_{t_0}^{t} |\mathbf{G}(s, \omega)|^2 \, ds < \infty;$$

siendo $|\mathbf{G}| := \left(\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{m} \left[G^{ij}\right]^2\right)^{1/2} = \left(\mathrm{tr}\, \mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\right)^{1/2}$ y donde se toma la integral de Lebesgue.

Conviene observar que $\mathbf{G} \in M_2^{d,m}[t_0, t; \mathcal{F}]$ si, y solo si, $G^{ij} \in M_2^{1,1}[t_0, t; \mathcal{F}]$ para cualesquiera i y j. Además, se usará $M_2^{d,m}[t_0, t]$, en lugar de $M_2^{d,m}[t_0, t; \mathcal{F}]$, cuando sea claro sobre cual sobre cual familia de σ-álgebras no-anticipante (o sobre cual proceso de Wiener) se trabaja.

Proposición 11 *Sea $t_0 \geq 0$ un real y $(\mathcal{F}_t)_{t_0 \leq t < \infty}$ una familia de σ-álgebras no-anticipante. Entonces, $M_2^{d,m}[t_0, t]$ es un espacio vectorial.*

2.2.2. Definición de la integral de Itô

En esta subsección se define la integral de Itô. Para lograr este objetivo, se comienza definiendo la integral de Itô para procesos escalonados.

Definición 12 *Sea $t_0 \geq 0$ un real y $(\mathcal{F}_t)_{t_0 \leq t < \infty}$ una familia de σ-álgebras no-anticipante. Un proceso $\mathbf{G} \in M_2^{d,m}[t_0, t]$ se llama proceso escalonado si existe una partición*
$P := \{t_0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = t\}$ tal que

$$\mathbf{G}_s \equiv \mathbf{G}_{t_k} \quad \text{para } \forall s \in [t_k, t_{k+1}], \text{ donde } k = 0, 1, ..., m-1.$$

Definición 13 *Sea $t_0 \geq 0$ un real, $\mathbf{W}_t$ un proceso de Wiener m-dimensional y $(\mathcal{F}_t)_{t_0 \leq t < \infty}$ una familia de σ-álgebras no-anticipante. Sea $\mathbf{G} \in M_2^{d,m}[t_0, t]$ un proceso estocástico como en la definición anterior. La variable aleatoria*

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{G}_s * d\mathbf{W}_s := \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{G}_{t_k} \left(\mathbf{W}(t_{k+1}) - \mathbf{W}(t_k)\right)$$

es la integral de Itô de $\mathbf{G}$ sobre el intervalo $[t_0, t]$ respecto al proceso $\mathbf{W}_t$.

Para definir la integral de Itô de procesos más generales, se aproximan dichos procesos por funciones escalonadas. Los siguientes dos resultados tratan sobre esta aproximación.

Lema 14 *Sea* $t_0 \geq 0$ *un real y* $(\mathcal{F}_t)_{t_0 \leq t < \infty}$ *una familia de* σ*-álgebras no-anticipante. Para cada proceso* $\mathbf{G} \in M_2^{d,m}[t_0, t]$*, existe una sucesión* $\{\mathbf{G}_n\} \subset M_2^{d,m}[t_0, t]$ *de procesos escalonados tal que*

$$\operatorname*{ac-lím}_{n \to \infty} \int_{t_0}^{t} |\mathbf{G}(s) - \mathbf{G}_n(s)|^2 \, ds = 0.$$

Lema 15 *Sea* $t_0 \geq 0$ *un real y* $(\mathcal{F}_t)_{t_0 \leq t < \infty}$ *una familia de* σ*-álgebras no-anticipante. Además, sean* $\mathbf{G} \in M_2^{d,m}[t_0, t]$ *y* $\{\mathbf{G}_n\} \subset M_2^{d,m}[t_0, t]$ *una sucesión de procesos escalonados tal que*

$$\operatorname*{st-lím}_{n \to \infty} \int_{t_0}^{t} |\mathbf{G}(s) - \mathbf{G}_n(s)|^2 \, ds = 0.$$

Entonces, se cumple que

$$\operatorname*{st-lím}_{n \to \infty} \int_{t_0}^{t} \mathbf{G}_n(s) * d\mathbf{W}_s = I(\mathbf{G}),$$

donde $I(\mathbf{G})$ *es una variable aleatoria que no depende de la elección de la sucesión* $\{\mathbf{G}_n\}$.

Del Lema anterior se puede inferir la definición de la integral de Itô para procesos más generales que los escalonados.

Definición 16 *Sea* $t_0 \geq 0$ *un real,* $\mathbf{W}_t$ *un proceso de Wiener m-dimensional y* $(\mathcal{F}_t)_{t_0 \leq t < \infty}$ *una familia de* σ*-álgebras no-anticipante respecto a* $\mathbf{W}_t$*. Para todo proceso* $\mathbf{G} \in M_2^{d,m}[t_0, t]$*, la integral de Itô de* $\mathbf{G}$ *sobre el intervalo* $[t_0, t]$ *con respecto al proceso de Wiener* $\mathbf{W}_t$ *se define como*

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{G}_s * d\mathbf{W}_s = \operatorname*{st-lím}_{n \to \infty} \int_{t_0}^{t} \mathbf{G}_n(s) * d\mathbf{W}_s,$$

donde $\{\mathbf{G}_n\} \subset M_2^{d,m}[t_0, t]$ *es una sucesión de procesos escalonados que aproximan a* $\mathbf{G}$ *en el sentido*

$$\operatorname*{st-lím}_{n \to \infty} \int_{t_0}^{t} |\mathbf{G}(s) - \mathbf{G}_n(s)|^2 \, ds = 0.$$

A continuación se enlistan algunas de las propiedades más importantes que cumple la integral de Itô. La propiedad (v) es de particular importancia pues establece una condición para la existencia de los primeros momentos estadísticos de la integral de Itô.

Teorema 17 *Sea $t_0 \geq 0$ un real, $\mathbf{W}_t$ un proceso de Wiener m-dimensional y $(\mathcal{F}_t)_{t_0 \leq t < \infty}$ una familia de σ-álgebras no-anticipante respecto a $\mathbf{W}_t$. Además, tomemos $\mathbf{G} \in M_2^{d,m}[t_0, t]$ y $\{\mathbf{G}_n\} \subset M_2^{d,m}[t_0, t]$ sucesión. Entonces, la integral de Itô tiene las siguientes propiedades:*

(i) $\int_{t_0}^t (a\mathbf{G}_1(s) + b\mathbf{G}_2(s)) * d\mathbf{W}_s = a\int_{t_0}^t \mathbf{G}_1(s) * d\mathbf{W}_s + b\int_{t_0}^t \mathbf{G}_2(s) * d\mathbf{W}_s$, *para cualesquiera* $a, b \in \mathbb{R}$.

(ii) $\int_{t_0}^t \mathbf{G}_s * d\mathbf{W}_s = \sum_{k=1}^m \begin{pmatrix} \int_{t_0}^t G_s^{1k} * dW_s^k \\ \vdots \\ \int_{t_0}^t G_s^{dk} * dW_s^k \end{pmatrix}$.

(iii) Para $N > 0$ *y* $c > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_{t_0}^t \mathbf{G}_s * d\mathbf{W}_s\right| > c\right) \leq \frac{N}{c^2} + \mathbb{P}\left(\int_{t_0}^t |\mathbf{G}_s|^2 ds > N\right).$$

(iv) La relación

$$\operatorname*{st\,\text{-}\,lím}_{n\to\infty} \int_{t_0}^t |\mathbf{G}(s) - \mathbf{G}_n(s)|^2 ds = 0$$

implica

$$\operatorname*{st\,\text{-}\,lím}_{n\to\infty} \int_{t_0}^t \mathbf{G}_n(s) * d\mathbf{W}_s = \int_{t_0}^t \mathbf{G}_s * d\mathbf{W}_s.$$

(v) Si se cumple

$$\int_{t_0}^t \left\langle |\mathbf{G}_s|^2 \right\rangle ds < \infty,$$

entonces, tenemos que

$$\left\langle \int_{t_0}^t \mathbf{G}_s * d\mathbf{W}_s \right\rangle = 0$$

y

$$\left\langle \left(\int_{t_0}^t \mathbf{G}_s * d\mathbf{W}_s\right)\left(\int_{t_0}^t \mathbf{G}_s * d\mathbf{W}_s\right)^{\mathrm{T}} \right\rangle = \int_{t_0}^t \left\langle \mathbf{G}_s (\mathbf{G}_s)^{\mathrm{T}} \right\rangle ds.$$

La integral de Itô tiene una definición alternativa para procesos estocásticos continuos a.s.; tal definición involucra sumas de Riemann, lo cual coincide con la definición esperada de integral.

Corolario 18 *Sea $t_0 \geq 0$ un real, $\mathbf{W}_t$ un proceso de Wiener m-dimensional y $(\mathcal{F}_t)_{t_0 \leq t < \infty}$ una familia de σ-álgebras no-anticipante respecto a $\mathbf{W}_t$. Sean $t > t_0$ y $\mathbf{G} \in M_2^{d,m}[t_0, t]$ un* *proceso continuo con probabilidad* 1. *Supongamos que* $P^n := \{t_0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_m^n = t\}$ *es una sucesión de particiones de* $[t_0, t]$ *con* $\delta_n = \max\limits_{1\leq k\leq n} (t_k - t_{k-1}) \to 0$ *cuando* $n \to \infty$. *Entonces, se cumple que*

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{G}_s * d\mathbf{W}_s := \operatorname*{st\text{-}lím}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{G}_{t_{k-1}} \left(\mathbf{W}_{t_k} - \mathbf{W}_{t_{k-1}}\right).$$

La integral de Itô esta relacionada con el concepto de martingala, el cual tiene la siguiente definición.

Definición 19 *Sea* $t_0 \geq 0$ *un real,* $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad,* $(\mathcal{U}_t)_{t_0\leq t\leq T}$ *una familia de creciente sub-*σ*-álgebras de* $\mathcal{U}$ *y* $\{\mathbf{X}_t, t_0 \leq t \leq T\}$ *un proceso estocástico definido en* $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ *y que toma valores en* $\mathbb{R}^d$. *Además, supongamos que* $\mathbf{X}_t$ *es* $\mathcal{U}_t$*-medible e integrable para cualquier* $t \in [t_0, T]$. *El par* $(\mathbf{X}_t, \mathcal{U}_t)$ *es una martingala si*

$$\langle \mathbf{X}_t \mid \mathcal{U}_s \rangle = \mathbf{X}_s \quad a.s.$$

para cualesquiera $t_0 \leq s \leq t \leq T$.

Ahora es posible establecer el siguiente resultado, el cual nos proporciona las propiedades de continuidad y medibilidad de la integral de Itô, así como las condiciones bajo las cuales es una martingala.

Teorema 20 *Sea* $t_0 \geq 0$ *un real,* $\mathbf{W}_t$ *un proceso de Wiener m-dimensional y* $(\mathcal{F}_t)_{t_0\leq t<\infty}$ *una familia de* σ*-álgebras no-anticipante respecto a* $\mathbf{W}_t$. *Supongamos que* $\mathbf{G} \in M_2^{d,m}[t_0, T]$ *y que* $\mathbf{X}_t = \int_{t_0}^{t} \mathbf{G}_s * d\mathbf{W}_s$ *para* $t_0 \leq t \leq T$. *Entonces, se cumple lo siguiente:*

(i) $\mathbf{X}_t$ *es* $\mathcal{F}_t$*-medible.*

(ii) Si

$$\int_{t_0}^{t} \left\langle |\mathbf{G}_s|^2 \right\rangle ds < \infty \quad \forall t \leq T, \tag{2.1}$$

entonces $(\mathbf{X}_t, \mathcal{F}_t)$, *para* $t \in [t_0, T]$, *es una martingala; esto es, para* $t_0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\langle \mathbf{X}_t \mid \mathcal{F}_s \rangle = \mathbf{X}_s.$$

Además, para $t, s \in [t_0, T]$ tenemos $\langle \mathbf{X}_t \rangle = 0$ y

$$\left\langle \mathbf{X}_t \left(\mathbf{X}_s\right)^{\mathrm{T}} \right\rangle = \int_{t_0}^{\min(t,s)} \left\langle \mathbf{G}_u \left(\mathbf{G}_u\right)^{\mathrm{T}} \right\rangle du.$$

(iii) $\mathbf{X}_t$ *tiene trayectorias muestrales continuas con probabilidad* 1.

Corolario 21 *Sea $t_0 \geq 0$ un real, $\mathbf{W}_t$ un proceso de Wiener m-dimensional y $(\mathcal{F}_t)_{t_0 \leq t < \infty}$ una familia de σ-álgebras no-anticipante respecto a $\mathbf{W}_t$. Supongamos que $\mathbf{G}, \mathbf{H} \in M_2^{d,m}[t_0, T]$ y que*

$$\int_{t_0}^{t} \left\langle |\mathbf{G}_s|^2 \right\rangle ds < \infty, \qquad \int_{t_0}^{t} \left\langle |\mathbf{H}_s|^2 \right\rangle ds < \infty.$$

Entonces, para $t, s \in [t_0, T]$ se cumple

$$\left\langle \left(\int_{t_0}^{t} \mathbf{G}_u * d\mathbf{W}_u \right) \left(\int_{t_0}^{s} \mathbf{H}_u * d\mathbf{W}_u \right)^{\mathrm{T}} \right\rangle = \int_{t_0}^{\min(t,s)} \left\langle \mathbf{G}_u \left(\mathbf{H}_u\right)^{\mathrm{T}} \right\rangle du.$$

Observación 22 *A pesar de que no se cumpla la condición (2.1), el proceso $\mathbf{X}_t = \int_{t_0}^{t} \mathbf{G}_s * d\mathbf{W}_s$ es una martingala local continua. La propiedad de martingala local es más general que la de martingala y tiene la siguiente definición.*

Definición 23 *Sean $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t < \infty}$ una filtración de $\mathcal{U}$ y $\{\mathbf{X}_t, t \geq 0\}$ un proceso estocástico $\mathcal{F}$-adaptado en $\mathbb{R}^d$. El proceso $\mathbf{X}_t$ es una martingala local si existe una sucesión $\{T_n\}$ de tiempos de paro crecientes con $\lim T_n = \infty$ a.s. y tal que $\mathbf{X}_{\min\{t, T_n\}} 1_{\{T_n > 0\}}$ es una $\mathcal{F}$-martingala para cada n.*

En la definición anterior, una filtración es una familia creciente de sub-σ-álgebras de $\mathcal{U}$, un proceso estocástico $\{\mathbf{X}_t, t \geq 0\}$ es $\mathcal{F}$-adaptado si $\mathbf{X}_t$ es $\mathcal{F}_t$-medible para todo $t \geq 0$ y una variable aleatoria $T : \Omega \to [0, \infty]$ es un tiempo de paro si el evento$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ para cada $t \in [0, \infty)$.

2.2.3. Las diferenciales estocásticas y la fórmula de Itô

Antes de pasar al estudio del las ecuaciones diferenciales estocásticas, es necesario definir el concepto de diferencial estocástica.

Definición 24 *Sea $t_0 \geq 0$ un real, $\mathbf{W}_t$ un proceso de Wiener m-dimensional y $(\mathcal{F}_t)_{t_0 \leq t < \infty}$ una familia de σ-álgebras no-anticipante respecto a $\mathbf{W}_t$. Supongamos que $\{\mathbf{X}_t, t \geq t_0\}$ es un proceso estocástico que satisface*

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}_s ds + \int_{t_0}^{t} \mathbf{G}_s * d\mathbf{W}_s \quad \forall t \in [t_0, T], \quad a.s. \tag{2.2}$$

junto con los siguientes supuestos:

(i) $\mathbf{G} \in M_2^{d,m}[t_0, T]$.

(ii) $\mathbf{X}_{t_0}$ *es una variable aleatoria $\mathcal{F}_{t_0}$-medible. En particular, este es el caso cuando $\mathbf{X}_{t_0}$ es determinística.*

(iii) El proceso $\mathbf{f}$ toma valores en $\mathbb{R}^d$, es medible en (s,t), es no-anticipante (es decir, $\mathbf{f}(t, \cdot)$ es $\mathcal{F}_t$-medible $\forall t \in [t_0, T]$) y cumple con probabilidad 1

$$\int_{t_0}^{T} |\mathbf{f}(s, \omega)| \, ds < \infty,$$

tomando la integral de Lebesgue.

Entonces decimos que el proceso $\mathbf{X}$ tiene la diferencial estocástica

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{f}_t dt + \mathbf{G}_t * d\mathbf{W}_t. \tag{2.3}$$

Observación 25 *Las dos integrales en la ecuación (2.2) son procesos estocásticos continuos, así que el proceso $\mathbf{X}_t$ toma valores en $\mathbb{R}^d$ y, con probabilidad 1, tiene trayectorias muestrales continuas. Además, $\mathbf{X}_t$ es $\mathcal{F}_t$-medible (por tanto, no-anticipante) y se tiene que*

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_s + \int_{s}^{t} \mathbf{f}_u du + \int_{s}^{t} \mathbf{G}_u * d\mathbf{W}_u,$$

para todo s tal que $t_0 \leq s \leq t \leq T$. Debido a esta última propiedad, podemos habla de diferenciables que se cumplen solo en (t_0, T) sin necesidad de establecer la condición inicial $\mathbf{X}_{t_0}$.

Básicamente, las diferenciales estocásticas son una notación más compacta y simple para expresar relaciones de la forma (2.2). Conviene notar que, desglosando expresiones, la diferencial estocástica (2.3) se traduce en el sistema

$$dX_t^i = f_t^i dt + \sum_{j=1}^{m} G_t^{ij} dW_t^j \quad \text{para } i = 1, .., n,$$

siendo $\mathbf{X} = \left(X^1, \ldots, X^d\right)$, $\mathbf{W} = \left(W^1, \ldots, W^d\right)$, $\mathbf{f} = \left(f^1, \ldots, f^d\right)$ y $\mathbf{G} = \left(G^{ij}\right)$.

Para facilitar el tratamiento de las diferenciales estocásticas, cuando se presente una diferencial de la forma (2.3), se asumirá implícitamente que $\mathbf{W}$ es un proceso de Wiener (de alguna dimensión a especificar) y que $\mathbf{f}$ y $\mathbf{G}$ cumplen las propiedades de la definición anterior para alguna familia de σ-álgebras no-anticipante (respecto a $\mathbf{W}$). La dimensión d tiene que especificarse y el valor inicial t_0 coincidirá con el mínimo del intervalo de definición (el cual tiene que ser especificado) del parámetro temporal del proceso $\mathbf{G}$. Supuestos similares aplicarán cuando solo se tenga a la integral $\int_{t_0}^{t} \mathbf{G}_u * d\mathbf{W}_u$.

De ahora en adelante, se toman $0 \leq t_0 \leq T$. A continuación se presenta un resultado fundamental en nuestro tratamiento, el cual es análogo a la regla de la cadena.

Teorema 26 (Fórmula de Itô) *Denotemos por $u = u(t, \mathbf{x})$ a una función continua definida sobre $[t_0, T] \times \mathbb{R}^d$ que toma valores en $\mathbb{R}^k$ y que tiene derivadas parciales continuas*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} u(t, \mathbf{x}) &= u_t(t, \mathbf{x}), \\
\frac{\partial}{\partial x^i} u(t, \mathbf{x}) &= u_{x^i}(t, \mathbf{x}), \\
\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} u(t, \mathbf{x}) &= u_{x^i x^j}(t, \mathbf{x}),
\end{aligned}$$

para $i, j = 1, \ldots, d$. Sea $\{\mathbf{X}_t, t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso estocástico en $\mathbb{R}^d$, el cual esta definido por la diferencial estocástica

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{f}_t dt + \mathbf{G}_t * d\mathbf{W}_t,$$

donde $\mathbf{W}$ es un proceso de Wiener m-dimensional. Entonces, el proceso en $\mathbb{R}^k$ dado por

$$\mathbf{Y}_t := u(t, \mathbf{X}_t) \quad \forall t \in [t_0, T],$$

tiene diferencial estocástica con respecto al mismo proceso de Wiener $\mathbf{W}_t$ *y esta tiene la forma*

$$\begin{aligned} d\mathbf{Y}_t &= \left((u_t(t,\mathbf{X}_t))^{\mathrm{T}} + u_x(t,\mathbf{X}_t)\,\mathbf{f}_t + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} (u_{x^i x^j}(t,\mathbf{X}_t))^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{G}_t(\mathbf{G}_t)^{\mathrm{T}}\right)^{ij} \right) dt \\ &\quad + u_x(t,\mathbf{X}_t)\,\mathbf{G}_t * d\mathbf{W}_t; \end{aligned}$$

donde $(u_{x^i x^j}(t,\mathbf{X}_t))^{\mathrm{T}}$ *y* $(u_t(t,\mathbf{X}_t))^{\mathrm{T}}$ *son vectores columna,* $u_x = (u_{x^1}, ..., u_{x^d})$ *es una matriz de dimensión* $k \times d$ *y* $\left(\mathbf{G}_t(\mathbf{G}_t)^{\mathrm{T}}\right)^{ij}$ *denota la entrada* ij *de la matriz* $\left(\mathbf{G}_t(\mathbf{G}_t)^{\mathrm{T}}\right)$.

La fórmula de Itô tiene expresiones mucho más simples para ciertos valores de m, k y d. Estos corolarios pueden ser consultados en las referencias propuestas.

2.2.4. Ecuaciones diferenciales estocásticas

En esta sección, se exponen algunos resultados de la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô. Comenzaremos con la definición de solución de una ecuación diferencial estocástica, posteriormente trataremos un teorema de existencia y unicidad de las soluciones; y culminaremos con un par de ejemplos.

Consideremos la diferencial estocástica

$$d\mathbf{X}_t = f(t,\mathbf{X}_t)\,dt + G(t,\mathbf{X}_t) * d\mathbf{W}_t, \qquad \mathbf{X}_{t_0} = c, \tag{2.4}$$

válida para $t_0 \leq t \leq T < \infty$; o bien, su forma integral

$$\mathbf{X}_t = c + \int_{t_0}^{t} f(s,\mathbf{X}_s)\,ds + \int_{t_0}^{t} G(s,\mathbf{X}_s) * d\mathbf{W}_s, \tag{2.5}$$

la cual se cumple también para $t_0 \leq t \leq T < \infty$. En las dos ecuaciones anteriores, $\mathbf{X}_t$ es un proceso estocástico (conocido) definido en $[t_0, T]$ y $\mathbf{W}_t$ es un proceso de Wiener m-dimensional. Además, se toman las funciones $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ y $G : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathrm{Mat}_{d\times m}(\mathbb{R})$, las cuales se suponen medibles en $[t_0, T] \times \mathbb{R}^d$ y no son procesos estocásticos (i.e. son independientes de $\omega \in \Omega$).

En las ecuaciones (2.4) y (2.5), el proceso $\mathbf{X}_t$ se supone conocido y que cumple todas las propiedades necesarias para que el lado derecho de la diferencial estocástica (2.4) este perfectamente definido. En particular, $\mathbf{X}_t$ debe ser no-anticipante. Las ecuaciones de la forma (2.4) también se pueden interpretar como la definición de un proceso estocástico desconocido $\mathbf{X}_t$ con valor inicial $\mathbf{X}_{t_0} = c$.

Con respecto a la familia $\mathcal{F}_t$ de σ-álgebras inherente, se toma la siguiente convención.

***Convención* :** Con el propósito de tratar ecuaciones diferenciales estocásticas (de Itô) sobre el intervalo $[t_0, T]$, siempre es suficiente elegir a $\mathcal{F}_t$ como la σ-álgebra más pequeña con respecto a la cual el valor inicial c y las variables aleatorias $\mathbf{W}_s$ $s \leq t$ son medibles. En otras palabras

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(c, \mathbf{W}_s\left(s \leq t\right)\right) \quad \forall t \geq t_0.$$

Cuando no se especifique una familia $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t_0 \leq t < \infty}$ para una diferencial estocástica como (2.4), se supondrá que se toma de esta manera.

Ahora es posible definir lo que es una ecuación diferencial estocástica de Itô y la solución de ella.

Definición 27 *Una ecuación de la forma (2.4) se denomina ecuación diferencial estocástica de Itô. La variable aleatoria c se denomina el valor inicial al tiempo t_0. Un proceso estocástico $\mathbf{X}_t$ es una solución de la ecuación (2.4) sobre el intervalo $[t_0, T]$ si tiene las siguientes propiedades:*

(i) $\mathbf{X}_t$ *es $\mathcal{F}_t$-medible, es decir no-anticipante para $t \in [t_0, T]$.*

(ii) Los procesos $\overline{\mathbf{f}}\left(s, \omega\right) = f\left(s, \mathbf{X}_s\right)$ y $\overline{\mathbf{G}}\left(s, \mathbf{X}_s\left(\omega\right)\right) = G\left(s, \mathbf{X}_s\left(\omega\right)\right)$ satisfacen con probabilidad 1

$$\int_{t_0}^{T} \left|\overline{f}\left(s, \omega\right)\right| ds < \infty, \qquad \int_{t_0}^{T} \left|\overline{G}\left(s, \omega\right)\right|^2 ds < \infty$$

(es decir, $\mathbf{G} \in M_2^{d,m}\left[t_0, T\right]$). Así, el lado derecho de la diferencial estocástica (2.4) tiene sentido.

(iii) La ecuación integral (2.5) se cumple para todo $t \in [t_0, T]$ con probabilidad 1.

Observación 28 *Debido a que $\mathbf{X}_t$ es no-anticipante, los procesos $\overline{\mathbf{f}}\left(s, \omega\right)$ y $\overline{\mathbf{G}}\left(s, \mathbf{X}_s\left(\omega\right)\right)$ son no-anticipantes.*

Conviene observar que la ecuación (2.5) es equivalente a

$$\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_s = + \int_s^t f\left(u, \mathbf{X}_u\right) du + \int_s^t G\left(u, \mathbf{X}_u\right) * d\mathbf{W}_u, \quad \mathbf{X}_{t_0} = c,$$

donde $t_0 \leq s \leq t \leq T$. Además, siempre se considerarán soluciones continuas de las ecuaciones diferenciales estocásticas (de acuerdo a la observación 25 es posible hacerlo) cuando estas tengan solución.

A continuación presentamos un teorema de existencia y unicidad para las soluciones de una ecuación diferencial estocástica.

Teorema 29 (Existencia y unicidad) *Supongamos que tenemos una ecuación diferencial estocástica*

$$d\mathbf{X}_t = f\left(t, \mathbf{X}_t\right) dt + G\left(t, \mathbf{X}_t\right) * d\mathbf{W}_t, \qquad \mathbf{X}_{t_0} = c, \qquad t_0 \leq t \leq T < \infty, \tag{2.6}$$

donde $\mathbf{W}_t$ *es un proceso de Wiener* m*-dimensional y* c *es una variable aleatoria independiente de* $\mathbf{W}_t - \mathbf{W}_{t_0}$ *para* $t \geq t_0$. *Supongamos que las funciones* $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *y* $G : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathrm{Mat}_{d\times m}(\mathbb{R})$ *son medibles en* $[t_0, T] \times \mathbb{R}^d$ *y que tienen las siguientes propiedades: Existe una constante* $K > 0$ *tal que*

(i) (Condición de Lipschitz) para cualesquiera $t \in [t_0, T]$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$,

$$\left|f\left(t, \mathbf{x}\right) - f\left(t, \mathbf{y}\right)\right| + \left|G\left(t, \mathbf{x}\right) - G\left(t, \mathbf{y}\right)\right| \leq K \left|\mathbf{x} - \mathbf{y}\right|.$$

(ii) (Restricción de crecimiento) Para todo $t \in [t_0, T]$ *y* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$,

$$\left|f\left(t, \mathbf{x}\right)\right|^2 + \left|G\left(t, \mathbf{x}\right)\right|^2 \leq K^2 \left(1 + \left|\mathbf{x}\right|^2\right).$$

Entonces, la ecuación (2.4) tiene una única solución $\mathbf{X}_t$ *sobre* $[t_0, T]$ *que satisface la condición inicial* $\mathbf{X}_{t_0} = c$ *y que es continua con probabilidad* 1*; es decir, si* $\mathbf{X}_t$ *y* $\mathbf{Y}_t$ *son soluciones* *continuas de (2.4) con la misma condición inicial c, entonces*

$$\mathbb{P}\left[\sup_{t_0\le t\le T.}|\mathbf{X}_t-\mathbf{Y}_t|>0\right]=0.$$

El teorema anterior establece condiciones que pueden ser difíciles o tediosas de comprobar. Los siguientes dos corolarios establecen condiciones bajo las cuales el resultado del Teorema 29 sigue siendo cierto, pero que son más fáciles de comprobar.

Corolario 30 *El Teorema 29 de existencia y unicidad permanece válido si reemplazamos la condición de Lipschitz con la condición más general:* $\forall N>0$*, existe una constante* K_N *tal que, para cualesquiera* $t\in[t_0,T]$*,* $|\mathbf{y}|\le N$ *y* $|\mathbf{x}|\le N$*,*

$$|f(t,\mathbf{x})-f(t,\mathbf{y})|+|G(t,\mathbf{x})-G(t,\mathbf{y})|\le K_N|\mathbf{x}-\mathbf{y}|. \tag{2.7}$$

Corolario 31 *Para que la condición de Lipschitz en el Teorema 29 de existencia y unicidad (o su generalización (2.7))se cumpla, es suficiente que las funciones* $f(t,\mathbf{x})$ *y* $G(t,\mathbf{x})$ *tengan derivadas parciales* $\frac{\partial}{\partial x^i}f(t,\mathbf{x})$*,* $\frac{\partial}{\partial x^i}G(t,\mathbf{x})$*,* $i=1,...,d$ *continuas para todo* $t\in[t_0,T]$ *y que estén acotadas en* $[t_0,T]\times\mathbb{R}^d$ *(o, en el caso de la generalización, acotadas sobre* $[t_0,T]\times\{|\mathbf{x}|\le N\}$*).*

En el tratamiento del movimiento Browniano físico, resultan de gran importancia las ecuaciones autónomas. Para este tipo de ecuaciones puede establecerse un resultado de existencia y unicidad más simple.

Definición 32 *Consideremos la ecuación diferencial estocástica (2.6). Diremos que es esta ecuación es autónoma si las funciones* $f(t,\mathbf{x})$ *y* $G(t,\mathbf{x})$ *no dependen del tiempo; es decir, si* $f(t,\mathbf{x})\equiv f(\mathbf{x})$ *y* $G(t,\mathbf{x})\equiv G(\mathbf{x})$*.*

Corolario 33 *Consideremos la ecuación diferencial estocástica autónoma*

$$d\mathbf{X}_t=f(\mathbf{X}_t)\,dt+G(\mathbf{X}_t)*d\mathbf{W}_t,\qquad \mathbf{X}_{t_0}=c,$$

donde $\mathbf{W}_t$ *es un proceso de Wiener m-dimensional, c una variable aleatoria independiente de* $\mathbf{W}_t-\mathbf{W}_{t_0}$ *para* $t\ge t_0$ *y se toman funciones* $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ *y* $G:\mathbb{R}^d\to\mathrm{Mat}_{d\times m}(\mathbb{R})$*. Si existe* *una constante $K > 0$ tal que las funciones f y G cumplen la condición de Lipschitz global*

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| + |G(\mathbf{x}) - G(\mathbf{y})| \leq K |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2d}, \tag{2.8}$$

entonces la ecuación diferencial estocástica tiene exactamente una solución global $\mathbf{X}_t$ sobre el intervalo $[t_0, \infty)$ tal que $\mathbf{X}_{t_0} = c$.

2.2.5. Ecuaciones diferenciales estocásticas y los procesos de difusión

En esta sección se presentan las condiciones bajo las cuales la solución de una ecuación diferencial estocástica es un proceso difusión. El material sobre procesos de difusión que se necesita para leer este trabajo se presenta en el Apéndice A de procesos de Markov.

Considérese la ecuación diferencial estocástica

$$d\mathbf{X}_t = f(t, \mathbf{X}_t)\, dt + G(t, \mathbf{X}_t) * d\mathbf{W}_t, \qquad \mathbf{X}_{t_0} = c, \tag{2.9}$$

sobre el intervalo $[t_0, T]$. En esta ecuación, $\mathbf{X}_t$ es un proceso estocástico en $\mathbb{R}^d$, f toma valores en $\mathbb{R}^d$, G toma valores en $\mathrm{Mat}_{d\times d}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{W}_t$ es un proceso de Wiener m-dimensional. El valor inicial c es una variable aleatoria independiente de $\mathbf{W}_t - \mathbf{W}_{t_0}$ para $t \geq t_0$.

También considérese la restricción de la ecuación (2.9) al intervalo $[s, T] \subset [t_0, T]$, la cual puede expresarse como

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{x} + \int_s^t f(u, \mathbf{X}_u)\, du + \int_s^t G(u, \mathbf{X}_u) * d\mathbf{W}_u, \quad t_0 \leq s \leq t \leq T, \tag{2.10}$$

siendo $\mathbf{X}_s = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$.

El siguiente Teorema permite relacionar la solución de una ecuación diferencial estocástica con los procesos de Markov.

Teorema 34 *Si la ecuación (2.9) satisface las condiciones del Teorema de existencia y unicidad 29, la solución $\mathbf{X}_t$ de la ecuación (2.9) es un proceso de Markov sobre el intervalo $[t_0, T]$ cuya distribución de probabilidad inicial al instante t_0 es la distribución de c y cuyas probabilidades* *de transición están dadas por*

$$P(s, \mathbf{x}, t, B) = P(\mathbf{X}_t \in B \mid \mathbf{X}_s = \mathbf{x}) = P[\mathbf{X}_t(s, \mathbf{x}) \in B],$$

donde $\mathbf{X}_t(s, \mathbf{x})$ *es la solución de la ecuación (2.10).*

Dado el Teorema anterior, resulta conveniente tener condiciones para las cuales la solución de una ecuación diferencial estocástica es un proceso de Markov homogéneo.

Teorema 35 *Supongamos que las condiciones del Teorema de existencia y unicidad 29 se satisfacen por la ecuación (2.9). También supongamos que los coeficientes* $f(t, \mathbf{x}) \equiv f(\mathbf{x})$ *y* $G(t, \mathbf{x}) \equiv G(\mathbf{x})$ *son independientes del tiempo* t *sobre el intervalo* $[t_0, T]$*. Entonces, la solución* $\mathbf{X}_t$ *de la ecuación (2.9) es un proceso de Markov homogéneo con probabilidades de transición (estacionarias)*

$$P(\mathbf{X}_t \in B \mid \mathbf{X}_{t_0} = \mathbf{x}) = P(t - t_0, \mathbf{x}, B) = P[\mathbf{X}_t(t_0, \mathbf{x}) \in B],$$

donde $\mathbf{X}_t(t_0, \mathbf{x})$ *es la solución de la ecuación (2.9) con valor inicial* $\mathbf{x} = c = \mathbf{X}_{t_0}$*. En particular, la solución de una ecuación autónoma*

$$d\mathbf{X}_t = f(\mathbf{X}_t)\,dt + G(\mathbf{X}_t) * d\mathbf{W}_t, \quad t \geq t_0,$$

es un proceso de Markov homogéneo definido para todo $t \geq t_0$*.*

Observación 36 *Cuándo es la solución* $\mathbf{X}_t$ *de la ecuación (2.9) un proceso de Markov estacionario? De acuerdo la observación (105),* $\mathbf{X}_t$ *tiene que ser homogéneo, lo cual sucede en el caso de una ecuación autónoma. Para la existencia de una distribución estacionaria* P*, es decir una distribución con la propiedad*

$$P(B) = \int_{\mathbb{R}^d} P(t, \mathbf{x}, B)\,dP(\mathbf{x}), \quad B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right), \ t \geq 0,$$

existen algunas condiciones analíticas [véase, [50] págs 272, 273]. En muchos casos, la densidad $p(\mathbf{x})$ *de la distribución estacionaria puede obtenerse de la forma estacionaria de la ecuación*

(A.1)

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(f^i(\mathbf{x})\, p(\mathbf{x})\right) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j}\left(\left(G(\mathbf{x})\,[G(\mathbf{x})]^{\mathrm{T}}\right)^{ij} p(\mathbf{x})\right) = 0.$$

El siguiente teorema proporciona condiciones para que la solución de una ecuación diferencial estocástica sea un proceso de difusión.

Teorema 37 *Supongamos que las condiciones del Teorema 29 de existencia y unicidad se satisfacen para la ecuación diferencial estocástica*

$$d\mathbf{X}_t = f(t, \mathbf{X}_t)\, dt + G(t, \mathbf{X}_t) * d\mathbf{W}_t, \qquad \mathbf{X}_{t_0} = c, \qquad t_0 \le t \le T,$$

donde $\mathbf{X}_t$ *y* $f(t, \mathbf{x})$ *toman valores en* $\mathbb{R}^d$, $G(t, \mathbf{x})$ *toma valores en* $\mathrm{Mat}_{d\times m}(\mathbb{R})$ *y* $\mathbf{W}_t$ *es un proceso de Wiener m-dimensional. Además, supongamos que las funciones* f *y* G *son continuas con respecto a* t*. Entonces, la solución* $\mathbf{X}_t$ *es un proceso de difusión d-dimensional sobre* $[t_0, T]$ *con vector de deriva* $f(t, \mathbf{x})$ *y matriz de difusión* $B(t, \mathbf{x}) = [G(t, \mathbf{x})]\,[G(t, \mathbf{x})]^{\mathrm{T}}$*; y las relaciones límite de la definición 106 se cumplen uniformemente en* $s \in [t_0, T)$*. En particular, la solución de una ecuación diferencial estocástica autónoma siempre es un proceso de difusión homogéneo sobre* $[t_0, \infty)$*.*

2.2.6. Cambio de tiempo aleatorio

En esta sección se establecen un par de resultados relacionados con el cambio del parámetro temporal en integrales estocásticas de Itô. El primero de estos resultados da algunas condiciones necesarias para que un cambio de tiempo sea válido.

Teorema 38 *Sea* $\{W_t, t \ge 0\}$ *un proceso de Wiener unidimensional y* $\{G_t, t \ge 0\}$ *un proceso estocástico real no-anticipante tal que* $\mathbb{P}\left[\int_0^t G_s^2 ds < \infty \forall t \ge 0\right] = 1$*. Además, pongamos* $\mathrm{t}(t) := \int_0^t G_s^2 ds \ \forall t \ge 0$ *y tomemos a* t^{-1} *como la inversa por la derecha de* t*, es decir,* $\mathrm{t}^{-1}(t) = \min(s : \mathrm{t}(s) = t) \ \forall t < \mathrm{t}(\infty)$*. Entonces,* $\widehat{W_t} := \int_0^{\mathrm{t}^{-1}(t)} G_s * dW_s$ *es un proceso de Wiener unidimensional para todo* $t < \mathrm{t}(\infty)$*.*

Observación 39 *Conviene tener en cuenta lo siguiente:*

(i) La función t^{-1} *es continua por la izquierda;*

(ii) Si tomamos $x(t) := \int_0^t G_s ds$, la función t *se conoce como el tiempo intrínseco de x.*

El siguiente Teorema nos proporciona una relación explícita entre una integral estocástica y sus cambios de tiempo.

Teorema 40 *Sea $\{W_t, t \geq 0\}$ un proceso de Wiener unidimensional. Sean $\{G_t, t \geq 0\}$ y $\{F_t, t \geq 0\}$ procesos estocásticos reales continuos a.s. y no-anticipantes, tales que $0 < F < \infty$ y*

$$\mathbb{P}\left[\int_0^t G_s^2 ds + \int_0^t F_s^{-2} ds < \infty, \forall t \geq 0\right] = 1.$$

Definimos $\mathrm{t}(t) := \int_0^t F_s^{-2} ds$ y $x(t) := \int_0^t G_s * dW_s$. Entonces, se cumple que

$$x\left(\mathrm{t}^{-1}(t)\right) = \int_0^t G_{\mathrm{t}^{-1}(s)} F_{\mathrm{t}^{-1}(s)} * d\widehat{W}_s \quad \forall t < \mathrm{t}(\infty),$$

o en términos de diferenciales

$$dx\left(\mathrm{t}^{-1}(t)\right) = G_{\mathrm{t}^{-1}(t)} F_{\mathrm{t}^{-1}(t)} * d\widehat{W}_t = G_{\mathrm{t}^{-1}(t)} \left[\frac{d}{dt}\mathrm{t}^{-1}(t)\right]^{1/2} * d\widehat{W}_t, \quad \forall t \in [0, \mathrm{t}(\infty)),$$

donde $\widehat{W}_t$ es un proceso de Wiener dado por $\widehat{W}_t := \int_0^{\mathrm{t}^{-1}(t)} F_s^{-1} dW_s$.

Además, se establecen un par de resultados que se utilizan en el Capítulo 6 para demostrar un cambio de tiempo similar al del Teorema 38 para procesos de Wiener d-dimensionales. Antes debemos establecer la definición de proceso de covariación cuadrática.

Definición 41 *Sean $\{X_t, t \geq 0\}$ y $\{Y_t, t \geq 0\}$ dos procesos estocástico en $\mathbb{R}$. El proceso de covariación cuadrática $[X, Y]_t$ de $X_t \equiv X(t)$ y $Y_t \equiv Y(t)$ se define como el límite*

$$[X, Y]_t = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{2^n - 1} \left[X\left(\frac{(k+1)t}{2^n}\right) - X\left(\frac{kt}{2^n}\right)\right]\left[Y\left(\frac{(k+1)t}{2^n}\right) - Y\left(\frac{kt}{2^n}\right)\right].$$

En el caso de un proceso de Wiener d-dimensional $\mathbf{W} = \left(W^1, \ldots, W^d\right)$, la covariación cuadrática $\left[W^i, W^j\right]$ puede expresarse como

$$\left[W^i, W^j\right]_t = \begin{cases} t & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Ahora estamos en posibilidades de establecer dos teoremas muy importantes. El primero de ellos proporciona una expresión para la covariación cuadrática de las integrales unidimensionales de Itô y el segundo es una caracterización de los procesos de Wiener.

Teorema 42 *Sea $\mathbf{W}_t$ un proceso de Wiener m-dimensional, c una variable aleatoria independiente de $\mathbf{W}_t - \mathbf{W}_0$ para $t \geq 0$ y $\mathcal{F}_t = \sigma(c, \mathbf{W}_s(s \leq t))$. Además, sea $\{H_t, t \geq 0\}$ un proceso estocástico continuo con probabilidad 1 tal que es $H \in M_2^{d,m}[0,T;\mathcal{F}]$ $\forall T > 0$. Entonces, si $Y_t^j = \int_0^t H_s * dW_s^j$, se cumple que*

$$\left[Y^i, Y^j\right]_t = \int_0^t H_s^2 d\left[W^i, W^j\right]_s \quad \forall t \geq 0.$$

Teorema 43 (Lévy) *Sea $\mathbf{X} = \left(X^1, \ldots, X^d\right)$ una martingala local continua tal que*

$$\left[X^i, X^j\right]_t = \begin{cases} t, & si\ i = j, \\ 0, & si\ i \neq j. \end{cases}$$

Entonces $\mathbf{X}$ es un movimiento Browniano n-dimensional.

2.3. La integral de Stratonovich

En esta sección se define la integral de Stratonovich-Fisk y se establecen relaciones con la integral de Itô. Para mayor información se recomienda consultar [51, 53].

Definición 44 *Sea $\mathbf{W}_t$ un proceso de Wiener m-dimensional y $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t < \infty}$ una familia de σ-álgebras no-anticipante respecto a $\mathbf{W}_t$. Sea $\mathbf{G} \in M_2^{d,m}[0,T]$ un proceso continuo a.s. Supongamos que $P^n := \{0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_m^n = T\}$ es una sucesión de particiones de $[0,T]$ con $\delta_n = \max\limits_{1 \leq k \leq n}(t_k - t_{k-1}) \to 0$ cuando $n \to \infty$. La integral de Stratonovich del proceso $\mathbf{G}_t$ sobre el proceso de Wiener $\mathbf{W}_t$ en el intervalo $[0,T]$ es*

$$\int_0^T \mathbf{G}_t \circ d\mathbf{W}_t := \operatorname*{st-lím}_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\mathbf{G}_{t_k} + \mathbf{G}_{t_{k-1}}}{2}\right)\left(\mathbf{W}_{t_k} - \mathbf{W}_{t_{k-1}}\right).$$

En la definición anterior se toma como límite inferior a 0, sin embargo es posible extender la definición de la integral de Stratonovich para límites inferiores no-negativos. Conviene observar que, mientras en la integral de Itô se usa $\mathbf{G}_{t_k}$ en las sumas de Riemann, en la integral de Stratonovich estas sumas utilizan el promedio $\frac{\mathbf{G}_{t_k}+\mathbf{G}_{t_{k-1}}}{2}$. Esta "ligera" diferencia produce procesos estocásticos no equivalentes con propiedades distintas.

Definiremos la diferenciales de estocásticas de Stratonovich de manera análoga al caso de Itô.

Definición 45 *Sea $\mathbf{W}_t$ un proceso de Wiener m-dimensional y $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t<\infty}$ una familia de σ-álgebras no-anticipante respecto a $\mathbf{W}_t$. Supongamos que $\{\mathbf{X}_t, t\geq 0\}$ es un proceso estocástico que satisface con probabilidad* 1

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_0 + \int_0^t \mathbf{f}_s ds + \int_0^t \mathbf{G}_s \circ d\mathbf{W}_s$$

junto con los siguientes supuestos:

(i) $\mathbf{G} \in M_2^{d,m}[0,T]$.

(ii) $\mathbf{X}_0$ *es una variable aleatoria $\mathcal{F}_0$-medible.*

(iii) El proceso $\mathbf{f}$ toma valores en $\mathbb{R}^d$, es medible en (s,t), es no-anticipante (es decir, $\mathbf{f}(t,\cdot)$ es $\mathcal{F}_t$-medible $\forall t\in[0,T]$) y cumple con probabilidad 1

$$\int_0^T |\mathbf{f}(s,\omega)|\, ds < \infty,$$

tomando la integral de Lebesgue.

Entonces decimos que el proceso $\mathbf{X}$ tiene la diferencial estocástica

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{f}_t dt + \mathbf{G}_t \circ d\mathbf{W}_t.$$

El siguiente resultado es un muy útil pues permite cambiar de la integral de Stratonovich a la integral de Itô.

Teorema 46 *Sea $\mathbf{W}_t$ un proceso de Wiener m-dimensional y $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t<\infty}$ una familia de σ-álgebras no-anticipante respecto a $\mathbf{W}_t$. Sean $f:[0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ y $G:[0,T]\times\mathbb{R}^d\to \mathrm{Mat}_{d\times m}(\mathbb{R})$*

funciones medibles en $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ *con* G *de clase* C^1*. Supongamos que* $\{\mathbf{X}_t, t\geq 0\}$ *es un proceso estocástico que satisface*

$$d\mathbf{X}_t = f\left(t,\mathbf{X}_t\right)dt + G\left(t,\mathbf{X}_t\right)\circ d\mathbf{W}_t, \qquad \mathbf{X}_{t_0}=c,$$

para $0\leq t\leq T<\infty$*. Entonces,* $\mathbf{X}_t$ *satisface la diferencial de Itô*

$$d\mathbf{X}_t = \left[f\left(t,\mathbf{X}_t\right)+g\left(t,\mathbf{x}\right)\right]dt + G\left(t,\mathbf{X}_t\right)* d\mathbf{W}_t, \qquad \mathbf{X}_{t_0}=c,$$

donde

$$g^i\left(t,\mathbf{x}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial G^{ik}}{\partial x^j}\left(t,\mathbf{x}\right)G^{jk}\left(t,\mathbf{x}\right) \quad i=1,...,d.$$

Un resultado fundamental para el tratamiento del movimiento Browniano relativista se establece a continuación. Establece la regla de cambio de variable de la diferencial de Stratonovich.

Teorema 47 *Sea* $u:[0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^k$ *una función de clase* C^2*. Además, supongamos que se cumple*

$$d\mathbf{X}_t=\mathbf{f}_t dt+\mathbf{G}_t\circ d\mathbf{W}_t,$$

con $\mathbf{W}_t$ *un proceso de Wiener m-dimensional. Si definimos*

$$\mathbf{Y}_t := u\left(\mathbf{X}_t,t\right),$$

entonces se cumple que

$$d\mathbf{Y}_t=\left(u_t\left(t,\mathbf{X}_t\right)\right)+u_x\left(t,\mathbf{X}_t\right)\mathbf{f}_t dt+u_x\left(t,\mathbf{X}_t\right)\mathbf{G}_t\circ d\mathbf{W}_t,$$

donde $u_x=\left(u_{x^1},...,u_{x^d}\right)$ *es una matriz de dimensión* $k\times d$*.*

Vale la pena notar que las reglas del cálculo diferencial ordinario se conservan con la integral de Stratonovich.

2.4. La integral Backward-Itô

En esta sección se define la integral Backward-Itô y se establecen relaciones con la integral de Itô. Para mayor información sobre este tipo de integral y sus respectivas ecuaciones diferenciales, se recomienda consultar la referencia [43].

Definición 48 *Sea $\mathbf{W}_t$ un proceso de Wiener m-dimensional y $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t<\infty}$ una familia de σ-álgebras no-anticipante respecto a $\mathbf{W}_t$. Sea $\mathbf{G} \in M_2^{d,m}[0,T]$ un proceso continuo a.s. Supongamos que $P^n := \{0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_m^n = T\}$ es una sucesión de particiones de $[0,T]$ con $\delta_n = \max\limits_{1\leq k\leq n}(t_k - t_{k-1}) \to 0$ cuando $n \to \infty$. La integral backward del proceso $\mathbf{G}_t$ sobre el proceso de Wiener $\mathbf{W}_t$ en el intervalo $[0,T]$ es*

$$\int_0^T \mathbf{G}_t \bullet d\mathbf{W}_t := \operatorname{st-lím}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{G}_{t_k}\left(\mathbf{W}_{t_k} - \mathbf{W}_{t_{k-1}}\right).$$

Conviene observar que en la integral backward las sumas de Riemann se evalúan en los extremos superiores t_{k+1}^n de los intervalos $\left[t_k^n, {}_{k+1}^n\right]$; mientras que en la integral de Itô las sumas de Riemann se evalúan en los extremos inferiores t_k^n. Al igual que en el caso de Stratonovich, esta diferencia produce procesos estocásticos no equivalentes con propiedades distintas. Además, esta integral no produce procesos que sean martingala de un proceso de Markov.

La definición general de integral Backward puede hacerse a pesar de que el proceso $\mathbf{G}_t$ no sea no-anticipante. Sin embargo, en esta tesis, solo nos importa el caso no-anticipante, ya que nos interesa su relación con la integral de Itô.

Las diferenciales estocásticas backward se definen de manera similar al caso de Itô.

Definición 49 *Sea $\mathbf{W}_t$ un proceso de Wiener m-dimensional y $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t<\infty}$ una familia de σ-álgebras no-anticipante respecto a $\mathbf{W}_t$. Supongamos que $\{\mathbf{X}_t, t \geq 0\}$ es un proceso estocástico que satisface con probabilidad* 1

$$\mathbf{X}_T = \mathbf{X}_0 + \int_0^T \mathbf{f}_s ds + \int_0^T \mathbf{G}_s \bullet d\mathbf{W}_s$$

junto con los siguientes supuestos:

(i) $\mathbf{G} \in M_2^{d,m}[0,T]$.

(ii) $\mathbf{X}_0$ *es una variable aleatoria* $\mathcal{F}_0$*-medible.*

(iii) El proceso $\mathbf{f}$ *toma valores en* $\mathbb{R}^d$*, es medible en* (s,t)*, es no-anticipante (es decir,* $\mathbf{f}(t,\cdot)$ *es* $\mathcal{F}_t$*-medible* $\forall t \in [0,T]$*) y cumple con probabilidad* 1

$$\int_0^T |\mathbf{f}(s,\omega)|\, ds < \infty,$$

tomando la integral de Lebesgue.

Entonces decimos que el proceso $\mathbf{X}$ *tiene la diferencial estocástica*

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{f}_t dt + \mathbf{G}_t \bullet d\mathbf{W}_t.$$

Bajo las condiciones con las que se definió la integral backward, se tiene una relación entre la integral backward y la integral de Itô.

Teorema 50 *Sea* $\mathbf{W}_t$ *un proceso de Wiener m-dimensional y* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t<\infty}$ *una familia de* σ*-álgebras no-anticipante respecto a* $\mathbf{W}_t$*. Sean* $f : [0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *y* $G : [0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathrm{Mat}_{d\times m}(\mathbb{R})$ *funciones medibles en* $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ *con* G *de clase* C^1*. Supongamos que* $\{\mathbf{X}_t, t \geq 0\}$ *es un proceso estocástico que satisface*

$$d\mathbf{X}_t = f(t,\mathbf{X}_t)\, dt + G(t,\mathbf{X}_t) \bullet d\mathbf{W}_t, \qquad \mathbf{X}_{t_0} = c,$$

para $0 \leq t \leq T < \infty$*. Entonces,* $\mathbf{X}_t$ *satisface la diferencial de Itô*

$$d\mathbf{X}_t = [f(t,\mathbf{X}_t) + g(t,\mathbf{x})]\, dt + G(t,\mathbf{X}_t) * d\mathbf{W}_t, \qquad \mathbf{X}_{t_0} = c,$$

donde

$$g^i(t,\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial G^{ik}}{\partial x^j}(t,\mathbf{x})\, G^{jk}(t,\mathbf{x}) \quad i = 1, ..., d.$$

La integral backward tiene una fórmula de cambio de variable muy similar a la de la integral de Itô.

Teorema 51 *Sea $u : [0,T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$ una función de clase C^2. Además, supongamos que se cumple*

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{f}_t dt + \mathbf{G}_t \bullet d\mathbf{W}_t,$$

con $\mathbf{W}_t$ un proceso de Wiener m-dimensional. Si definimos

$$\mathbf{Y}_t := u\left(\mathbf{X}_t, t\right),$$

entonces se cumple que

$$d\mathbf{Y}_t = \left(\left(u_t\left(t, \mathbf{X}_t\right)\right)^{\mathrm{T}} + u_x\left(t, \mathbf{X}_t\right) \mathbf{f}_t - h\left(t, \mathbf{X}_t\right)\right) dt + u_x\left(t, \mathbf{X}_t\right) \mathbf{G}_t \bullet d\mathbf{W}_t,$$

donde $h\left(t, \mathbf{X}_t\right) := \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\left(u_{x^i x^j}\left(t, \mathbf{X}_t\right)\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{G}_t\left(\mathbf{G}_t\right)^{\mathrm{T}}\right)^{ij}$, $\left(u_{x^i x^j}\left(t, \mathbf{X}_t\right)\right)^{\mathrm{T}}$ y $\left(u_t\left(t, \mathbf{X}_t\right)\right)^{\mathrm{T}}$ son vectores columna, $u_x = \left(u_{x^1}, ..., u_{x^d}\right)$ es una matriz de dimensión $k \times d$ y $\left(\mathbf{G}_t\left(\mathbf{G}_t\right)^{\mathrm{T}}\right)^{ij}$ denota la entrada ij de la matriz $\left(\mathbf{G}_t\left(\mathbf{G}_t\right)^{\mathrm{T}}\right)$.

Vale la pena notar que la diferencia fundamental con el caso de Itô es el signo menos que aparece delante del primer símbolo de suma.

Capítulo 3

El Movimiento Browniano No-Relativista

El objetivo de este capítulo es presentar un modelo fenomenológico que describa la dinámica de una partícula Browniana utilizando herramientas del cálculo estocástico y la física clásica. Este modelo constituye nuestro punto de partida para tratar el movimiento Browniano relativista; en particular, las ecuaciones de Langevin y Fokker-Planck que se consideran en este capítulo constituyen casos límite de la teoría relativista que se estudia a lo largo de la tesis.

En la Sección 1 se introducen las ecuaciones de Langevin y Fokker-Planck, se establece un teorema de fluctuación-disipación y se analiza el proceso de Ornstein-Uhlenbeck. En la segunda sección se presenta el modelo de colisión binaria.

3.1. Ecuaciones de Langevin y Fokker-Planck

Con fines de claridad conceptual, nos restringiremos al caso más simple donde los movimientos están confinados a una sola dimensión espacial. La generalización a dimensiones mayores es directa.

3.1.1. La ecuación de Langevin

Considérese el movimiento de una partícula Browniana puntual con masa $M > 0$, la cual está inmersa en un baño térmico estacionario y homogéneo que consiste, por ejemplo, de partículas líquidas más pequeñas (masa $m \ll M$) a temperatura constante $\mathcal{T}$. Además, supóngase que la partícula Browniana está en equilibrio térmico con el baño. El marco de referencia inercial Σ del baño térmico se identifica como el marco de referencia del laboratorio. La posición, la velocidad y el momento no-relativista de la partícula Browniana en Σ al tiempo t, se toman como X_t, $V_t := \frac{dX_t}{dt}$ y $P_t := MV_t$, respectivamente. Debido al comportamiento aleatorio de la partícula Browniana, se asume que $\{X_t, t \geq 0\}$, $\{V_t, t \geq 0\}$ y $\{P_t, t \geq 0\}$ son procesos estocásticos definidos en algún espacio de probabilidad.

De acuerdo a la idea de Langevin del movimiento Browniano, la dinámica estocástica de la partícula Browniana (debida a la interacción con el baño térmico) en presencia de un campo de fuerza conservativo externo $F(t,x)$, puede ser descrita por la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \frac{P_t}{M} dt, \tag{3.1a}$$

$$dP_t = F(t, X_t)\, dt - \alpha(P_t)\, P_t dt + [2D(P_t)]^{1/2} \odot dW_t, \tag{3.1b}$$

complementándola con las condiciones iniciales deterministas $X_0 = x_0$ y $P_0 = p_0$[1]. A la igualdad (3.1) se le conoce como la *ecuación de Langevin*. En el desarrollo de esta tesis se hará especial énfasis en el caso $F \equiv 0$.

En la ecuación (3.1b), W_t denota un proceso de Wiener y el símbolo $\odot$ señala el tipo de integral estocástica usada. Solo se consideran los tres tipos de integral estocástica que se mencionan en el Capítulo 2; así, '$\odot = *$' cuando se toma la integral de Itô, '$\odot = \circ$' para la integral de Stratonovich y '$\odot = \bullet$' cuando se trabaja con la integral backward. La elección de la integral se reduce a un mero problema de conveniencia. Además, se toman $F : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ - \{0\}$ de clase C^1. Por ser F, α y D de clase C^1, la ecuación (3.1) tiene sentido matemático para los tres tipos de integral considerados.

El segundo término del lado derecho de la ecuación (3.1b) representa una fuerza de fricción con coeficiente $\alpha(p)$; esta fuerza depende de detalles microscópicos de la interacción baño-partícula. El último término del lado derecho de la ecuación (3.1b), $[2D(P_t)]^{1/2} \odot dW_t$, se denomina fuerza estocástica de Langevin y en ella quedan reflejadas las fluctuaciones en el baño circundante. Al coeficiente $D > 0$ de la fuerza de Langevin se le conoce como coeficiente

[1] Sin perder generalidad, su puede fijar el tiempo inicial en $t_0 = 0$.

de ruido y se interpreta como la amplitud de esta fuerza. Para un baño térmico no homogéneo, las funciones α y D también dependen de la posición de la partícula; mientras que para un baño térmico no estacionario, las mismas funciones dependen además del tiempo.

Conviene tener en cuenta los cuatro supuestos físicos implícitos en la ecuación (3.1):

- El baño térmico es espacialmente homogéneo y estacionario, es decir que los proceso de relajación en el baño térmico ocurren en escalas de tiempo mucho menores que las escalas temporales relevantes asociadas al movimiento de la partícula Browniana pesada.
- Las colisiones entre la partícula Browniana y las partículas del baño térmico suceden virtualmente sin correlación.
- A un nivel macroscópico, las interacciones entre la partícula Browniana y el baño térmico son lo suficientemente bien descritas por el coeficiente de fricción α y la fuerza estocástica de Langevin.
- La ecuación de Langevin (3.1) se cumple en el marco de referencia Σ del laboratorio.

En la Sección 3.2 se estudia la forma en que pueden derivarse o, al menos, motivarse ecuaciones diferenciales estocásticas similares a la igualdad (3.1).

3.1.2. La ecuación de Langevin y las integrales estocásticas

En el Capítulo 2 se presentaron las condiciones bajo las cuales las ecuaciones diferenciales de Itô, Stratonovich y Backward-Itô generan procesos estocásticos equivalentes. Debido a estas condiciones, la elección de una integral en la ecuación de Langevin se reduce a un problema de conveniencia. Para ilustrar esto, considérese la ecuación de Langevin con la integral backward-Itô dada por

$$dX_t = \frac{P_t}{M}dt, \tag{3.2a}$$

$$dP_t = \left[F\left(t, X_t\right) - \alpha\left(P_t\right)P_t\right]dt + \left[2D\left(P_t\right)\right]^{1/2} \bullet dW_t. \tag{3.2b}$$

Para cada par de coeficientes $(\alpha(p), D(p))$, es posible encontrar nuevos coeficientes de fricción $\alpha_*, \alpha_\circ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de tal manera que las igualdades

$$\begin{cases} dX_t = \frac{P_t}{M} dt, \\ dP_t = [F(t, X_t) - \alpha_*(P_t) P_t] dt + [2D(P_t)]^{1/2} * dW_t. \end{cases}$$

$$\begin{cases} dX_t = \frac{P_t}{M} dt, \\ dP_t = [F(t, X_t) - \alpha_\circ(P_t) P_t] dt + [2D(P_t)]^{1/2} \circ dW_t. \end{cases}$$

describen la misma dinámica que la ecuación (3.2). A saber,

$$\alpha_*(p) \equiv \alpha(p) - D'(p)/p, \qquad \alpha_\circ(p) \equiv \alpha(p) - D'(p)/(2p),$$

para cualquier $p \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Cada uno de los tres tipos de integral estocástica considerados tiene sus pros y sus contras, entre los que podemos mencionar:

- La integral de Itô $(*)$ tiene un formalismo matemático excelentemente establecido y bastante conocido; además de tener la calidad de martingala, uno de los conceptos fundamentales de la teoría moderna de procesos estocásticos. Sin embargo, algunas de las cantidades y funciones útiles en la modelación del movimiento Browniano pueden tener expresiones más complicadas que con la integral backward.

- La integral de Stratonovich tiene la ventaja de cumplir las reglas usuales del cálculo diferencial, pero no tiene la propiedad de martingala y también algunas de las cantidades y funciones importantes pueden tener expresiones más complicadas que con la integral backward.

- La integral backward facilita algunos cálculos relacionados en la modelación del movimiento Browniano, tiene la desventaja de ser una integral poco común y no ser martingala.

A lo largo de este Capítulo, e incluso posteriores, se trabaja con la integral que más convenga en el estudio bajo consideración. Básicamente utilizaremos la integral de Itô y la backward; la integral de Stratonovich solo se presenta en esta tesis debido a que es usual encontrarla en aplicaciones.

3.1.3. La ecuación de Fokker-Planck

En Física, cuando se estudian ecuaciones diferenciales estocásticas como la ecuación de Langevin (3.1), suele ser también de interés conocer la función de densidad $g(t,x,p)$ asociada al proceso (X_t,P_t). Esta densidad no siempre existe y algunas condiciones para su existencia en dimensiones mayores resultan ser un tanto complicadas. Sin embargo, en este trabajo esto no es tan trascendente pues se construyen procesos de Langevin a partir del hecho de que tal densidad existe, o que sus densidades marginales existen.

Supóngase que la densidad asociada al proceso de Langevin (3.1) con la integral backward existe y que la ecuación (3.1) cumple las condiciones para la existencia de la ecuación de Fokker-Planck. Debido a que para dos integrales estocásticas distintas la integral de Langevin no genera procesos estocásticos equivalentes, se tiene que la densidad del proceso (3.1) depende de la integral usada. Denótese por $f(t,x,p)$ la densidad asociada al proceso de Langevin (X_t,P_t) con la integral backward, la cual supondremos que está definida en el conjunto $(0,\infty)\times\mathbb{V}\times\mathbb{M}$, donde $\mathbb{V}$ es el conjunto abierto y conexo al cual esta restringido el movimiento de la partícula Browniana y $\mathbb{M}$ es el conjunto abierto y conexo de posibles momentos (en realidad podemos tomar f definida en $(0,\infty)\times\mathbb{V}\times\mathbb{R}$). La función f satisface la normalización

$$\int_{\mathbb{V}\times\mathbb{M}} f(t,x,p)\,dxdp = 1 \quad \forall t>0, \tag{3.3}$$

además de la ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{p}{M}\frac{\partial f}{\partial x}+F(t,x)\frac{\partial f}{\partial p}=\frac{\partial}{\partial p}\left[\alpha(p)\,pf+D(p)\frac{\partial f}{\partial p}\right] \quad \forall(t,x,p)\in(0,\infty)\times\mathbb{V}\times\mathbb{M}. \tag{3.4}$$

Las condiciones iniciales $X_0=x_0$ y $P_0=p_0$ de la ecuación de Langevin se convierten en las condición de frontera

$$f(0,x,p)=\delta(p-p_0)\,\delta(x-x_0) \quad \forall(x,p)\in\mathbb{V}\times\mathbb{M}. \tag{3.5}$$

Debido a que (3.4) es una ecuación diferencial parcial de primer orden en el tiempo, se tiene que la ecuación de Langevin-backward (3.1) describe un proceso Markoviano.

Físicamente, la cantidad infinitesimal $f(t, x, p)\, dxdp$ se interpreta como la probabilidad de encontrar la partícula al tiempo t en el subconjunto infinitesimal $[x, x + dx] \times [p, p + dp]$ del espacio fase $\mathbb{V} \times \mathbb{M}$. Esta interpretación y las ecuaciones (3.3) y (3.5) son las mismas para cualquier integral, siempre y cuando la densidad de (X_t, P_t) exista.

3.1.4. Teorema de fluctuación-disipación

A partir de la ecuación de Fokker-Planck y utilizando la situación de equilibrio térmico es posible encontrar igualdades que relacionen a los coeficientes α y D de la ecuación (3.1) entre sí. Tales ecuaciones son comúnmente denominadas relaciones de *fluctuación-disipación de Einstein* y juegan un papel fundamental en el desarrollo de esta tesis.

A continuación se calcula la relación de Einstein para la ecuación de Langevin-backward en ausencia de campos de fuerza externos, o sea $F \equiv 0$. Sea $\phi : (0, \infty) \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}^+ - \{0\}$ la densidad marginal del momento de f (siguiendo la notación de la sección anterior), es decir $\phi(t, p) = \int_{\mathbb{V}} f(t, x, p)\, dx \;\forall (t, p) \in (0, \infty) \times \mathbb{M}$. En ausencia de fuerzas externas, la ecuación (3.4) implica que ϕ satisface la ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, p) = \frac{\partial}{\partial p}\left[\alpha(p)\, p\phi(t, p) + D(p)\frac{\partial \phi}{\partial p}(t, p)\right] \quad \forall (t, p) \in (0, \infty) \times \mathbb{M}.$$

Esta ecuación tiene asociada una solución estacionaria ϕ_∞, dada por

$$\phi_\infty(p) = \mathcal{N} \exp\left[-\int_{-p_*}^{p} q\frac{\alpha(q)}{D(q)}dq\right], \tag{3.6}$$

donde $\mathcal{N}$ es una constante de normalización y $-p_* \in \overline{\mathbb{M}}$ es un real arbitrario tal que la integral dentro de la función exponencial existe.

La forma de la relación (3.6) implica que es posible generar distribuciones estacionarias casi arbitrarias para el momento eligiendo a los coeficientes α y D de manera adecuada. Para ilustrar esto, considérese una densidad de probabilidad $\widehat{\phi} : \mathbb{M} \to \mathbb{R}^+ - \{0\}$ diferenciable. Se desea encontrar una relación entre α y D de tal manera que la solución ϕ_∞ coincida con la función $\widehat{\phi}$. Igualando $\widehat{\phi}(p)$ con $\phi_\infty(p)$, de la ecuación (3.6) se sigue que

$$\frac{\alpha(p)}{D(p)}p = -\frac{d}{dp}\log\widehat{\phi}(p) \quad \forall p \in \mathbb{M}. \tag{3.7}$$

La igualdad anterior constituye una relación general de fluctuación-disipación de Einstein.

Debido a que la partícula se encuentra en equilibrio térmico con el baño circundante y no tiene restricciones en su movimiento (es decir, $\mathbb{V} = \mathbb{R}$), el momento de la partícula Browniana tiene como densidad estacionaria a una función Maxwell de la forma

$$\widehat{g}_M(p) = (2\pi M/\beta)^{-1/2} \exp\left[-\beta p^2/(2M)\right], \qquad \forall p \in \mathbb{R}, \tag{3.8}$$

tomando $\beta := (k_B\mathcal{T})^{-1}$, donde $\mathcal{T}$ es la temperatura del baño y k_B es la constante de Boltzmann. Para que los coeficientes α y D capturen la información del equilibrio térmico y la no restricción del movimiento, de la ecuación (3.7) y (3.8) se sigue que α y D deben cumplir

$$D(p) = \alpha(p)\, M k_B T = \alpha(p)\, M/\beta \quad \forall p \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Esta ecuación es conocida como *relación de fluctuación-disipación de Einstein*.

Las relaciones de fluctuación-disipación (3.7) y (3.9) fijan solo uno de los dos coeficientes $\alpha(p)$ y $D(p)$. Así, existe la libertad de adaptar, por ejemplo, a la función $\alpha(p)$ para que el proceso (3.1) exhiba el comportamiento de relajación correcto. Esta libertad es una de las razones principales por las que el enfoque de Langevin es existosamente aplicado en un amplio rango de procesos de termalización. Algunas expresiones físicamente razonables para α pueden deducirse a partir de la teoría cinética o de modelos microscópicos hamiltonianos que tienen en cuenta las interacciones al igual que las propiedades estadísticas del baño térmico. Ejemplos de métodos para encontrar expresiones para α y D se discuten en la Sección 3.2.

Con miras a nuestro tratamiento del movimiento Browniano relativista, conviene tener en cuenta que las ecuaciones de Langevin constituyen una herramienta útil para construir modelos de movimiento Browniano con distribuciones arbitrarias para el momento y la velocidad de la partícula Browniana.

3.1.5. El proceso de Ornstein-Uhlenbeck no-relativista

El proceso de Ornstein-Uhlenbeck clásico constituye el ejemplo estándar de un modelo de movimiento Browniano (no-relativista) en ausencia de fuerzas externas. Este proceso esta definido por la elección de coeficientes constantes positivos en la ecuación de Langevin-Itô. Mas precisamente, se eligen

$$\alpha(p) \equiv \alpha_0 > 0, \quad D(p) \equiv D_0 > 0,$$

dando lugar a las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas para la posición y el momento de la partícula Browniana

$$dX_t = \frac{P_t}{M} dt, \tag{3.10a}$$

$$dP_t = -\alpha_0 P_t dt + (2D_0)^{1/2} * dW_t. \tag{3.10b}$$

La ecuación diferencial anterior tiene solución explícita única.

Lema 52 *La ecuación diferencial (3.10) tiene solución única, dada por*

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t \frac{P_s}{M} ds, \\ P_t &= P_0 e^{-\alpha_0 t} + (2D_0)^{1/2} e^{-\alpha_0 t} \int_0^t e^{\alpha_0 s} * dW_s, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, \infty)$.

Observación 53 *En la literatura matemática, al proceso del lema anterior se le conoce como el proceso de Ornstein-Uhlenbeck.*

A partir de las propiedades básicas de la integral de Itô y teniendo en cuenta las condiciones iniciales deterministas de la ecuación de Langevin, se encuentra fácilmente la media y el segundo momento estadístico de los procesos de posición y momento.

Lema 54 *Supongamos que la ecuación (3.10) se cumple junto con las condiciones iniciales* *deterministas* $X_0 = x_0$ *y* $P_0 = p_0$*. Entonces, los procesos* P_t *y* X_t *cumplen que*

$$
\begin{aligned}
\langle P_t \rangle &= P_0 e^{-\alpha_0 t}, \\
\left\langle P_t^2 \right\rangle &= P_0^2 e^{-2\alpha_0 t} + \frac{D_0}{\alpha_0}\left(1 - e^{-2\alpha_0 t}\right), \\
\langle X_t - X_0 \rangle &= \frac{P_0}{\alpha_0 M}\left(1 - e^{-\alpha_0 t}\right), \\
\left\langle [X_t - X_0]^2 \right\rangle &= \frac{2D_0}{(\alpha_0 M)^2} t + \left[\frac{P_0}{\alpha_0 M}\right]^2 \left(1 - e^{-\alpha_0 t}\right)^2 + \frac{D_0}{\alpha_0^3 M^2}\left(-3 + 4e^{-\alpha_0 t} - e^{-2\alpha_0 t}\right),
\end{aligned}
$$

para todo $t \in [0, \infty)$.

Asociada al desplazamiento cuadrático medio esta una cantidad de suma importancia en cualquier teoría del movimiento Browniano: la *constante de difusión asintótica*. Esta constante se define para un proceso (X_t, P_t) de la forma (3.1) por

$$D_\infty (X_t, P_t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t} \left\langle [X_t - X_0]^2 \right\rangle.$$

La constante de difusión asintótica mide la capacidad efectiva que tiene la partícula Browniana para desplazarse a través del medio; también permite estimar los procesos de relajación dentro del sistema y aplicar resultados de la teoría de difusiones.

En el caso del proceso de Ornstein-Uhlenbeck la constante de difusión asintótica tiene la siguiente expresión simple.

Lema 55 *El proceso de Ornstein-Uhlenbeck (3.10) tiene asociada la constante de difusión asintótica*

$$D_\infty = \frac{D_0}{(\alpha_0 M)^2}.$$

Como los coeficientes del proceso de Ornstein-Uhlenbeck son constantes, se cumple que los coeficientes del proceso equivalente con la integral backward no cambian, es decir el proceso

$$dP_t = -\alpha_0 P_t dt + (2D_0)^{1/2} \bullet dW_t,$$

es equivalente al proceso de Ornstein-Uhlenbeck (3.10b). Por lo tanto, como la partícula Browniana está en equilibrio térmico con el baño circundante, la relación de Einstein (3.9) $D_0 =$

$\alpha_0 M k_B \mathcal{T}$ se cumple también en este caso. Luego, la constante de difusión asintótica puede escribirse como

$$D_\infty = \frac{k_B \mathcal{T}}{\alpha_0 M}.$$

Debido a que la ecuación para el momento del proceso de Ornstein-Uhlenbeck tiene coeficientes constantes, del Teorema 109 y el Capítulo 3.5 del libro de McKean [46] se sigue que la densidad marginal del momento satisface la ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,p) = \frac{\partial}{\partial p}\left[\alpha_0 p \phi(t,p) + D_0 \frac{\partial \phi}{\partial p}(t,p)\right] \qquad \forall (t,p) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}. \tag{3.11}$$

Considerando la condición inicial determinista $\phi(0,p) = \delta(p_0 - p)$, la solución de la ecuación (3.11) esta dada por

$$\phi(t,p) = \left\{\frac{\alpha_0}{2\pi D_0 (1-e^{-2\alpha_0 t})}\right\}^{1/2} \exp\left[-\frac{\alpha_0 \left(p - p_0 e^{-\alpha_0 t}\right)^2}{2D_0 (1-e^{-2\alpha_0 t})}\right] \qquad \forall p \in \mathbb{R}.$$

En el límite $t \to \infty$ la solución anterior se reduce a una densidad Gaussiana

$$\phi_\infty(p) = \left(\frac{\alpha_0}{2\pi D_0}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\alpha_0 p^2}{2D_0}\right) \qquad \forall p \in \mathbb{R},$$

es decir que la distribución estacionaria marginal de momentos del proceso de Ornstein-Uhlenbeck corresponde a una distribución normal, lo cual nos dice que es un modelo de movimiento Browniano que atrapa la información del equilibrio térmico, algo bastante deseable.

Dada una densidad marginal $\widehat{\phi}(t,p)$ para el momento de la partícula Browniana y teniendo en cuenta la relación entre velocidad y momento $p = Mv$, se tiene que la densidad $\widehat{\psi}(t,v)$ que gobierna la velocidad de la partícula Browniana está dada por

$$\widehat{\psi}(t,v) := \frac{dp}{dv}\widehat{\phi}(t,p(v)) = M\widehat{\phi}(t,p(v)).$$

Entonces, en el caso del proceso de Ornstein-Uhlenbeck, la densidad $\psi(t,v)$ de la velocidad de la partícula Browniana está dada por

$$\psi(t,v) = \left\{\frac{\alpha_0}{2\pi D_0 (1-e^{-2\alpha_0 t})}\right\}^{1/2} \exp\left[-\frac{\alpha_0 \left(Mv - p_0 e^{-\alpha_0 t}\right)^2}{2D_0 (1-e^{-2\alpha_0 t})}\right] \qquad \forall (t,v) \in \mathbb{R}.$$

Teniendo en cuenta la relación de Einstein (3.9), podemos ver que la densidad estacionaria para la velocidad de la partícula Browniana se expresa como

$$\psi_M(v) = \left(\frac{M}{2\pi k_B \mathcal{T}}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{Mv^2}{2k_B \mathcal{T}}\right) \qquad \forall v \in \mathbb{R},$$

la cual es una distribución de Maxwell para la velocidad. Esto vuelve a confirmar que el modelo de movimiento Browniano atrapa la información del equilibrio térmico.

Los modelos de Ornstein-Uhlenbeck con influencia de campos de fuerza externos fueron estudiados intensamente durante el siglo pasado desde un enfoque de Kolmogorov. Sin embargo, para campos de fuerza arbitrarios $F(t,x)$ generalmente es muy difícil, y en muchos casos imposible, encontrar soluciones a la ecuación de Fokker-Planck. En el caso más simple se tienen campos de fuerza conservativos y estacionarios $F(t,x) \equiv F(x)$ con potencial $\Phi(x)$, es decir

$$F(x) = -\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x).$$

En este caso es posible determinar soluciones estacionarias en el límite $t \to \infty$. La ecuación de Fokker-Planck para la densidad $g(t,x,p)$ de un proceso de Ornstein-Uhlenbeck bajo la influencia de un campo de fuerza $F(t,x)$ está dada por

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{p}{M}\frac{\partial g}{\partial x} + F(t,x)\frac{\partial g}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\alpha_0 p g + D_0 \frac{\partial g}{\partial p}\right).$$

Imponiendo la relación de Einstein $D_0 = \alpha_0 M k_B \mathcal{T}$, la solución estacionaria de la ecuación anterior está dada por la densidad de Maxwell-Boltzmann

$$g(x,p) = \mathcal{Z}^{-1} \exp\left(-\beta\left[\frac{p^2}{2M} + \Phi(x)\right]\right), \qquad \beta = (k_B \mathcal{T})^{-1},$$

donde $\mathcal{Z}^{-1}$ es una constante de normalización.

3.2. Modelos microscópicos: el modelo de colisión binaria

Cuando se consideran ecuaciones de Langevin del tipo (3.1), en principio se pueden distinguir entre los dos siguientes enfoques:

(a) Postular estas ecuaciones como modelos fenomenológicos, estudiar las consecuencias mate máticas y comparar las predicciones resultantes con experimentos con el fin de validar o no la teoría. Adoptando este enfoque, los parámetros y la forma explícita de las funciones de ruido y fricción tienen que ser determinados de la información experimental.

(b) Alternativamente, se puede tratar de motivar y derivar las ecuaciones de Langevin a partir de modelos microscópicos. Si se tiene éxito, este enfoque permite encontrar expresiones explícitas para las funciones de ruido y fricción en términos de los parámetros del modelo microscópico.

En esta sección se considera el segundo enfoque, el cual atrajo considerable interés en las últimas décadas. Las ecuaciones de Langevin proveen una descripción aproximada de la dinámica microscópica “exacta”. Por lo tanto, con el fin de derivar ecuaciones diferenciales estocásticas a partir de modelos microscópicos, se tienen que imponer ciertas aproximaciones; las cuales determinan el rango de aplicabilidad del enfoque de Langevin para el movimiento Browniano. Generalmente, se pueden seguir al menos dos caminos distintos para derivar ecuaciones diferenciales estocásticas de la forma (3.1) de modelos más precisos:

(1) Empezando con una ecuación tipo Boltzmann o una ecuación maestra para la densidad de probabilidad de la partícula Browniana, se puede tratar de reducir estas ecuaciones integro-diferenciables a una igualdad de Fokker-Planck realizando aproximaciones adecuadas. Una vez encontrada la ecuación de Fokker-Planck es sencillo escribir la ecuación de Langevin asociada. La dinámica de las colisiones microscópicas queda implícita en la ecuación de Boltzmann.

(2) Alternativamente, se puede partir de un modelo microscópico que describa la interacción entre la partícula Browniana y el baño térmico. Al eliminar los grados de libertad del baño térmico en las ecuaciones del movimiento de la partícula Browniana, se obtiene una ecuación de Langevin generalizada, la cual puede reducirse a la forma (3.1) en ciertos casos límite. Como subproducto, con este enfoque las relaciones de fluctuación-disipación surgen de una manera más natural al asumir una distribución de probabilidad para la configuración (inicial) del baño.

En esta sección se desarrolla el segundo procedimiento con un modelo de colisión binaria, el cual puede ser extendido al caso relativista. Cabe destacar que el método más empleado para deducir expresiones para las funciones de ruido y fricción se deriva del modelo del oscilador armónico; sin embargo éste no puede extenderse a la relatividad, razón por la cual no se expone en esta tesis.

3.2.1. El modelo de colisión binaria elástica

El modelo de colisión binaria parte de la idea de que el movimiento estocástico de una partícula Browniana se genera debido a las frecuentes colisiones elásticas con las partículas del baño térmico. Básicamente, este modelo consiste en construir una ecuación de Langevin a partir de la cinemática de las colisiones de la partícula Browniana y las partículas del baño. El modelo de colisión binaria se usa para encontrar expresiones útiles y realistas para las funciones de ruido y fricción, además de que permite dar una justificación heurística de la ecuación de Langevin (3.1).

En la exposición de esta sección, se considera que el baño térmico consiste de $N \in \mathbb{N}$ partículas de masa m, tomando $N \gg 1$ y $m \ll M$. Además, se denota por $x_r(t)$ y $p_r(t)$ [2] a la posición y el momento al tiempo t de la partícula 'r', $r \in \{1, \ldots, N\}$ del baño térmico, respectivamente.

Cinemática de las colisiones

Una colisión elástica entre la partícula Browniana y la partícula 'r' del baño térmico está gobernada por las leyes de conservación

$$E + \epsilon_r = \widehat{E} + \widehat{\epsilon}_r, \qquad\qquad P + p_r = \widehat{P} + \widehat{p}_r,$$

donde $E(P) := P^2/2M$ es la energía de cinética de la partícula Browniana, $\epsilon^r(p) := (p)^2/2m$ es la energía de la partícula 'r' del baño y los símbolos con $(\widehat{\ })$ se refieren al estado posterior a la colisión. Considerando las ecuaciones anteriores, se encuentra que la ganancia de momento

[2] Resulta importante notar que $x_r(t)$ y $p_r(t)$ también son procesos estocásticos. Para ganar un poco de claridad, no usamos la notación con subínices acostumbrada para los procesos.

de la partícula Browniana en la colisión con la partícula 'r' está dada por

$$\Delta P_r(t) := \widehat{P}_t - P_t = -\frac{2m}{M+m}P_t + \frac{2M}{M+m}p_r(t)\,. \tag{3.12}$$

Con objeto de justificar heurísticamente la ecuación de Langevin (3.1) y de encontrar coeficientes α y D realistas, conviene considerar el cambio de momento $\delta P(t) := P_{t+\delta t} - P_t$ de la partícula Browniana en el intervalo de tiempo "mesoscópico" $[t, t+\delta t]$, haciendo las siguientes tres suposiciones:

- las colisiones que ocurren en $[t, t+\delta t]$ pueden ser vistas como eventos independientes;
- el salto de tiempo δt es lo suficientemente pequeño para que se cumpla $|\delta P(t)/P_t| \ll 1$ y para que ocurra a lo más sólo una colisión entre la partícula Browniana y una partícula específica del baño térmico;
- el valor de δt es lo suficientemente grande para que el número de colisiones sea mayor a 1.

Estos requisitos solo pueden cumplirse simultáneamente si $m \ll M$, lo cual fue un supuesto ya hecho. Con los supuestos anteriores es posible aproximar $\delta P(t)$ por

$$\delta P(t) \approx \sum_{r=1}^{N} \Delta P_r(t)\, I_r(t, \delta t)\,, \tag{3.13}$$

donde $I_r(t, \delta t)$ es la función indicadora para una colisión entre la partícula Browniana y la partícula 'r' del baño térmico durante el intervalo $[t, t+\delta t]$, es decir

$$I_r(t, \delta t) = \begin{cases} 1 & \text{si una colisión entre la partícula Browniana} \\ & \text{y la partícula '}r\text{' ha ocurrido en } [t, t+\delta t]\,, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En el caso unidimensional, $I_r(t, \delta t)$ puede expresarse como

$$I_r(t, \delta t) = \Theta(X_t - x_t^r)\,\Theta\left(\widetilde{x}_t^r - \widetilde{X}_t\right) + \Theta(x_t^r - X_t)\,\Theta\left(\widetilde{X}_t - \widetilde{x}_t^r\right), \tag{3.14}$$

siendo $\Theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función Heaviside y

$$\widetilde{X}_t = X_t + V_t \delta t, \qquad \widetilde{x}_t^r = x_r(t) + v_r(t)\,\delta t \tag{3.15}$$

las posiciones proyectadas al tiempo $t+\delta t$ de las partículas en colisión. Así, podemos expresar la función indicadora I_r en términos de las posiciones y las velocidades de las partícula Browniana y partícula 'r' del baño, algo que resulta útil en la determinación de los coeficientes α y D. La ecuación (3.14) puede justificarse al tener en cuenta que dos partículas colisionan en el intervalo $[t, t+\delta t]$ cuando se dirigen la una contra la otra y la distancia que las separa es lo suficientemente pequeña.

Combinando las igualdades (3.12) y (3.13) se llega a que

$$\delta P(t) \approx -2\left[\sum_{r=1}^{N} \frac{m}{M+m} I_r(t, \delta t)\right] P_t + 2\sum_{r=1}^{N} \frac{m}{M+m} p_r(t)\, I_r(t, \delta t), \tag{3.16}$$

donde, adicionalmente, se supone que para cada colisión que ocurre en el intervalo $[t, t+\delta t]$, el momento de la partícula Browniana antes de la colisión es aproximadamente igual al valor 'inicial' P_t. En vista de que $m \ll M$, la ecuación anterior puede simplificarse como

$$\delta P(t) \approx -2\left[\sum_{r=1}^{N} \frac{m}{M} I_r(t, \delta t)\right] P_t + 2\sum_{r=1}^{N} p_r(t)\, I_r(t, \delta t). \tag{3.17}$$

Una comparación entre la ecuación (3.1) y la igualdad (3.17) sugiere que, heurísticamente, el primer término del lado derecho de la ecuación (3.17) puede interpretarse como fricción, mientras que el segundo término puede pensarse como ruido. Esto justifica, heurísticamente, el porque tomar ecuaciones de Langevin de la forma (3.1) con $F \equiv 0$ para modelar la dinámica de la partícula Browniana en ausencia de fuerzas externas. A pesar de que es bastante similar a la ecuación de Langevin (3.1), la ecuación (3.17) es considerablemente más complicada que la ecuación de Langevin. Esto se debe a que las funciones indicadoras I_r de la ecuación (3.17) dependen tanto de la posición y la velocidad de la partícula Browniana, como de la posición y la velocidad de las partículas del baño. Sin embargo, es posible calcular las propiedades estadísticas de los incrementos de momento $\delta P(t)$ de la ecuación (3.17), suponiendo una distribución específica para las partículas del baño térmico.

Distribución del baño térmico

En principio, se puede utilizar las ecuaciones (3.16) y (3.17) para calcular los momentos estadísticos $\left\langle [\delta P\left(t\right)]^j \right\rangle$ para una densidad arbitraria $f_N\left(x_1, p_1, \ldots, x_N, p_N\right)$ de las partículas del baño térmico. Aquí se trata la situación cuando el baño térmico (arbitrariamente grande) está dado por un gas quasi-ideal, el cual se encuentra en equilibrio térmico con su ambiente. En este caso, la densidad que modela la probabilidad de encontrar a la partícula 'r' del baño térmico en algún lugar del espacio fase, está dada por la función espacialmente homogénea de Maxwell

$$f_1\left(x_r, p_r\right) = \left(2\pi m k_B \mathcal{T}\right)^{-1/2} L^{-1} \exp\left[\frac{-p_r^2}{(2mk_B\mathcal{T})}\right] \quad \forall\left(x,p\right)\in\left(0,L\right)\times\mathbb{R}, \tag{3.18}$$

donde L es el volumen (unidimensional) contenedor del baño. Además, se supondrá que:

- las partículas del baño térmico son independiente e idénticamente distribuidas;
- las colisiones entre la partícula Browniana y las partículas del baño térmico no afectan la distribución de las partículas.

Las dos suposiciones anteriores pueden justificarse para baños lo suficientemente grandes, siempre y cuando las colisiones entre las partículas del baño restablecen rápidamente una distribución espacialmente homogénea.

La fuerza media de deriva

La deriva media (al tiempo t) se define como el cambio promedio de momento sobre el intervalo $[t, t+\delta t]$, dado el valor del momento P al tiempo t, es decir la deriva media al tiempo t es la esperanza $\langle \delta P\left(t\right) \mid P_t = p\rangle$. En el caso de la ecuación (3.17), se encuentra que

$$\langle \delta P\left(t\right) \mid P_t = p\rangle = -2N\left(\frac{m}{M}\right)\langle I_r\left(t,\delta t\right)\rangle p + 2N\left\langle p_r I_r\left(t,\delta t\right)\right\rangle.$$

Debido a que la densidad en el espacio fase de las partículas del baño es una función de la forma (3.18) y a que la función indicadora I_r se puede expresar como (3.14), se tiene que para cualquier función continua $G:(0,L)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y para todo $r\in\{1,\ldots,N\}$ se cumple que

$$\begin{aligned}\langle G(x_r,v_r)\,I_r(t,\delta t)\rangle &= \int_0^L\int_{-\infty}^{\infty} G(x_r,v_r)\,\Theta(X_t-x_t^r)\,\Theta\left(\widetilde{x}_t^r-\widetilde{X}_t\right)\psi(v_r)\,dv_rdx_r+\\ &\quad \int_0^L\int_{-\infty}^{\infty} G(x_r,v_r)\,\Theta(x_t^r-X_t)\,\Theta\left(\widetilde{X}_t-\widetilde{x}_t^r\right)\psi(v_r)\,dv_rdx_r, \end{aligned}\tag{3.19}$$

donde $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ es la función de densidad de probabilidad para la velocidad de una partícula del baño térmico, la cual es una función de Maxwell de la forma

$$\psi(v_r)=\left(v_B^2\pi\right)^{-1/2}\exp\left(\frac{v_r^2}{v_B^2}\right),\qquad v_B:=\left(\frac{2k_B\mathcal{T}}{m}\right)^{1/2}.\tag{3.20}$$

Cabe destacar que las integrales en la igualdad (3.19) son difíciles de calcular, sino imposibles. Sin embargo, existen algunas identificaciones heurísticas y métodos que permiten encontrar expresiones útiles. Por ejemplo, puede utilizarse una expansión de Taylor con derivadas ge-neralizadas. De las ecuaciones (3.14) y (3.15), se sigue que la función indicadora I_r puede ser aproximada por su expansión de Taylor (generalizada) hasta primer orden

$$I_r(t,\delta t)\approx\frac{\delta t}{2}\left|v_r(t)-V_t\right|\delta\left(x_r(t)-X_t\right),$$

donde $\delta(\cdot)$ es una delta de Dirac. Usando la última expresión, es posible encontrar que

$$\langle G(x_r,v_r)\,I_r(t,\delta t)\rangle=\frac{\delta t}{2L}\int_{-\infty}^{\infty}G(X,v_r)\left|v_r(t)-V_t\right|\psi(v_r)\,dv_r,$$

tomando ψ como en (3.20). A partir de la igualdad anterior, se llega a que

$$\begin{aligned}\langle\delta P(t)\mid P_t=p\rangle &\approx -2n_bk_B\mathcal{T}\left\{\pi^{-1/2}\left(\frac{p}{p_B}\right)\exp\left[-\left(\frac{p}{p_B}\right)^2\right]\right\}\delta t\\ &\quad -2n_bk_B\mathcal{T}\left\{\left[\left(\frac{p}{p_B}\right)^2+\frac{1}{2}\right]\operatorname{erf}\left(\frac{p}{p_B}\right)\right\}\delta t,\end{aligned}\tag{3.21}$$

donde $n_b=N/L$ es la densidad de las partículas del baño térmico, $p_B:=Mv_B=M\left(2k_B\mathcal{T}/m\right)^{1/2}$

es una escala característica térmica para el momento y $\operatorname{erf}(z)$ es la función error definida por

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx.$$

Si bien obtener una expresión clara (sin aproximaciones de ningún tipo) para la deriva media no es factible, se pueden obtener expresiones útiles a través de métodos numéricos como aproximación por splines, entre muchos otros procedimientos.

Asociada a la deriva media se encuentra asociada la fuerza media de deriva $\mathcal{K}(p)$, la cual se define como

$$\mathcal{K}(p) := \left\langle \frac{\delta P(t)}{\delta t} \mid P_t = p \right\rangle.$$

Esta fuerza puede considerarse como una medida de los procesos de relajación de la partícula Browniana y el baño térmico. Al realizar aproximaciones numéricas podemos ver que la fuerza media de deriva crece linealmente para valores pequeños del momento y de manera cuadrática para valores grandes del momento.

A continuación se estudia un procedimiento para aproximar el modelo de la igualdad (3.17) por una ecuación diferencial estocástica no lineal del tipo (3.1).

Aproximación de Langevin

La ecuación para los incrementos del momento (3.17) no es aún una ecuación de Langevin. Las ecuaciones diferenciales estocásticas del tipo

$$dP_t = -\alpha(P_t) P_t dt + [2D(P_t)]^{1/2} \bullet dW_t, \tag{3.22}$$

constituyen modelos fenomenológicos que proveen una descripción simplificada de la dinámica microscópica, la cual en el caso del modelo de colisión binaria está descrita más precisamente por la ecuación (3.17). Por lo tanto, para obtener un modelo de Langevin útil, se deben elegir a los coeficientes α y D de tal manera que produzcan la mejor aproximación posible en la clase de ecuaciones diferenciales estocásticas definida por la ecuación (3.22). Es posible que existan una infinidad de criterios para definir una “buena aproximación”, en este caso los criterios que deberá cumplir el proceso (3.22) para decir que es una buena aproximación son dos:

- Aproximar la distribución estacionaria correcta;
- Exhibir el comportamiento de relajación media correcto.

El primer criterio es equivalente a imponer la relación de fluctuación-disipación apropiada sobre los coeficientes α y D. Para el modelo de colisión binaria considerado aquí, la distribución estacionaria para el momento de la partícula Browniana esta dada por una densidad de Maxwell

$$\phi_{\infty}(p) = (2\pi M k_B \mathcal{T})^{-1/2} \exp\left[\frac{-p^2}{(2Mk_B\mathcal{T})}\right] \quad \forall p \in \mathbb{R}.$$

De acuerdo a lo hecho en la Sección 3.1, esto implica que α y D deben satisfacer la relación de Einstein

$$D(p) = \alpha(p) M k_B \mathcal{T} \quad \forall p \in \mathbb{R}. \tag{3.23}$$

El segundo criterio puede expresarse matemáticamente como

$$\left\langle \frac{dP(t)}{dt} \mid P_t = p \right\rangle = \left\langle \frac{\delta P(t)}{\delta t} \mid P_t = p \right\rangle,$$

donde se toma heurísticamente[3] $\frac{dP(t)}{dt} = \alpha(P_t) + D'(P_t) + \frac{[2D(P_t)]^{1/2} * dW_t}{dt}$ y se supone que $\int_0^t \langle 2D(P_s)\rangle\, ds < \infty \; \forall t \geq 0$. Teniendo en cuenta la relación de Einstein (3.23) y la relación heurística anterior, se llega a que el lado izquierdo de la ecuación anterior esta dado por

$$\left\langle \frac{dP(t)}{dt} \mid P_t = p \right\rangle \approx -\left[\alpha(p)\, p - \alpha'(p) M k_B \mathcal{T}\right].$$

Así, el segundo criterio es equivalente a la ecuación diferencial ordinaria (no-estocástica)

$$-\alpha(p)\, p + \alpha'(p) M k_B \mathcal{T} = \mathcal{K}(p). \tag{3.24}$$

[3]Nótese que el proceso P_t no necesariamente es diferenciable, por lo que estrictamente hablando $\frac{dP_t}{dt}$ no tiene sentido. Sin embargo, podemos cuantificar la variación del proceso P_t heurísticamente. La ecuación (3.22) es equivalente al proceso

$$dP_t = \left[\alpha(P_t) - D'(P_t)\right] dt + \left[2D(P_t)\right]^{1/2} dW_t.$$

Al dividir por dt, el cual será pensado como un escalar, se obtiene la identificación heurística. Además, se supone $\int_0^t \langle 2D(P_s)\rangle\, ds < \infty \; \forall t \geq 0$ para poder asegurar que la esperanza $\left\langle \int_0^t [2D(P_s)]^{1/2} * dW_s \right\rangle = 0$ existe $\forall t \geq 0$.

Con respecto a los dos criterios formulados anteriormente, la solución a la ecuación diferencial ordinaria (3.24) proporciona el coeficiente de fricción α que genera la 'mejor' aproximación de Langevin para el modelo de colisión binaria; la condición inicial para $\alpha(p)$ debe especificarse de tal manera que se obtenga el comportamiento asintótico correcto. La información sobre el modelo de colisión binaria y la distribución del baño térmico queda implícita en la fuerza media de deriva $\mathcal{K}(p)$. Evidentemente, el procedimiento que permite llegar a la ecuación (3.24) puede generalizarse para otros modelos de interacción y otras distribuciones para el baño térmico, siempre y cuando se conozca la distribución estacionaria para el momento de la partícula Browniana. Otros tipos de interacción (e.g. colisiones no elásticas) podrían producir otra función $\mathcal{K}(p)$; mientras una distribución no Maxwelliana para el baño térmico podría afectar no sólo el lado derecho de la ecuación (3.24), también modificaría el lado izquierdo pues la relación de fluctuación-disipación sería distinta.

Desafortunadamente, casi siempre es muy difícil, o incluso imposible, encontrar la solución analítica de la ecuación diferencial ordinaria (3.24) para una función $\mathcal{K}(p)$ realista. Para propósitos prácticos, se pueden obtener aproximaciones útiles, por ejemplo, al considerar el comportamiento asintótico para $p \to 0$ o $p \to \infty$. En el caso del modelo de colisión binaria, se utiliza la aproximación

$$\alpha(p) \simeq -\frac{\mathcal{K}(p)}{p} := \alpha_\infty(p).$$

Esta aproximación se toma como una opción sencilla de calcular y puede justificarse para algunos baño térmicos y relaciones de fluctuación, sin embargo no es totalmente cierta en todos lo casos.

Para el proceso de Ornstein-Uhlenbeck, el valor de la constante α_0 puede aproximarse por $\alpha_0 := \alpha_\infty(0)$; según la ecuación (3.21) se tiene

$$\alpha_0 := \alpha_\infty(0) = -\mathcal{K}'(0) \approx n_b \frac{m}{M} \left(\frac{8k_B\mathcal{T}}{\pi m} \right)^{1/2}.$$

Otro valor que podría tomarse para α_0 es el valor mínimo o máximo (si existen) de $\alpha_\infty(p)$. Cabe mencionar que en el caso de la aproximación (3.21) el valor mínimo de $\alpha_\infty(p)$ coincide con $\alpha_\infty(0)$. El valor de D_0 se obtiene a partir de la relaciones de Einstein $D_0 \equiv D(p) = \alpha_0 M k_B \mathcal{T}$. Adoptando estas simplificaciones adicionales, puede esperarse que el proceso de Ornstein-

Uhlenbeck correspondiente genere una descripción útil para partículas Brownianas a temperaturas $\mathcal{T}$ lo suficientemente bajas.

De una perspectiva más general, los ejemplos anteriores ilustran los objetivos que no es posible alcanzar por los modelos fenomenológicos de Langevin basados en procesos de Wiener. Las ecuaciones de Langevin de este tipo, y sus respectivas ecuaciones de Fokker-Planck, proveen una descripción simplificada de la dinámica microscópica inherente. Las funciones coeficiente en la ecuación de Langevin/Fokker-Planck permiten construir procesos estocásticos que exhiben el mismo comportamiento de relajación y aproximan la misma distribución estacionaria que el proceso físico real. Las distribuciones estacionarias a menudo pueden inferirse de principios termoestadísticos (e.g. máxima entropía), mientras que el comportamiento de relajación debe deducirse de la dinámica microscópica exacta. En muchos casos, los modelos estocásticos resultantes son suficientes para compararlos con la información experimental accesible, pero pueden volverse inexactos para describir correlaciones de mayor orden y/o la dinámica de relajación no próxima al estado asintótico.

Capítulo 4

El Movimiento Browniano Relativista en el Espacio Fase

El objetivo de este capítulo es estudiar y establecer la teoría de Langevin para movimientos Brownianos en el marco de la teoría especial de la relatividad. Se consideran ecuaciones diferenciales estocásticas que describen procesos de Markov en el espacio fase de una partícula. La razón principal para considerar procesos en el espacio fase, en lugar de procesos que solo involucren a la posición $\mathbf{X}_t$, se debe a que es imposible definir un proceso de Markov relativista no-trivial $\mathbf{X}_t$ en el espacio-tiempo de Minkowski; como lo ha demostrado R. Dudley [14] en 1966. Los desarrollos de esta sección pueden considerarse la contraparte relativista de aquellos tratados en el Capítulo 3.

Desde una perspectiva conceptual, pueden distinguirse dos enfoques complementarios en la modelación de procesos estocásticos que retratan la dinámica de una partícula Browniana relativista. El primero de ellos consiste en postular ecuaciones de evolución para la densidad de las probabilidades de transición del proceso estocástico; el ejemplo más típico son ecuaciones diferenciales parciales del tipo Fokker-Planck. En un marco relativista, la cota en la velocidad de propagación de las partículas impone restricciones bastante estrictas en la estructura de las ecuaciones de evolución. Alternativamente, un segundo enfoque es comenzar postulando ecuaciones diferenciales estocásticas como modelos fenomenológicos y, posteriormente, derivar ecuaciones de evolución. En el presente capítulo se expone esta última vía, la cual tiene como ventaja que el origen físico de la mecánica estocástica está “menos escondido” en comparación con otros enfoques.

En la primera sección de este capítulo se establece la ecuación de Langevin relativista, se discuten algunas diferencias con el caso no-relativista y se calculan las ecuaciones de Fokker-Planck para la densidad de la trayectoria en el espacio fase. En la sección 2 se trata el caso de un baño térmico estacionario, isotrópico y homogéneo, el cual está en ausencia de fuerzas externas; además se establece un teorema de fluctuación-disipación para este caso.

4.1. Ecuaciones de Langevin y Fokker-Planck relativistas

Cuando se consideran ecuaciones de Langevin como modelos del movimiento Browniano, implícitamente se asume que es posible y razonable separar los grados de libertad de la partícula Browniana de los del ambiente (baño térmico). Desde este punto de vista, se pueden especificar dos marcos de referencia distinguibles: el marco del laboratorio Σ, definido como el marco de referencia inercial del baño térmico, y el marco inercial Σ_* que se está comoviendo con la partícula Browniana en un instante de tiempo dado.

Para comenzar se considera la cuestión de como modelar la dinámica de una partícula Browniana relativista en el marco del laboratorio Σ, el cual se supondrá que tiene $d \in \mathbb{N}$ dimensiones espaciales.

4.1.1. La ecuación de Langevin relativista: principios generales de construcción

Considérese el movimiento de una partícula Browniana relativista puntual en Σ. Supóngase que tal partícula tiene masa en reposo $M > 0$ y que está inmersa en un baño térmico que consiste, por ejemplo, de partículas líquidas más pequeñas (masa en reposo $m \ll M$) a temperatura constante $\mathcal{T}$. Las cantidades M, m y $\mathcal{T}$ corresponden a las medidas en el marco de referencia inercial Σ. La posición, la velocidad, el momento relativista y la energía relativista de la partícula Browniana en Σ para cualquier tiempo t de Σ, se toman como $\mathbf{X}_t$, $\mathbf{V}_t := \frac{d\mathbf{X}_t}{dt}$, $\mathbf{P}_t := M\gamma\left(\mathbf{V}_t\right)\mathbf{V}_t$ y $P_t^0 := \left(M^2 + \mathbf{P}_t^2\right)^{1/2}$, respectivamente. Debido al comportamiento aleatorio de la partícula Browniana, se asume que $\{\mathbf{X}_t, t \geq 0\}$, $\{\mathbf{P}_t, t \geq 0\}$, $\{\mathbf{V}_t, t \geq 0\}$ y $\left\{P_t^0, t \geq 0\right\}$

son procesos estocásticos en $\mathbb{R}^d$ definidos en algún espacio de probabilidad.

Todos los modelos estocásticos para la posición de la partícula Browniana relativista son procesos estocásticos que satisfacen la siguiente definición.

Definición 56 *Sea* $\{\mathbf{Y}_t, t \geq 0\}$ *un proceso estocástico que toma valores en* $\mathbb{R}^d$ *y que es diferenciable en todas partes respecto a la variable temporal. Diremos que* $\mathbf{Y}$ *es un proceso estocástico relativista si satisface*

$$\left|\frac{d\mathbf{Y}_t}{dt}\right| < c = 1 \quad \forall t \geq 0.$$

Nótese que la posición $\mathbf{X}_t$ es un proceso estocástico relativista si, y sólo si,

$$\frac{|\mathbf{P}_t|}{\left(M^2 + \mathbf{P}_t^2\right)^{1/2}} = \frac{|\mathbf{P}_t|}{P_t^0} = |\mathbf{V}_t| = \left|\frac{d\mathbf{X}_t}{dt}\right| < 1 \quad \forall t \geq 0; \tag{4.1}$$

lo cual obviamente se cumple.

Observación 57 *Bajo la definición de proceso estocástico relativista, queda establecida la propiedad de que la partícula Browniana no puede ir más rápido que la luz.*

De particular interés son los modelos del movimiento Browniano que pueden ser expresados como ecuaciones diferenciales estocásticas similares a las ecuaciones de Langevin no-relativistas (3.1). La idea básica para construir tales procesos consiste en asociar integrales estocásticas solo al momento relativista $\mathbf{P} = \left(P^i\right)$ de la partícula Browniana, el cual puede tomar valores en todo $\mathbb{R}^d$. Haciendo esto se asegura que la condición (4.1) se cumpla automáticamente.

Los modelos de movimiento Browniano relativista que se desarrollan en esta tesis son ecuaciones similares a la ecuación de Langevin no-relativista para la posición $\mathbf{X}_t$ y el momento $\mathbf{P}_t$ de la partícula Browniana, parametrizadas en el tiempo de Σ. Antes de escribir explícitamente ecuaciones diferenciales estocásticas para las componentes del momento relativista $\mathbf{P} = \left(P^i\right)$, conviene dar una pequeña explicación del porque se decidió parametrizar en términos del tiempo de Σ.

La elección del parámetro temporal: ¿Por qué el tiempo de Σ?

Una suposición (postulado) fundamental de la física Galileana no-relativista es la existencia de un tiempo universal. Por consiguiente, en la teoría no-relativista de Langevin, es bastante natural identificar al tiempo universal t con el parámetro temporal del proceso estocástico conductor, el cual se toma como un proceso de Wiener multi-dimensional $\mathbf{W}_t$. En contraste, en relatividad especial la noción de tiempo se vuelve marco-dependiente y, por lo tanto, es importante especificar cual parámetro de tiempo se utiliza para cuantificar las fluctuaciones del proceso estocástico conductor.

Cuando se considera el movimiento estocástico de una partícula Browniana, pueden distinguirse dos parámetros temporales característicos: el tiempo t del marco de referencia inercial Σ, el cual puede ser interpretado como el tiempo propio del baño térmico, y el tiempo propio τ de la partícula Browniana. En principio, cualquiera de los dos tiempos puede usarse para formular ecuaciones diferenciales estocásticas para las componentes espaciales del momento relativista de la partícula, $\mathbf{P} = \left(P^i\right)$. Sin embargo, en el tratamiento convencional de Langevin del movimiento Browniano, usualmente se considera a la fricción y al ruido como fuerzas externamente impuestas que actúan sobre la partícula Browniana y reflejan fluctuaciones en el baño térmico. Por lo tanto, parece más natural caracterizar las propiedades (estadísticas) de la fuerza de Langevin en términos del tiempo del laboratorio t. Sin embargo, como se discute en el Capítulo 6, es posible reparametrizar una ecuación de Langevin dada en términos del tiempo propio asociado.

La ecuación de Langevin en el tiempo del laboratorio

Supóngase que la partícula Browniana está en presencia de un campo de fuerza determinístico externo. La dinámica estocástica de la partícula Browniana relativista en Σ puede ser descrita por la ecuación diferencial estocástica parametrizada por el tiempo de Σ

$$dX_t^i = \frac{P_t^i}{P_t^0} dt, \tag{4.2a}$$

$$dP_t^i = F^i\left(t, \mathbf{X}_t, \mathbf{P}_t\right) dt - a^{ij}\left(t, \mathbf{X}_t, \mathbf{P}_t\right) P_t^j dt + c^{ij}\left(t, \mathbf{X}_t, \mathbf{P}_t\right) \odot dW_t^j, \tag{4.2b}$$

donde:

a) X_t^i y P_t^i $i = 1, \ldots, d$, denotan las componentes espaciales en Σ de la posición y el momento relativista;

b) $\odot \in \{*, \circ, \bullet\}$ señala el tipo de integral estocástica considerado;

c) $\mathbf{W}_t = \left(W_t^1, .., W_t^d\right)$ es un proceso de Wiener d-dimensional;

d) $F^i : [0, \infty) \times \mathbb{V} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $a^{ij} : [0, \infty) \times \mathbb{V} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y $c^{ij} : [0, \infty) \times \mathbb{V} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $i, j = 1, \ldots, d$ son funciones C^∞, con $\mathbb{V}$ el conjunto abierto y conexo al cual esta restringido el movimiento de la partícula Browniana;

e) F^i denota el campo de fuerza un campo de fuerza externo determinístico, $-a^{ij}(t, \mathbf{X}_t, \mathbf{P}_t) P_t^j$ es una fuerza de fricción fenomenológica y el término $c^{ij}(t, \mathbf{X}_t, \mathbf{P}_t) \odot dW_t^j$ representa una fuerza de Langevin relativista.

A la igualdad (4.2) se le denomina *ecuación de Langevin relativista (en el marco de referencia* Σ*)*. En el desarrollo de la tesis, se trata sólo el caso $\left(F^i\right) \equiv 0$. Por ser F^i, a^{ij} y c^{ij} de clase C^∞, la ecuación (4.2) tiene sentido matemático para los tres tipos de integral considerados. La existencia y unicidad de la solución de la ecuación de Langevin relativista (4.2) depende de la forma de las funciones F^i, a^{ij} y c^{ij}, así como de la condición inicial considerada. En el Capítulo 2 se establecieron algunos resultados que tratan claramente este tema. A lo largo de esta tesis, se supondrá que la ecuación de Langevin (4.2) tiene solución única; solo se demostrará la existencia y unicidad para los ejemplos clásicos de modelos del movimiento Browniano relativista. Además se supondrá que las condiciones iniciales $\mathbf{X}_0$ y $\mathbf{P}_0$ de la ecuación (4.2) son deterministas, a menos que se indique lo contrario.

Observación 58 *Si además de la condiciones ya mencionadas, la ecuación de Langevin (4.2) cumple la restricción de crecimiento del Teorema 29 de existencia y unicidad y tiene una condición inicial* $(\mathbf{X}_0, \mathbf{P}_0)$ *independiente de* $\mathbf{W}_t$ $\forall t \geq 0$*, tal igualdad tiene solución única.*

Una posible motivación de la ecuación de Langevin relativista (4.2) es la analogía con el caso no-relativista, sin embargo, esta es una razón muy pobre. Una motivación más adecuada de esta ecuación y una forma de encontrar coeficientes a^{ij} y c^{ij} realistas se discute en el Capítulo 7.

Las ecuaciones (4.2) gobiernan a las componentes espaciales de los cuadrivectores $\left(X_t^0, \mathbf{X}_t\right)$ y $\left(P_t^0, \mathbf{P}_t\right)$. Además, es posible agregar una ecuación para la componente temporal X^0 poniendo

$$dX_t^0 = \frac{P_t^0}{P_t^0} dt = dt,$$

lo cual es consistente con el hecho de que $X_t^0 = t$. La ecuación para la componente de energía P_t^0 puede derivarse de la ecuación (4.2b) al aplicar las fórmulas de cambio de variable para ecuaciones diferenciales estocásticas al proceso $P_t^0 := \left(M^2 + \mathbf{P}_t^2\right)^{1/2}$.

Proposición 59 *Supongamos que se cumple la ecuación (4.2). Entonces, el proceso* $P_t^0 := \left(M^2 + \mathbf{P}_t^2\right)^{1/2}$ *satisface la ecuación*

$$\begin{aligned} dP_t^0 \;=\; & \left\{\left(F^i\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right) - a^{ij}\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)P_t^j\right)\frac{P_t^i}{P_t^0} + \lambda_{\odot}\frac{D^{ij}\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)}{2}\left[\frac{\delta_{ij}}{P_t^0} - \frac{P_t^iP_t^j}{\left(P_t^0\right)^3}\right]\right\}dt \\ & + \frac{P_t^i}{P_t^0}c^{ir}\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)\odot dW_t^r, \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde $D^{ij}\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right) := c^{ir}\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)c^{jr}\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)$*,* δ_{ij} *es una delta de Kronecker y, dependiendo de la integral estocástica,* $\lambda_* = 1$*,* $\lambda_\circ = 0$ *y* $\lambda_\bullet = -1$*.*

Demostración. Para demostrar lo deseado, usaremos la fórmula de Itô (26) y sus análogos de Stratonovich (47) y backward (51); lo demostraremos primero para la integral de Itô. Definamos $u : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $u\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right) = \left(M^2 + \mathbf{p}^2\right)^{1/2}$. Nótese que $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x^i}$ y $\frac{\partial u}{\partial p^i}$ existen $\forall i \in \{1,\ldots,d\}$ y que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x^i}\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial p^i}\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right) &= \frac{p^i}{\left(M^2 + \mathbf{p}^2\right)^{1/2}}, \end{aligned}$$

para todo $\left(x^1,\ldots,x^d,p^1,\ldots,p^d,t\right) = \left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [0,\infty)$.

Por otro lado, de lo anterior se sigue que $\frac{\partial^2 u}{\partial p^j \partial p^i}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^i}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial p^i}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial p^j \partial x^i}$ existen para $i,j = 1,\ldots,d$ y que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \left(p^i\right)^2}\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right) &= \frac{M^2 + \mathbf{p}^2 - \left(p^i\right)^2}{\left(M^2 + \mathbf{p}^2\right)^{3/2}}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial p^j \partial p^i}\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right) &= -\frac{p^jp^i}{\left(M^2 + \mathbf{p}^2\right)^{3/2}}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \left(x^i\right)^2}\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^i}\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial p^i}\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial p^i \partial x^j}\left(\mathbf{x},\mathbf{p},t\right) = 0, \end{aligned}$$

para cualesquiera $\left(x^1,\ldots,x^d,p^1,\ldots,p^d,t\right)=(\mathbf{x},\mathbf{p},t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times[0,\infty)$ e $i,j\in\{1,\ldots,d\}$, $i\neq j$.

De la definición de u y lo hecho arriba, es claro que u es continua y que $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x^i}$, $\frac{\partial u}{\partial p^i}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial p^j\partial p^i}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^j\partial x^i}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^j\partial p^i}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial p^j\partial x^i}$ son continuas para $i,j=1,\ldots,d$. Entonces podemos aplicar la fórmula de Itô al proceso $P_t^0:=\left(M^2+\mathbf{P}_t^2\right)^{1/2}=u\left(\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t,t\right)$. Mediante la fórmula de Itô y evitando el criterio de sumación de Einstein para ganar claridad, llegamos a que

$$
\begin{aligned}
dP_t^0 &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial u}{\partial p^i}\left(\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t,t\right)dP_t^i+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d\frac{\partial^2 u}{\partial p^j\partial p^i}\left(\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t,t\right)\sum_{r=1}^d c^{ir}\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)c^{jr}\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)dt\\
&= \sum_{i=1}^d\frac{P_t^i}{P_t^0}dP_t^i+\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^d\left(\frac{\left(P_t^0\right)^2-\left(P_t^i\right)^2}{\left(P_t^0\right)^3}-\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^d\frac{P_t^jP_t^i}{\left(P_t^0\right)^3}D^{ij}\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)\right)\right]dt\\
&= \sum_{i=1}^d\left[F^i\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)-\sum_{j=1}^d a^{ij}\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)P_t^j\right]\frac{P_t^i}{P_t^0}dt+\sum_{i=1}^d\frac{P_t^i}{P_t^0}\sum_{j=1}^d c^{ij}\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)*dW_t^j\\
&\quad+\frac{1}{2}\left[\frac{d}{P_t^0}-\sum_{i,j=1}^d\frac{P_t^jP_t^i}{\left(P_t^0\right)^3}D^{ij}\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)\right]dt\\
&= \sum_{i,j=1}^d\frac{P_t^i}{P_t^0}c^{ij}\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)*dW_t^j+\sum_{i=1}^d\left(F^i\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)-\sum_{j=1}^d a^{ij}\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)P_t^j\right)\frac{P_t^i}{P_t^0}dt\\
&\quad+\sum_{i,j=1}^d\frac{D^{ij}\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)}{2}\left(\frac{\delta_{ij}}{P_t^0}-\frac{P_t^jP_t^i}{\left(P_t^0\right)^3}\right)dt.
\end{aligned}
$$

Aplicando el criterio de sumación de Einstein a la ecuación anterior, tenemos que

$$
\begin{aligned}
dP_t^0 &= \frac{P_t^i}{P_t^0}c^{ij}\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)*dW_t^j+\left(F^i\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)-a^{ij}\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)P_t^j\right)\frac{P_t^i}{P_t^0}dt\\
&\quad+\frac{D^{ij}\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)}{2}\left[\frac{\delta_{ij}}{P_t^0}-\frac{P_t^jP_t^i}{\left(P_t^0\right)^3}\right]dt\\
&= \left\{\left(F^i\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)-a^{ij}\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)P_t^j\right)\frac{P_t^i}{P_t^0}+\frac{D^{ij}\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)}{2}\left[\frac{\delta_{ij}}{P_t^0}-\frac{P_t^jP_t^i}{\left(P_t^0\right)^3}\right]\right\}dt\\
&\quad+\frac{P_t^i}{P_t^0}c^{ij}\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)*dW_t^j,
\end{aligned}
$$

lo que prueba lo deseado para la integral de Itô. Las pruebas para el caso de Stratonovich y Backward-Itô son análogas a esta demostración. ■

En el Capítulo 6 se discute la forma en que las ecuaciones de Langevin parametrizadas por el tiempo del laboratorio pueden ser reparametrizadas en términos del tiempo propio de la partícula y del tiempo de un observador en movimiento. La reparametrización en términos del tiempo propio es de especial interés, pues este tiempo es un invariante en todos los marcos de referencia. Una motivación de la ecuación de Langevin (4.2) y una forma de obtener coeficientes α y D "realistas" se discute en el Capítulo 7.

4.1.2. Las ecuaciones de Fokker-Planck

Las condiciones para la existencia de la densidad de transición del proceso de Langevin (4.2) dependen de la forma que tomen las funciones coeficiente involucradas F^i, a^{ij} y c^{ij}. En esta tesis no se hace énfasis en estas condiciones pues se construyen modelos para el movimiento Browniano relativista a partir del supuesto de que el proceso (4.2) tiene densidad estacionaria, lo cual es suficiente para el análisis que se hace. Las propiedades que debe tener la ecuación de Langevin (4.2) para que su densidad de transición (si la tiene) cumpla con la ecuación de Fokker-Planck son mucho más sencillas, aunque tampoco se hace gran énfasis en ellas. Los casos en los que la ecuación de Fokker-Planck es necesaria, corresponden todos a ecuaciones de Langevin autónomas, en las cuales se supone de entrada la existencia de la densidad estacionaria y solo se necesita utilizar la ecuación de Fokker-Planck estacionaria. En este último caso, dada una condición inicial como en el teorema 29 para la ecuación (4.2), la validez de la ecuación de Fokker-Planck queda asegurada debido a la existencia de la densidad estacionaria, la autonomía de la ecuación de Langevin y los supuestos hechos sobre los coeficientes de esta ecuación.

En el Capítulo 2 se dieron algunas condiciones para la validez de la ecuación de Fokker-Planck y la existencia de la densidad de transición en el caso unidimensional. Considerando la información anterior, es fácil ver la forma que tiene la ecuación de Fokker-Planck.

Proposición 60 *Sean $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^d$ y $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^d$ conjuntos abiertos y conexos. Supongamos lo siguiente:*

(a) La ecuación de Langevin (4.2) satisface la condición de Lipschitz (2.8) y es autónoma, es

decir que los coeficientes F^i, a^{ij} y c^{ij} no dependen del tiempo t.

(b) La ecuación (4.2) tiene condición inicial $(\mathbf{X}_0, \mathbf{P}_0) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0)$, siendo $(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0)$ una variable aleatoria en $\mathbb{R}^{2d}$ con distribución P_0 e independiente de $\mathbf{W}_t$ $\forall t \geq 0$;

(c) La densidad de transición $p(s, \mathbf{z}, r, \mathbf{y})$ del proceso (4.2) existe y está definida en $[0, \infty) \times \mathbb{E} \times [s, \infty) \times \mathbb{E}$, con $\mathbb{E} := \mathbb{V} \times \mathbb{M}$;

(d) Dado $(s, \mathbf{z}) \in [0, \infty) \times \mathbb{E}$, la función $p(s, \mathbf{z}, \cdot, \cdot)$ es de clase C^1 en el conjunto $[s, \infty) \times \mathbb{E}$.

Entonces, la densidad del proceso $(\mathbf{X}_t, \mathbf{P}_t)$ satisface (según el tipo de integral):

1. *En el caso de la integral de Itô '$\odot = *$', la densidad $f_*(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ del proceso $(\mathbf{X}_t, \mathbf{P}_t)$ cumple la ecuación de Fokker-Planck*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p^i}{p^0}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) f_* = \frac{\partial}{\partial p^i}\left[\left(-F^i + a^{ij}p^j\right) f_* + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p^k}\left(c^{ir}c^{kr} f_*\right)\right], \tag{4.4a}$$

para $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \in [0, \infty) \times \mathbb{V} \times \mathbb{M}$;

2. *Cuando se toma la integral de Stratonovich '$\odot = \circ$', la ecuación de Fokker-Planck para la densidad $f_\circ(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ del proceso $(\mathbf{X}_t, \mathbf{P}_t)$ es*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p^i}{p^0}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) f_\circ = \frac{\partial}{\partial p^i}\left[\left(-F^i + a^{ij}p^j - \frac{1}{2}c^{kr}\frac{\partial}{\partial p^k}c^{ir}\right) f_\circ + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p^k}\left(c^{ir}c^{kr} f_\circ\right)\right], \tag{4.4b}$$

para los puntos $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \in [0, \infty) \times \mathbb{V} \times \mathbb{M}$;

3. *En el caso de la integral de backward '$\odot = \bullet$', la densidad $f_\bullet(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ del proceso $(\mathbf{X}_t, \mathbf{P}_t)$ satisface la ecuación de Fokker-Planck*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p^i}{p^0}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) f_\bullet = \frac{\partial}{\partial p^i}\left[\left(-F^i + a^{ij}p^j - c^{kr}\frac{\partial}{\partial p^k}c^{ir}\right) f_\bullet + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p^k}\left(c^{ir}c^{kr} f_\bullet\right)\right], \tag{4.4c}$$

en $[0, \infty) \times \mathbb{V} \times \mathbb{M}$.

Observación 61 *Hay dos cosas que conviene tener en cuenta:*

(i) Una ecuación diferencial estocástica autónoma que satisface las condiciones (a) tiene una única solución global.

(ii) Si se reemplaza (a) por las condiciones del Teorema 29, el resultado sigue siendo cierto. Sin embargo, solo necesitaremos la ecuación de Fokker-Planck para ecuaciones autónomas.

Demostración. Comenzaremos con el caso de la ecuación de Langevin-Itô. Conviene establecer algo de notación para facilitar el entendimiento de la prueba. Definamos $g : [0, \infty) \times \mathbb{V} \times \mathbb{M} \to \mathbb{R}^d$ y $b : [0, \infty) \times \mathbb{V} \times \mathbb{M} \to \mathrm{Mat}_{2d\times 2d}(\mathbb{R})$ dadas por $g^i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{p^i}{(M^2+\mathbf{p}^2)^{1/2}}$, $g^{i+d}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = F^i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) - a^{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) p^j$, $b^{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0$, $b^{i+d,j}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0$, $b^{i,j+d}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0$ y $b^{i+d,j+d}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = c^{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ para $i, j \in \{1, \ldots, d\}$.

Debido a que F^i, a^{ij} y c^{ij} $i, j = 1, \ldots, d$ no dependen del tiempo t, de los Teoremas 37 y 33 se sigue que $(\mathbf{X}_t, \mathbf{P}_t)$ es un proceso de difusión en $[0, \infty)$ con deriva $g(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ y matriz de difusión $B(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{c}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})[\mathbf{c}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})]^T$, siendo $\mathbf{c} := (c^{ij})$ y $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \in [0, \infty) \times \mathbb{V} \times \mathbb{M}$. El Teorema 37 también nos permite asegurar que las condiciones de la definición 106 para $(\mathbf{X}_t, \mathbf{P}_t)$ se cumplen uniformemente en $[0, \infty)$.

Por otro lado, debido a las condiciones impuestas en la ecuación de Langevin y la densidad de transición, se tiene que, para s y $\mathbf{z}$, fijos las derivadas $\frac{\partial}{\partial y^i}\left(g^i(t, \mathbf{y}) p(s, \mathbf{z}, r, \mathbf{y})\right)$ y $\frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j}\left(B^{ij}(t, \mathbf{y}) p(s, \mathbf{z}, r, \mathbf{y})\right)$ existen y son continuas para cualesquiera $\mathbf{y} \in \mathbb{E}$ y $t \geq s$.

Tomemos a $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = f_*(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ como la densidad del proceso $(\mathbf{X}_t, \mathbf{P}_t)$, la cual esta dada por la Observación 108. Entonces, teniendo en cuenta los dos párrafos anteriores, del Teorema 107 y la Observación 108 se sigue que

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d}\left[\frac{\partial g^i f}{\partial x^i} + \frac{\partial g^{i+d} f}{\partial p^i}\right] \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\left[\frac{\partial^2\left(B^{ij} f\right)}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2\left(B^{i,j+d} f\right)}{\partial x^i \partial p^j} + \frac{\partial\left({}^2 B^{i+d,j} f\right)}{\partial p^i \partial x^j} + \frac{\partial^2\left(B^{i+d,j+d} f\right)}{\partial p^i \partial p^j}\right] \\
&= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d}\left[\frac{p^i}{(M^2+\mathbf{p}^2)^{1/2}}\frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial g^{i+d} f}{\partial p^i}\right] - \frac{1}{2}\left[\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\left(\sum_{r=1}^{2d} b^{ir} b^{jr} f\right)\right] \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial p^j}\left(\sum_{r=1}^{2d} b^{ir} b^{j+d,r} f\right) + \frac{\partial^2}{\partial p^i \partial x^j}\left(\sum_{r=1}^{2d} b^{i+d,r} b^{jr} f\right) + \frac{\partial^2}{\partial p^i \partial p^j}\left(\sum_{r=1}^{2d} b^{i+d,r} b^{j+d,r} f\right)\right] \\
&= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d}\left[\frac{p^i}{p^0}\frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial g^{i+d} f}{\partial p^i}\right] - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\sum_{r=1}^{2d}\frac{\partial^2}{\partial p^i \partial p^j} b^{i+d,r} b^{j+d,r} f
\end{aligned}
$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^{d} \frac{p^i}{p^0}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) f + \sum_{i=1}^{d}\left(\frac{\partial}{\partial p^i}\left[F^i - \sum_{j=1}^{d} a^{ij}p^j\right] f\right) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\sum_{r=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial p^i \partial p^j} c^{ir}c^{jr} f$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^{d} \frac{p^i}{p^0}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) f + \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial}{\partial p^i}\left(\left[F^i - \sum_{j=1}^{d} a^{ij}p^j\right] f - \frac{1}{2}\sum_{j,r=1}^{d}\frac{\partial}{\partial p^j} c^{ir}c^{jr} f\right),$$

donde las funciones están evaluadas en el conjunto $[0,\infty)\times\mathbb{E} = [0,\infty)\times\mathbb{V}\times\mathbb{M}$. La ecuación anterior es equivalente a

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^{d} \frac{p^i}{p^0}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) f = \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial}{\partial p^i}\left[\left(-F^i + \sum_{j=1}^{d} a^{ij}p^j\right) f + \frac{1}{2}\sum_{j,r=1}^{d}\frac{\partial}{\partial p^j} c^{ir}c^{jr} f\right],$$

en $[0,\infty)\times\mathbb{V}\times\mathbb{M}$. Usando el criterio de sumación de Einstein, llegamos a que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{p^i}{p^0}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) f = \frac{\partial}{\partial p^i}\left[\left(-F^i + a^{ij}p^j\right) f + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p^k} c^{ik}c^{jk} f\right],$$

en $[0,\infty)\times\mathbb{V}\times\mathbb{M}$, lo que prueba lo deseado en el caso de la integral de Itô. Para las pruebas en el caso de Stratonovich y backward, conviene encontrar la ecuación de Langevin-Itô equivalente y luego proceder de una manera similar. ■

Observación 62 *La hipótesis sobre la condición C^1 de la densidad de transición, puede reemplazarse al solo pedir que, para s y $\mathbf{z}$ fijos, las derivadas $\frac{\partial}{\partial y^i}\left(g^i(t,\mathbf{y})\, p(s,\mathbf{z},r,\mathbf{y})\right)$ y $\frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j}\left(B^{ij}(t,\mathbf{y})\, p(s,\mathbf{z},r,\mathbf{y})\right)$ existan y sean continuas para cualesquiera $\mathbf{y}\in\mathbb{E}$ y $t\geq s$.*

De manera similar al caso no-relativista, la cantidad $f_{\odot}(t,\mathbf{x},\mathbf{p})\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x^1\ldots\mathrm{d}x^d\mathrm{d}p^1\ldots\mathrm{d}p^d$ se interpreta como la probabilidad de encontrar la partícula Browniana al tiempo t de Σ en el conjunto infinitesimal $\prod_{i=1}^{d}\left[x^i, x^i+\mathrm{d}x^i\right]\times\prod_{i=1}^{d}\left[p^i,p^i+\mathrm{d}p^i\right]$, donde $\mathbf{x}=\left(x^i\right)$ y $\mathbf{p}=\left(p^i\right)$ se corresponden con la posición y el momento medidos en Σ.

Las condiciones iniciales deterministas $\mathbf{X}_0=\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{P}_0=\mathbf{p}_0$ se convierten en la condición de frontera 'localizada'

$$f_{\odot}(0,\mathbf{x},\mathbf{p}) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0) \quad \forall(\mathbf{x},\mathbf{p})\in\mathbb{V}\times\mathbb{M}.$$

Debido a la linealidad de las ecuaciones (4.4), es posible obtener soluciones más generales para estas ecuaciones al considerar una distribución inicial $f_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0)$ no localizada. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que, en un marco relativista, es muy complicado determinar información inicial Σ-isócrona por medio de mediciones experimentales.

4.2. Movimientos libres en un baño isotrópico y las relaciones de Einstein

De manera similar al caso no relativista, algunas restricciones físicas (y, por tanto, matemáticas) sobre las funciones a^{ij} y c^{ij} surgen al considerar propiedades de simetría en el baño térmico y del requisito de que las ecuaciones (4.2) deben reproducir la distribución estacionaria y el comportamiento de relajación correctos. Por ejemplo, en ausencia de campos de fuerza externos y en caso de un baño térmico estacionario, isotrópico y homogéneo en el marco Σ, las funciones coeficiente de la ecuación (4.2) toman la forma

$$F^i = 0, \qquad a^{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \alpha(\mathbf{p})\,\delta_{ij}, \qquad c^{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = [2D(\mathbf{p})]^{1/2}\,\delta_{ij}$$

donde $\alpha : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y $D : \mathbb{R}^d \to (0, \infty)$ son C^∞; y δ_{ij} es una delta de Kronecker. La estacionariedad y la homogeneidad implican que las funciones a^{ij} y c^{ij} solo dependen del momento (y no del tiempo y la posición); mientras que la isotropía causa la forma diagonal de c^{ij} (por aquello de que se presentan las mismas propiedades, independientemente de la dirección en que se midan).

Bajo los supuestos establecidos (baño estacionario, isotrópico y homogéneo en Σ), las funciones α y D dependen sólo del momento de las partícula Browniana. Sin embargo, es posible encontrar funciones de ruido y fricción que dependan de la energía relativista de la partícula Browniana. Defínanse $\widehat{\alpha} : [M, \infty) \to \mathbb{R}^d$ y $\widehat{D} : [M, \infty) \to (0, \infty)$ dadas por $\widehat{\alpha}\left(p^0\right) = \alpha(\mathbf{p})$ y $\widehat{D}\left(p^0\right) = D(\mathbf{p})$. Así, en este caso, la ecuación de Langevin relativista (4.2) se simplifica de la siguiente forma

$$dX_t^i = \left(\frac{P_t^i}{P_t^0}\right) dt, \tag{4.5a}$$

$$dP_t^i = -\widehat{\alpha}\left(P_t^0\right) P_t^i dt + \left[2\widehat{D}\left(P_t^0\right)\right]^{1/2} \odot dW_t^i, \tag{4.5b}$$

mientras que las ecuaciones de Fokker-Planck (4.4) toman la forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{p^i}{p^0}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)f_* = \frac{\partial}{\partial p^i}\left[\widehat{\alpha}p^i f_* + \frac{\partial}{\partial p^i}\left(\widehat{D}f_*\right)\right], \tag{4.6a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{p^i}{p^0}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)f_\circ = \frac{\partial}{\partial p^i}\left[\widehat{\alpha}p^i f_\circ + \widehat{D}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial p^i}\left(\widehat{D}^{\frac{1}{2}}f_\circ\right)\right], \tag{4.6b}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{p^i}{p^0}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)f_\bullet = \frac{\partial}{\partial p^i}\left[\widehat{\alpha}p^i f_\bullet + \widehat{D}\frac{\partial}{\partial p^i}f_\bullet\right]. \tag{4.6c}$$

Conviene notar que, debido a que α y D son funciones C^∞, las funciones $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{D}$ son C^∞ en (M,∞).

Una restricción adicional sobre las funciones $\alpha(\mathbf{p}) = \widehat{\alpha}\left(p^0\right)$ y $D(\mathbf{p}) = \widehat{D}\left(p^0\right)$ surge de consideraciones termoestadísticas: si el movimiento de la partícula Browniana relativista está restringido a un volumen finito $\mathbb{V}\subset\mathbb{R}^d$ (abierto y conexo) y el baño térmico esta en equilibrio térmico a temperatura $\mathcal{T} = (k_B\beta)^{-1}$, entonces el proceso $(\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t)$ debe tener como densidad estacionaria $f_\infty(\mathbf{x},\mathbf{p})$ a una función de Jüttner espacialmente homogénea[1]

$$f_\infty(\mathbf{x},\mathbf{p}) = \mathcal{N}\exp\left[-\beta\left(M^2+\mathbf{p}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\mathcal{J}(x;\mathbb{V}), \tag{4.7}$$

siendo $\mathcal{J}(x;\mathbb{V})$ la función indicadora del volumen accesible $\mathbb{V}$ y $\mathcal{N}$ una constante de normalización. Insertando la ecuación (4.7) dentro de las ecuaciones de Fokker-Planck (4.4), se encuentra que, dependiendo de la integral considerada, las funciones $\alpha(\mathbf{p}) = \widehat{\alpha}\left(p^0\right)$ y $D(\mathbf{p}) = \widehat{D}\left(p^0\right)$ satisfacen la siguientes relaciones de fluctuación-disipación.

Teorema 63 (Relaciones relativistas de Einstein) *Sea $f:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to[0,\infty)$ una función de densidad de Jüttner espacialmente homogénea en $\mathbb{V}\subset\mathbb{R}^d$, dada por*

$$f(\mathbf{x},\mathbf{p}) = \mathcal{N}\exp\left[-\beta\left(M^2+\mathbf{p}^2\right)^{1/2}\right]\mathcal{J}(x;\mathbb{V}).$$

Si la densidad anterior satisface las ecuaciones de Fokker-Planck (4.6), entonces los coeficientes $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{D}$ se cumplen las siguientes relaciones:

[1] Cuando decimos "debe tener", nos referimos a que es una condición para que la ecuación (4.2) exhiba el comportamiento de equilibrio térmico.

(i) Para la integral de Itô '$\odot = *$',

$$0 = \widehat{\alpha}\left(p^0\right)p^0 - \beta\widehat{D}\left(p^0\right) + \widehat{D}'\left(p^0\right) \quad \forall p^0 \in (M,\infty)\,; \tag{4.8a}$$

(ii) En el caso de la integral de Stratonovich, '$\odot = \circ$',

$$0 = \widehat{\alpha}\left(p^0\right)p^0 - \beta\widehat{D}\left(p^0\right) + \frac{\widehat{D}'\left(p^0\right)}{2} \quad \forall p^0 \in (M,\infty)\,; \tag{4.8b}$$

(iii) Para la integral Backward-Itô '$\odot = \circ$',

$$0 = \widehat{\alpha}\left(p^0\right)p^0 - \beta\widehat{D}\left(p^0\right) \quad \forall p^0 \in (M,\infty)\,. \tag{4.8c}$$

Observación 64 *Las relaciones relativistas de Einstein también se conocen como relaciones de fluctuación-disipación relativistas.*

Demostración. Empezaremos con el caso de Itô. De la ecuación (4.6a) se sigue que

$$\widehat{\alpha}\left(p^0\right)p^i f(\mathbf{x},\mathbf{p}) + \frac{\partial}{\partial p^i}\left(\widehat{D}\left(p^0\right)f(\mathbf{x},\mathbf{p})\right) = c \quad \forall(\mathbf{x},\mathbf{p}) \in \mathbb{V}\times\mathbb{R}^d,$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante. Derivando en la última ecuación, se encuentra que $c = 0$ y que

$$\begin{aligned} 0 &= \widehat{\alpha}\left(p^0\right)p^i f(\mathbf{x},\mathbf{p}) + \frac{\partial}{\partial p^i}\left(\widehat{D}\left(p^0\right)f(\mathbf{x},\mathbf{p})\right) = \\ &= \widehat{\alpha}\left(p^0\right)p^i f(\mathbf{x},\mathbf{p}) + \frac{p^i}{p^0}\frac{\partial\widehat{D}\left(p^0\right)}{\partial p^0}f(\mathbf{x},\mathbf{p}) - \beta\frac{p^i}{p^0}\widehat{D}\left(p^0\right)f(\mathbf{x},\mathbf{p}) \quad \forall(\mathbf{x},\mathbf{p}) \in \mathbb{V}\times\mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

De lo anterior se obtiene que

$$0 = \widehat{\alpha}\left(p^0\right)p^0 + \frac{\partial\widehat{D}\left(p^0\right)}{\partial p^0} - \beta\widehat{D}\left(p^0\right) \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^d - \{0\}\,,$$

o lo que es equivalente

$$0 = \widehat{\alpha}\left(p^0\right)p^0 + \widehat{D}'\left(p^0\right) - \beta\widehat{D}\left(p^0\right) \quad \forall p^0 \in (M,\infty)\,.$$

Esta última igualdad prueba lo deseado en el caso de Itô. En los otros dos casos se procede análogamente. ■

Comparando las relaciones relativistas de Einstein (4.8) con la relación no-relativista (3.9), puede observarse que en el caso relativista la masa ha sido reemplazada por la energía p^0. Las relaciones relativistas de Einstein proporcionan condiciones que deben satisfacer los coeficientes de ruido y fricción para que la ecuación de Langevin modele adecuadamente la dinámica estocástica de una partícula Browniana que se encuentra en ausencia de fuerzas externas e inmersa en un baño termalizado (equilibrio térmico), estacionario, isotrópico y homogéneo en Σ.

Capítulo 5

Ejemplos Unidimensionales y el Desplazamiento Cuadrático Medio

En este Capítulo se consideran algunos ejemplos de modelos del movimiento Browniano relativista. Presentamos los detalles y cálculos del caso unidimensional ($d = 1$). La generalización a dimensiones mayores es directa aunque los cálculos pueden ser más tediosos. Se comienza estableciendo las ecuaciones diferenciales estocásticas para el proceso energía P_t^0 y el proceso velocidad $V_t := \frac{P_t}{P_t^0}$ [1]. Se discuten resultados para la constante de difusión asintótica de algunos ejemplos de movimiento Browniano tratados.

5.1. Consideraciones generales y las ecuaciones de la energía y la velocidad

En este Capítulo, se considera que la partícula Browniana está inmersa en un baño térmico estacionario, isotrópico y homogéneo, que tiene $d = 1$ dimensiones espaciales. También se supone que el baño térmico está en estado de equilibrio a temperatura $\mathcal{T}$ y en ausencia de fuerzas

[1] Debido a que se trabajara en dimensión uno, utilizaremos X_t, P_t y V_t, en lugar de $\mathbf{X}_t$, $\mathbf{P}_t$ y $\mathbf{V}_t$, para denotar la posición, momento y velocidad, respectivamente, de la partícula Browniana relativista.

externas. Bajo estas condiciones, la ecuación de Langevin del proceso (X_t, P_t) toma la forma

$$
\begin{aligned}
dX_t &= \frac{P_t}{P_t^0} dt, && (5.1a)\\
dP_t &= -\alpha_{\odot}(P_t) P_t dt + [2D(P_t)]^{1/2} \odot dW_t. && (5.1b)
\end{aligned}
$$

Dado que se quiere que la ecuación anterior genere procesos estocásticos equivalentes para cada una de las integrales, se pide que

$$
\begin{aligned}
\alpha_{\circ}(p) &= \alpha_{\bullet}(p) - \frac{D'(p)}{2p}, && (5.2a)\\
\alpha_{*}(p) &= \alpha_{\bullet}(p) - \frac{D'(p)}{p}, && (5.2b)
\end{aligned}
$$

para todo $p \in \mathbb{R} - \{0\}$. Estas igualdades son una consecuencia directa de las condiciones de equivalencia entre ecuaciones diferenciales estocásticas (46) y (50) que se describieron en el Capítulo 2. Hay otras formas de expresar la equivalencia de las ecuaciones diferenciales, sin embargo se elige esta por conveniencia, como más adelante se verá.

Proposición 65 *Supongamos que la ecuación (5.1) se cumple. Entonces, bajo las relaciones (5.2), los siguientes procesos son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
dP_t &= -\alpha_{\bullet}(P_t) P_t dt + [2D(P_t)]^{1/2} \bullet dW_t\\
dP_t &= -\alpha_{\circ}(P_t) P_t dt + [2D(P_t)]^{1/2} \circ dW_t\\
dP_t &= -\alpha_{*}(P_t) P_t dt + [2D(P_t)]^{1/2} * dW_t
\end{aligned}
$$

Además, como el baño térmico está termalizado (en equilibrio térmico) a temperatura $\mathcal{T}$, tenemos que la densidad estacionaria de momentos del proceso (5.1) debe ser una función de Jüttner unidimensional de la forma

$$
\phi_{\infty}(p) = \mathcal{N} \exp\left(-\beta \left(M^2 + p^2\right)^{1/2}\right) \quad \forall p \in \mathbb{R}, \tag{5.3}
$$

siendo $\mathcal{N}$ una constante de normalización y $\mathcal{T} = (k_B \beta)^{-1}$. Luego, los coeficientes de ruido y fricción de la ecuación (5.1) deben satisfacer las relaciones de Einstein (4.8), las cuales pueden escribirse de manera alternativa como en la proposición que sigue.

Proposición 66 *Supongamos la ecuación (5.1) se cumple y que su densidad estacionaria de momentos ϕ es una función de Jüttner unidimensional de la forma (5.3). Entonces,*

$$0 \equiv \alpha_{\bullet}(p)\, p^0 - \beta D(p) \tag{5.4a}$$

$$0 \equiv \alpha_{\circ}(p)\, p^0 - \beta D(p) + D'(p)\frac{p^0}{2p} \tag{5.4b}$$

$$0 \equiv \alpha_{*}(p)\, p^0 - \beta D(p) + D'(p)\frac{p^0}{2p} \tag{5.4c}$$

para cualquier $p \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Demostración. Comenzaremos demostrando que los coeficientes $\alpha_{\bullet}$, $\alpha_{\circ}$, α_{*} y D satisfacen las relaciones de Einstein (4.8). Posteriormente, utilizaremos este hecho para demostrar lo deseado.

Tenemos que la densidad estacionaria del proceso (5.1) cumple, según la integral que se tome, ecuaciones de Fokker-Planck análogas a (4.6). Entonces, la densidad estacionaria de momentos ϕ de la ecuación de Langevin (5.1) satisface, para todo $p \in \mathbb{R}$, las igualdades

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial p}\left[\widehat{\alpha}_{*}\left(p^0\right) p\phi(p) + \frac{\partial}{\partial p}\left(\widehat{D}\left(p^0\right)\phi(p)\right)\right], \\
0 &= \frac{\partial}{\partial p}\left[\widehat{\alpha}_{\circ}\left(p^0\right) p\phi(p) + \widehat{D}^{\frac{1}{2}}\left(p^0\right)\frac{\partial}{\partial p}\left(\widehat{D}^{\frac{1}{2}}\left(p^0\right)\phi(p)\right)\right], \\
0 &= \frac{\partial}{\partial p}\left[\widehat{\alpha}_{\bullet}\left(p^0\right) p\phi(p) + \widehat{D}\left(p^0\right)\frac{\partial}{\partial p}\phi(p)\right],
\end{aligned}$$

siendo $\widehat{D}\left(p^0\right) = D(p)$ y $\widehat{\alpha}_{\odot}\left(p^0\right) = \alpha_{\odot}(p)$, $\forall p \in \mathbb{R}$ y $\forall \odot \in \{\bullet, \circ, *\}$. Esto implica que (ver la demostración de 63)

$$\begin{aligned}
0 &= \widehat{\alpha}_{*}\left(p^0\right) p\phi(p) + \frac{\partial}{\partial p}\left(\widehat{D}\left(p^0\right)\phi(p)\right) \\
&= \widehat{\alpha}_{*}\left(p^0\right) p\phi(p) + \widehat{D}'\left(p^0\right)\frac{p}{p^0}\phi(p) - \beta\frac{p}{p^0}\phi(p)\,\widehat{D}\left(p^0\right), \\
0 &= \widehat{\alpha}_{\circ}\left(p^0\right) p\phi(p) + \widehat{D}^{\frac{1}{2}}\left(p^0\right)\frac{\partial}{\partial p}\left(\widehat{D}^{\frac{1}{2}}\left(p^0\right)\phi(p)\right) \\
&= \widehat{\alpha}_{\circ}\left(p^0\right) p\phi(p) + \frac{1}{2}\widehat{D}'\left(p^0\right)\frac{p}{p^0}\phi(p) - \beta\frac{p}{p^0}\phi(p)\,\widehat{D}\left(p^0\right),
\end{aligned}$$

$$0=\widehat{\alpha}_{\bullet}\left(p^{0}\right)p\phi\left(p\right)+\widehat{D}\left(p^{0}\right)\frac{\partial}{\partial p}\phi\left(p\right)=\widehat{\alpha}_{\bullet}\left(p^{0}\right)p\phi\left(p\right)-\beta\frac{p}{p^{0}}\phi\left(p\right)\widehat{D}\left(p^{0}\right),$$

para todo $p\in\mathbb{R}$. Luego, por ser $\phi\left(p\right)>0\ \forall p\in\mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned}
0 &= \widehat{\alpha}_{*}\left(p^{0}\right)p^{0}-\beta\widehat{D}\left(p^{0}\right)+\widehat{D}'\left(p^{0}\right),\\
0 &= \widehat{\alpha}_{\circ}\left(p^{0}\right)p^{0}-\beta\widehat{D}\left(p^{0}\right)+\widehat{D}'\left(p^{0}\right)/2,\\
0 &= \widehat{\alpha}_{\bullet}\left(p^{0}\right)p^{0}-\beta\widehat{D}\left(p^{0}\right),
\end{aligned}$$

para todo $p\in\mathbb{R}-\{0\}$, lo cual demuestra que los coeficientes $\alpha_{\bullet}$, $\alpha_{\circ}$, α_{*} y D satisfacen las relaciones de Einstein (4.8).

Por otro lado, debido a que $D\left(p\right)=\widehat{D}\left(p^{0}\left(p\right)\right)\ \forall p\in\mathbb{R}$, se cumple que

$$D'\left(p\right)\frac{p^{0}}{p}=\widehat{D}'\left(p^{0}\right)\quad\forall p\in\mathbb{R}-\{0\}.$$

Entonces, sustituyendo la igualdad de arriba en la ecuación (5.5), llegamos a que

$$\begin{aligned}
0 &\equiv \alpha_{\bullet}\left(p\right)p^{0}-\beta D\left(p\right)\\
0 &\equiv \alpha_{\circ}\left(p\right)p^{0}-\beta D\left(p\right)+D'\left(p\right)\frac{p^{0}}{2p}\\
0 &\equiv \alpha_{*}\left(p\right)p^{0}-\beta D\left(p\right)+D'\left(p\right)\frac{p^{0}}{2p}
\end{aligned}$$

para todo $p\in\mathbb{R}-\{0\}$, lo que prueba lo deseado. ■

Ahora procederemos a establecer las ecuaciones de la energía y la velocidad. Tomando $\widehat{D}\left(p^{0}\right)=D\left(p\right)$ y $\widehat{\alpha}_{\odot}\left(p^{0}\right)=\alpha_{\odot}\left(p\right)\ \forall p\in\mathbb{R}$ y $\forall\odot\in\{\bullet,\circ,*\}$, de la ecuación (4.3) se obtiene el siguiente resultado para el proceso de energía $P_{t}^{0}:=\left(M^{2}+P^{2}\right)^{1/2}$.

Corolario 67 *Supongamos que la ecuación (5.1) se cumple. Entonces, el proceso* $P_{t}^{0}:=\left(M^{2}+P^{2}\right)^{1/2}$ *tiene asociada la ecuación diferencial estocástica*

$$\begin{aligned}
dP_{t}^{0} &= \left\{-\widehat{\alpha}_{\odot}\left(P_{t}^{0}\right)P_{t}^{0}\left[1-\left(\frac{M}{P_{t}^{0}}\right)^{2}\right]+\lambda_{\odot}\frac{\widehat{D}\left(P_{t}^{0}\right)}{P_{t}^{0}}\left(\frac{M}{P_{t}^{0}}\right)^{2}\right\}dt\\
&\quad \left\{2\widehat{D}\left(P_{t}^{0}\right)\left[1-\left(\frac{M}{P_{t}^{0}}\right)^{2}\right]\right\}^{1/2}\odot dW_{t},
\end{aligned}$$

donde $\lambda_* = 1$, $\lambda_\circ = 0$ *y* $\lambda_\bullet = -1$.

Resta encontrar la ecuación de la velocidad, para lo cual se define $\widetilde{D}, \widetilde{\alpha}_\odot : (-1,1) \to \mathbb{R}$ para $\odot \in \{\bullet, \circ, *\}$, dadas por

$$\widetilde{\alpha}_\odot (V) := \alpha_\odot (P(V)), \qquad \widetilde{D}(V) := D(P(V))$$

para $P(V) = MV\left(1 - V^2\right)^{-1/2}$ (la fórmula del momento relativista). Conviene notar que por ser $\alpha_\odot$ y D de clase C^∞, también $\widehat{\alpha}_\odot$ y D lo son.

Las ecuaciones diferenciales estocásticas de la velocidad están dadas por el siguiente resultado, el cuál utilizaremos repetidamente en los ejemplos.

Proposición 68 *Supongamos que la ecuación (5.1) se cumple. Entonces, el proceso estocástico* $V_t := \frac{P_t}{P_t^0}$ *satisface*

$$\begin{aligned} dV_t &= \left[-\widetilde{\alpha}_\odot (V_t)\left(1 - V_t^2\right) - \lambda_\odot \left(\frac{3\widetilde{D}(V_t)}{M^2} \right) \left(1 - V_t^2\right)^2 \right] V_t dt \\ &\quad + \left[\left(\frac{2\widetilde{D}(V_t)}{M^2} \right) \left(1 - V_t^2\right)^3 \right]^{1/2} \odot dW_t, \end{aligned}$$

siendo $\lambda_* = 1$, $\lambda_\circ = 0$ *y* $\lambda_\bullet = -1$.

Demostración. Para esta demostración utilizaremos las fórmulas de Itô (26), Stratonovich (47) y backward-Itô (51). Definamos $u : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $u(p,t) = \frac{p}{(M^2+p^2)^{1/2}}$. Nótese que $\frac{\partial u}{\partial p}$ y $\frac{\partial u}{\partial t}$ existen y

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial p}(p,t) &= \frac{M^2}{\left(M^2 + p^2\right)^{3/2}}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(p,t) &= 0, \end{aligned}$$

para todo $(p,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$.

Por otro lado, de lo anterior se tiene que $\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}$ existe y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}(p,t) = \frac{-3M^2 p}{\left(M^2 + p^2\right)^{5/2}} \quad \forall (p,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty).$$

De la definición de u y lo hecho arriba, es claro que u es continua y que $\frac{\partial u}{\partial p}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}$ existen y son continuas. Luego, podemos aplicar las fórmulas de Itô, Stratonovich y backward-Itô al proceso $V_t := \frac{P_t}{\left(M^2+P_t^2\right)^{1/2}} = u\left(P_t, t\right)$. Mediante la fórmula de Itô, para la ecuación (5.1) con la integral de Itô obtenemos

$$
\begin{aligned}
dV_t &= \frac{\partial u}{\partial t}\left(P_t,t\right)dt + \frac{\partial u}{\partial p}\left(P_t,t\right)dP_t + \frac{1}{2}\left[2D\left(P_t\right)\right]\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\left(P_t,t\right)dt \\
&= \frac{M^2}{\left(M^2+P_t^2\right)^{3/2}}dP_t - \frac{3M^2P_t}{\left(M^2+P_t^2\right)^{5/2}}D\left(P_t\right)dt \\
&= \frac{\left(1-V_t^2\right)}{\left(M^2+P_t^2\right)^{1/2}}dP_t - \left(\frac{3D\left(P_t\right)}{M^2}\right)\left(1-V_t^2\right)^2 V_t dt \\
&= -\frac{\left(1-V_t^2\right)}{\left(M^2+P_t^2\right)^{1/2}}\alpha_*\left(P_t\right)P_t dt + \frac{\left(1-V_t^2\right)}{\left(M^2+P_t^2\right)^{1/2}}\left[2D\left(P_t\right)\right]^{1/2} * dW_t - \\
&\quad \left(\frac{3D\left(P_t\right)}{M^2}\right)\left(1-V_t^2\right)^2 V_t dt \\
&= \left[-\alpha_*\left(P_t\right)\left(1-V_t^2\right) - \left(\frac{3D\left(P_t\right)}{M^2}\right)\left(1-V_t^2\right)^2\right]V_t dt + \frac{\left(1-V_t^2\right)^{3/2}}{M}\left[2D\left(P_t\right)\right]^{1/2} * dW_t \\
&= \left[-\alpha_*\left(P_t\right)\left(1-V_t^2\right) - \left(\frac{3D\left(P_t\right)}{M^2}\right)\left(1-V_t^2\right)^2\right]V_t dt + \left[\left(\frac{2D\left(P_t\right)}{M^2}\right)\left(1-V_t^2\right)^3\right]^{1/2} * dW_t \\
&= \left[-\widetilde{\alpha}_*\left(V_t\right)\left(1-V_t^2\right) - \left(\frac{3\widetilde{D}\left(V_t\right)}{M^2}\right)\left(1-V_t^2\right)^2\right]V_t dt + \left[\left(\frac{2\widetilde{D}\left(V_t\right)}{M^2}\right)\left(1-V_t^2\right)^3\right]^{1/2} * dW_t.
\end{aligned}
$$

Además, considerando el desarrollo anterior tenemos que, para la ecuación (5.1) con las integrales de Stratonovich y backward-Itô, se cumple

$$
\begin{aligned}
dV_t &= \frac{\partial u}{\partial t}\left(P_t,t\right)dt + \frac{\partial u}{\partial p}\left(P_t,t\right)dP_t \\
&= -\widetilde{\alpha}_\circ\left(V_t\right)\left(1-V_t^2\right)V_t dt + \left[\left(\frac{2\widetilde{D}\left(V_t\right)}{M^2}\right)\left(1-V_t^2\right)^3\right]^{1/2} \circ dW_t; \quad \text{y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dV_t &= \frac{\partial u}{\partial t}\left(P_t,t\right)dt + \frac{\partial u}{\partial p}\left(P_t,t\right)dP_t - \frac{1}{2}\left[2D\left(P_t\right)\right]\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\left(P_t,t\right)dt \\
&= \left[-\widetilde{\alpha}_\bullet\left(V_t\right)\left(1-V_t^2\right) + \left(\frac{3\widetilde{D}\left(V_t\right)}{M^2}\right)\left(1-V_t^2\right)^2\right]V_t dt + \left[\left(\frac{2\widetilde{D}\left(V_t\right)}{M^2}\right)\left(1-V_t^2\right)^3\right]^{1/2} \bullet dW_t.
\end{aligned}
$$

Entonces, resulta que

$$
\begin{aligned}
dV_t &= \left[-\widetilde{\alpha}_{\odot}(V_t)\left(1-V_t^2\right)-\lambda_{\odot}\left(\frac{3\widetilde{D}(V_t)}{M^2}\right)\left(1-V_t^2\right)^2\right]V_t dt \\
&\quad+\left[\left(\frac{2\widetilde{D}(V_t)}{M^2}\right)\left(1-V_t^2\right)^3\right]^{1/2}\odot dW_t,
\end{aligned}
$$

para $\lambda_* = 1$, $\lambda_\circ = 0$ y $\lambda_\bullet = -1$; lo cual demuestra lo deseado. ■

Como se ve en la Sección 5.3, la ecuación de la proposición anterior se usará para calcular el desplazamiento cuadrático medio.

5.2. Desplazamiento cuadrático medio asintótico

El objetivo de este apartado es tratar la constante de difusión efectiva asociada a modelos específicos de movimiento Browniano relativista con el objetivo de utilizar tal información en el análisis de los ejemplos que se proponen en la siguiente sección. Para mayor claridad, conviene retomar la definición de constante de difusión asintótica.

Definición 69 *Sea $\{Y_t, t \geq 0\}$ un proceso estocástico relativista. La constante de difusión asintótica de Y es*

$$
D_\infty(Y) = \lim_{t\to\infty} \frac{\left\langle (Y_t - Y_0)^2 \right\rangle}{2t}.
$$

Aquí no se demostrará que la constante de difusión asintótica esta bien definida, una posible demostración puede encontrarse en el artículo de Angst y Franchi [5]. Determinar la constante de difusión asintótica es un objetivo básico en cualquier teoría y modelo del movimiento Browniano pues permite estimar los procesos de relajación de la partícula Browniana y aplicar resultados de la teoría de difusiones.

Físicamente, la constante de difusión asintótica se interpreta como una constante de difusión efectiva. Es decir que, para el caso de la partícula Browniana considerada, $D_\infty(X)$ es una medida de la "facilidad" (real) con la que se mueve la partícula Browniana.

Dada la importancia de la constante de difusión asintótica y lo poco práctico de su definición, es deseable encontrar una ecuación que permita calcular dicha constante de manera sencilla, al menos para los ejemplos que se consideran en este trabajo. Un resultado que cumple con esta meta fue propuesto por B. Lindner (ver págs. 69 y 70 del artículo [26] de Dunkel y Hänggi).

Teorema 70 (Lindner) *Sea* $\{Y_t, t \geq 0\}$ *un proceso estocástico relativista cuya velocidad* $\mathcal{V}_t := \frac{dY_t}{dt}$ *es un proceso estacionario y cumple*

$$d\mathcal{V}_t = -a_{\bullet}\left(\mathcal{V}_t\right)\mathcal{V}_t + \left[2b\left(\mathcal{V}_t\right)\right]^{1/2} \bullet dW_t, \tag{5.6}$$

con coeficientes $a_{\bullet}, b : (-1,1) \to (0,\infty)$ *diferenciables y tales que* $a_{\bullet}(-w) = a_{\bullet}(w)$ *y* $b(-w) = b(w)$*. Además, defínase* $U, \mu_* : [0,1) \to \mathbb{R}$ *dadas por*

$$\mu_*(w) = a_{\bullet}(w)\, w - b'(w) = a_*(w)\, w,$$

$$U(w) = \int_0^w \frac{\mu_*(s)}{b(s)} ds.$$

Entonces,

$$D_{\infty}(Y) \simeq \frac{\int_0^1 e^{U(y)} \left[\int_y^1 \frac{xe^{-U(x)}}{b(x)} dx\right]^2 dy}{\int_0^1 \frac{e^{-U(z)}}{b(z)} dz}. \tag{5.7}$$

Observación 71 *Para el baño térmico supuesto en este capítulo, cuando la ecuación de Langevin tiene solución, ésta es un proceso homogéneo. Por otra parte, en los modelos de movimiento Browniano relativista que se tratan aquí, se supone de entrada la existencia de una densidad estacionaria para el proceso de Langevin. Por lo tanto, según la Observación 105, el momento y la velocidad son proceso estacionarios en los ejemplos de este capítulo; en particular, la velocidad cumple una de las hipótesis del Teorema anterior.*

Ahora se tiene todo lo necesario para un análisis completo de algunos ejemplos.

5.3. Ejemplos

Se consideraran tres ejemplos unidimensionales de modelos relativistas de Langevin, cuyas densidades estacionarias del momento se distribuyen como funciones de Jüttner $\phi_J(p) \propto \exp[\beta\left(p^2 + M^2\right)^{1/2}]$, con $\mathcal{T} = (k_B\beta)^{-1}$ la temperatura del baño. En estos casos, la relación de Einstein (5.4) implica que, en la ecuación (5.1), solo una de las funciones $\alpha_\bullet(p)$ ó $D(p)$ puede ser elegida arbitrariamente.

5.3.1. Amplitud constante

Como primer ejemplo consideraremos el llamado "Proceso Relativista de Ornstein-Uhlenbeck" (ROUP). Este proceso está definido por la elección

$$\alpha_\bullet(p) = \alpha_c \frac{M}{p^0} \quad \forall p \in \mathbb{R},$$

en la ecuación (5.1), donde $\alpha_c > 0$ es un parámetro de fricción constante. A partir de las relaciones de Einstein (5.4) se encuentra[2]

$$D(p) \equiv \alpha_\bullet(p)\, p^0 \beta^{-1} = \alpha_c M \beta^{-1} =: D_c \quad \forall p \in \mathbb{R},$$

por lo cual es claro que el ROUP corresponde al caso de amplitud constante. Por lo tanto, la ecuación de Langevin asociada al ROUP queda como

$$\begin{aligned} dP_t &= -\alpha_c \frac{M}{p^0} P_t dt + \left(\frac{2\alpha_c M}{\beta}\right)^{1/2} \bullet dW_t && (5.8a) \\ &= -\alpha_c \frac{M}{p^0} P_t dt + \left(\frac{2\alpha_c M}{\beta}\right)^{1/2} * dW_t. && (5.8b) \end{aligned}$$

En este caso, debido a que la amplitud del ruido $D_c := \alpha_c M/\beta$ no depende del momento P, los coeficientes en la ecuación de Langevin no varían según el tipo de integral estocástica. Sin embargo, es importante tener en cuenta la clase de integral estocástica para poder escribir la ecuación diferencial estocástica asociada al proceso de la velocidad $V_t := \frac{P_t}{P_t^0}$.

La existencia y unicidad de la solución de la ecuación (5.8) es una consecuencia inmediata del Corolario 33.

Proposición 72 *Supongamos que (X_0, P_0) es una variable aleatoria independiente de W_t para $t \geq 0$. Entonces, la ecuación (5.8) tiene una única solución global.*

[2] Se esta suponiendo que la partícula Browniana esta en equilibrio térmico con el baño circundante, por lo tanto los coeficientes deben cumplir las relaciones de Einstein (5.4).

A continuación se encuentra la ecuación diferencial estocástica asociada a la velocidad V_t.

Proposición 73 *Sea (X_t, P_t) como en (5.8). Entonces el proceso $V_t := \frac{P_t}{P_t^0}$ tiene la diferencial*

$$\begin{aligned} dV_t &= -\alpha_c \left[\left(1 - V_t^2\right)^{3/2} - \frac{3}{\chi} \left(1 - V_t^2\right)^2 \right] V_t dt + \left[\frac{2\alpha_c}{\chi} \left(1 - V_t^2\right)^3 \right]^{1/2} \bullet dW_t \qquad (5.9a) \\ &= -\alpha_c \left[\left(1 - V_t^2\right)^{3/2} + \frac{3}{\chi} \left(1 - V_t^2\right)^2 \right] V_t dt + \left[\frac{2\alpha_c}{\chi} \left(1 - V_t^2\right)^3 \right]^{1/2} * dW_t, \qquad (5.9b) \end{aligned}$$

donde $\chi = \beta M$.

Observación 74 *Considerando la relación $V_t := \frac{P_t}{\left(M^2 + P_t^2\right)} \Leftrightarrow P_t^2 := \frac{M^2 V_t^2}{1 - V_t^2}$, es claro que dada una solución de (5.9) se tiene una solución de (5.8), y viceversa.*

Demostración. Basta aplicar la Proposición 68. Observemos que las ecuaciones (5.8) son ecuaciones de Langevin del tipo (5.1) con

$$\begin{aligned} \alpha_\bullet (p) &= \alpha_c \frac{M}{p^0} = \alpha_c \left(1 - v^2\right)^{1/2} = \widetilde{\alpha}_\bullet (v), \\ \alpha_* (p) &= \alpha_c \frac{M}{p^0} = \alpha_c \left(1 - v^2\right)^{1/2} = \widetilde{\alpha}_* (v), \\ D(p) &= \frac{\alpha_c M}{\beta} = \frac{\alpha_c M^2}{\chi} = \widetilde{D}(v), \end{aligned}$$

bajo la identidad $v = \frac{p}{p^0}$. Aplicando la Proposición 68 a las ecuaciones (5.8) se llega al resultado deseado. ■

Ahora estamos en condiciones de calcular el coeficiente de difusión asintótica $D_\infty (X)$. Para esto conviene tener en cuenta el siguiente resultado auxiliar sobre las funciones de Bessel. Para mayores detalles sobre estas funciones se sugiere [57].

Lema 75 *La función de Bessel modificada de segunda especie de orden 0, denotada por K_0, satisface la relación*

$$(-1)^\nu \frac{d^\nu}{d\chi^\nu} K_0 (\chi) = \int_0^1 \exp\left(-\frac{\chi}{\left(1 - v^2\right)^{1/2}} \right) \left(1 - v^2\right)^{-(\nu+2)/2} dv.$$

Proposición 76 *La posición X_t asociada al ROUP (5.8), satisface*

$$D_{\infty}^{ROUP}(\alpha_c) \equiv D_{\infty}(X) = (\alpha_c \chi)^{-1} = \frac{k_B \mathcal{T}}{M \alpha_c},$$

con $\chi = \beta M$.

Observación 77 *Es interesante notar que con el ROUP se obtiene la misma constante de difusión asintótica que para el proceso de Ornstein-Uhlenbeck no-relativista, $D_{\infty}^{ROUP} = (\alpha_c \chi)^{-1} = D_{\infty}^{OU}$, para cualesquiera parámetros $(\alpha_c, \mathcal{T}, M)$. Esta puede ser considerada la razón por la cual el ROUP recibe tal nombre.*

Demostración. (Proposición 76). Para encontrar lo pedido, utilizaremos el Teorema 70. Notemos que la velocidad del ROUP (5.8) cumple la ecuación (5.9), la cual es de la forma (5.6) con

$$\begin{aligned} a_{\bullet}(v) &= \alpha_c \left[\left(1 - v^2\right)^{3/2} - \frac{3}{\chi} \left(1 - v^2\right)^2 \right], \\ b(v) &= \frac{\alpha_c}{\chi} \left(1 - v^2\right)^3, \end{aligned}$$

para todo $v \in (-1, 1)$. Además, según la notación del teorema de Lindner,

$$\begin{aligned} \mu_*(v) &= \alpha_c \left[\left(1 - v^2\right)^{3/2} + \frac{3}{\chi} \left(1 - v^2\right)^2 \right] v, \\ U(v) &= \int_0^v \frac{\alpha_c \left[\left(1 - w^2\right)^{3/2} + \frac{3}{\chi} \left(1 - w^2\right)^2 \right] w}{\frac{\alpha_c}{\chi} \left(1 - w^2\right)^3} dw \\ &= \chi \int_0^v \frac{w}{\left(1 - w^2\right)^{3/2}} dw + 3 \int_0^v \frac{w}{\left(1 - w^2\right)} dw \\ &= \frac{\chi}{\left(1 - v^2\right)^{1/2}} - \chi - \frac{3}{2} \log\left(1 - v^2\right), \end{aligned}$$

para $v \in [0, 1)$.

Luego, aplicando la Observación 71, la ecuación (5.7) y el Lema 75, vemos que

$$D_{\infty}(X) = \frac{e^{\chi} \chi}{\alpha_c} \frac{\int_0^1 e^{U(y)} \left\{ \int_y^1 x \exp\left[-\chi \left(1 - x^2\right)^{-1/2} \right] \left(1 - x^2\right)^{-3/2} dx \right\}^2 dy}{\int_0^1 \exp\left[-\chi \left(1 - z^2\right)^{-1/2} \right] \left(1 - z^2\right)^{-3/2} dz}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{e^{\chi}\chi}{\alpha_c \frac{d}{d\chi} K_0(\chi)} \int_0^1 e^{U(y)} \left\{ -\frac{1}{\chi} \exp\left[-\chi \left(1-x^2\right)^{-1/2}\right]\Big|_{x=y}^{x=1} \right\}^2 dy \\
&= -\frac{1}{\alpha_c \chi \frac{d}{d\chi} K_0(\chi)} \int_0^1 \exp\left[\chi \left(1-y^2\right)^{-1/2}\right] \left(1-y^2\right)^{-3/2} \exp\left[-2\chi \left(1-y^2\right)^{-1/2}\right] dy \\
&= -\frac{1}{\alpha_c \chi \frac{d}{d\chi} K_0(\chi)} \int_0^1 \exp\left[-\chi \left(1-y^2\right)^{-1/2}\right] \left(1-y^2\right)^{-3/2} dy \\
&= \frac{\frac{d}{d\chi} K_0(\chi)}{\alpha_c \chi \frac{d}{d\chi} K_0(\chi)} = (\alpha_c \chi)^{-1},
\end{aligned}
$$

lo que demuestra lo deseado. ■

5.3.2. Coeficiente de fricción constante en la ecuación de Langevin-backward

El siguiente ejemplo de modelo de movimiento Browniano relativista que se considera corresponde al caso especial de un coeficiente de fricción constante $\alpha_{\bullet}(p) \equiv \alpha_{\dagger} > 0$ en la ecuación de Langevin (5.1) con la integral backward. Abreviaremos este ejemplo de proceso como RBM. En este caso, la relación de Einstein (5.4) implica

$$
D(p) = \alpha_{\dagger} p^0 \beta^{-1} = \alpha_{\dagger} \beta^{-1} \left(M^2 + p^2\right)^{1/2} \quad \forall p \in \mathbb{R}.
$$

Entonces la ecuación de Langevin asociada a un proceso RBM queda como

$$
\begin{aligned}
dP_t &= -\alpha_{\dagger} P_t dt + \left(\frac{2\alpha_{\dagger} P_t^0}{\beta}\right)^{1/2} \bullet dW_t && \text{(5.10a)} \\
&= -\alpha_{\dagger} \left(\frac{\beta P_t^0 - 1}{\beta P_t^0}\right) P_t dt + \left(\frac{2\alpha_{\dagger} P_t^0}{\beta}\right)^{1/2} * dW_t. && \text{(5.10b)}
\end{aligned}
$$

A continuación se demuestra que la ecuación anterior tiene solución única, aunque para esto conviene tener en cuenta el siguiente resultado.

Lema 78 *Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una función dada por $g(P) = \left(M^2 + P^2\right)^{1/2} =: P^0$. Entonces, se cumple que*

$$
\left|P^0 - Q^0\right| = |g(P) - g(Q)| \leq |P - Q| \quad \forall (P, Q) \in \mathbb{R}^2.
$$

Demostración. Para todo $(P, Q) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, sucede que

$$\begin{aligned}
\left|P^0 - Q^0\right| &= |g(P) - g(Q)| \\
&= \left|\left(M^2 + P^2\right)^{1/2} - \left(M^2 + Q^2\right)^{1/2}\right| \\
&= \frac{\left|P^2 - Q^2\right|}{\left|(M^2 + P^2)^{1/2} + (M^2 + Q^2)^{1/2}\right|} \\
&\leq \frac{\left|P^2 - Q^2\right|}{||P| + |Q||} \\
&\leq ||P| - |Q|| \\
&\leq |P - Q|,
\end{aligned}$$

lo que prueba lo deseado. ■

Proposición 79 *Sea* (X_0, P_0) *una variable aleatoria independiente de* W_t *para* $t \geq 0$*. Entonces, la ecuación (5.10) tiene una única solución global.*

Demostración. Por el Corolario 33, es claro que basta probar que los coeficientes de ruido y fricción satisfacen una condición de Lipschitz de la forma (2.8).

Definamos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(P) = \frac{P}{P^0}$. Claramente, se cumple que $f'(P) = \frac{M^2}{(M^2+P^2)^{3/2}} \leq \frac{1}{M}$ $\forall P \in \mathbb{R}$. Aplicando el Teorema del Valor Medio a la función anterior, se llega a que

$$\begin{aligned}
\left|\alpha_\dagger \left(\frac{\beta P^0 - 1}{\beta P^0}\right) P - \alpha_\dagger \left(\frac{\beta Q^0 - 1}{\beta Q^0}\right) Q\right| &= \alpha_\dagger \left|P - \frac{P}{\beta P^0} - Q + \frac{Q}{\beta Q^0}\right| \\
&\leq \alpha_\dagger \left(|P - Q| + \frac{1}{\beta}\left|\frac{P}{P^0} - \frac{Q}{Q^0}\right|\right) \\
&\leq \alpha_\dagger \left(|P - Q| + \frac{1}{\beta}\left|\max_{x \in \mathbb{R}} f'(x)\right| |P - Q|\right) \\
&= \left(\alpha_\dagger + \frac{1}{\beta M}\right) |P - Q| \qquad (5.11)
\end{aligned}$$

para cualquier $(P, Q) \in \mathbb{R}^2$. Por otro lado, del Lema anterior se sigue que

$$\left|\left(\frac{2\alpha_\dagger P^0}{\beta}\right)^{1/2} - \left(\frac{2\alpha_\dagger Q^0}{\beta}\right)^{1/2}\right| = \left(\frac{2\alpha_\dagger}{\beta}\right)^{1/2} \left|\left(P^0\right)^{1/2} - \left(Q^0\right)^{1/2}\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{2\alpha_\dagger}{\beta}\right)^{1/2} \frac{\left|P^0 - Q^0\right|}{\left|(P^0)^{1/2} + (Q^0)^{1/2}\right|} \\
&\leq \left(\frac{2\alpha_\dagger}{\beta}\right)^{1/2} \frac{|P - Q|}{\left|(M^2 + P^2)^{1/4} + (M^2 + Q^2)^{1/4}\right|} \\
&\leq \left(\frac{2\alpha_\dagger}{\beta}\right)^{1/2} \frac{|P - Q|}{\left|2M^{1/2}\right|} \\
&= \left(\frac{\alpha_\dagger}{2M\beta}\right)^{1/2} |P - Q| \qquad (5.12)
\end{aligned}
$$

para todo $(P, Q) \in \mathbb{R}^2$.

De las ecuaciones (5.11) y (5.12) se sigue que la ecuación (5.10b) satisface una condición de Lipschitz de la forma (2.8), lo cual prueba lo deseado. ■

La ecuación diferencial estocástica asociada a la velocidad permite calcular el coeficiente de difusión asintótica de la siguiente manera.

Proposición 80 *Sea (X_t, P_t) como en (5.10). Entonces, el proceso $V_t := \frac{P_t}{P_t^0}$ tiene la diferencial estocástica*

$$
\begin{aligned}
dV_t &= -\alpha_\dagger \left[\left(1 - V_t^2\right) - \frac{3}{\chi}\left(1 - V_t^2\right)^{3/2}\right] V_t dt + \left[\frac{2\alpha_\dagger}{\chi}\left(1 - V_t^2\right)^{5/2}\right]^{1/2} \bullet dW_t \qquad (5.13a) \\
&= -\alpha_\dagger \left[\left(1 - V_t^2\right) + \frac{2}{\chi}\left(1 - V_t^2\right)^{3/2}\right] V_t dt + \left[\frac{2\alpha_\dagger}{\chi}\left(1 - V_t^2\right)^{5/2}\right]^{1/2} * dW_t, \qquad (5.13b)
\end{aligned}
$$

tomando $\chi = \beta M$.

Demostración. Haremos uso de la Proposición 68. Notemos que las ecuaciones (5.10) son ecuaciones de Langevin del tipo (5.1) con

$$
\begin{aligned}
\alpha_\bullet(p) &= \alpha_\dagger = \widetilde{\alpha}_\bullet(v), \\
\alpha_*(p) &= \alpha_\dagger \left(\frac{\beta p^0 - 1}{\beta p^0}\right) = \alpha_\dagger \left(1 - \frac{1}{\chi}\left(1 - v^2\right)^{1/2}\right) = \widetilde{\alpha}_*(v), \\
D(p) &= \frac{\alpha_\dagger p^0}{\beta} = \frac{\alpha_\dagger M^2}{\chi}\left(1 - v^2\right)^{-1/2} = \widetilde{D}(v),
\end{aligned}
$$

y $v = \frac{p}{p^0}$. Aplicando la Proposición 68 a las ecuaciones (5.10) se llega al resultado deseado. ■

Para el coeficiente de difusión asintótica correspondiente se obtiene lo siguiente.

Proposición 81 *La posición X_t asociada al proceso RBM (5.10) tiene como constante de difusión asintótica a*

$$D_{\infty}^{RBM}(\alpha_{\dagger}) \equiv D_{\infty}(X) = (\alpha_{\dagger}\chi)^{-1}\frac{K_0(\chi)}{K_1(\chi)}, \tag{5.14}$$

donde $\chi = \beta M$ y K_n denota la función de Bessel modificada de segunda especie de orden $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Similar a la demostración de 76, utilizaremos el Teorema 70. Notemos que la velocidad del proceso X_t satisface la ecuación (5.13), la cual es de la forma (5.6) con

$$\begin{aligned} a_{\bullet}(v) &= \alpha_{\dagger}\left[\left(1-v^2\right) - \frac{3}{\chi}\left(1-v^2\right)^{3/2}\right], \\ b(v) &= \frac{\alpha_{\dagger}}{\chi}\left(1-v^2\right)^{5/2}, \end{aligned}$$

para cualquier $v \in (-1,1)$. Entonces, acorde a la notación del Teorema de Lindner 70,

$$\begin{aligned} \mu_*(v) &= \alpha_{\dagger}\left[\left(1-v^2\right) + \frac{2}{\chi}\left(1-v^2\right)^{3/2}\right]v, \\ U(v) &= \int_0^v \frac{\alpha_{\dagger}\left[\left(1-w^2\right) + \frac{2}{\chi}\left(1-w^2\right)^{3/2}\right]w}{\frac{\alpha_{\dagger}}{\chi}\left(1-w^2\right)^{5/2}}dw \\ &= \chi\int_0^v \frac{w}{\left(1-w^2\right)^{3/2}}dw + 2\int_0^v \frac{w}{\left(1-w^2\right)}dw \\ &= \frac{\chi}{\left(1-v^2\right)^{1/2}} - \chi - \log\left(1-v^2\right), \end{aligned}$$

para $v \in [0,1)$.

Aplicando el Teorema de Lindner 70, la Observación 71 y el lema 75 sobre la función de Bessel, y considerando la demostración de la Proposición 76, tenemos que

$$\begin{aligned} D_{\infty}^{RBM}(\alpha_{\dagger}) &\equiv D_{\infty}(X) = \frac{e^{\chi}\chi}{\alpha_{\dagger}}\frac{\int_0^1 e^{U(y)}\left\{\int_y^1 x\exp\left[-\chi\left(1-x^2\right)^{-1/2}\right]\left(1-x^2\right)^{-3/2}dx\right\}^2 dy}{\int_0^1 \exp\left[-\chi\left(1-z^2\right)^{-1/2}\right]\left(1-z^2\right)^{-3/2}dz} \\ &= -\frac{e^{\chi}}{\alpha_{\dagger}\chi\frac{d}{d\chi}K_0(\chi)}\int_0^1 e^{U(y)}\exp\left[-2\chi\left(1-y^2\right)^{-1/2}\right]dy \\ &= -\frac{1}{\alpha_{\dagger}\chi\frac{d}{d\chi}K_0(\chi)}\int_0^1 \exp\left[\chi\left(1-y^2\right)^{-1/2}\right]\left(1-y^2\right)^{-1}\exp\left[-2\chi\left(1-y^2\right)^{-1/2}\right]dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\alpha_\dagger \chi \frac{d}{d\chi} K_0(\chi)} \int_0^1 \exp\left[-\chi\left(1-y^2\right)^{-1/2}\right]\left(1-y^2\right)^{-1} dy \\ &= -\frac{K_0(\chi)}{\alpha_\dagger \chi \frac{d}{d\chi} K_0(\chi)}. \end{aligned}$$

Luego, como la función $K_0(\chi)$ cumple $\frac{d}{d\chi} K_0(\chi) = -K_1(\chi)$, de lo anterior se sigue

$$D_\infty(X) = (\alpha_\dagger \chi)^{-1} \frac{K_0(\chi)}{K_1(\chi)},$$

con lo que se prueba lo deseado. ■

A bajas temperaturas $\beta := (k_B \mathcal{T})^{-1} \to \infty$ y la relación (5.14) se reduce al resultado clásico $D_\infty^{RBM} \approx \frac{k_B \mathcal{T}}{M \alpha_\dagger}$. Mientras que para temperaturas muy altas, i.e. para $\beta M \ll 1$, se encuentra

$$D_\infty^{RBM} = (\alpha_\dagger M)^{-1} \left\{-\gamma_\varepsilon + \log\left(\frac{2}{\chi} + O\left[(\beta M)^2\right]\right)\right\}, \tag{5.15}$$

donde $\gamma_\varepsilon \approx 0{,}577216$ es la constante de Euler. Debe tenerse en mente que, debido a los procesos de aniquilación/creación de partículas a altas energías, las teorías clásicas no-cuánticas se vuelven inválidas a muy altas temperaturas (en el límite $\chi = \beta M \ll 1$), y, por lo tanto, la igualdad (5.15) tiene un uso práctico limitado.

Comparando el ejemplo de esta subsección con el proceso de Ornstein-Uhlenbeck relativista, se observa que $D_\infty^{RBM}(\alpha_\dagger) \leq D_\infty^{ROUP}(\alpha_c)$ para $\alpha_c = \alpha_\dagger$. Intuitivamente, esto puede explicarse debido a que para el proceso ROUP (5.8), el valor absoluto de la fuerza de fricción esta acotado por $\alpha_c M$, mientras que la fuerza de fricción no esta acotada para el modelo RBM (5.10). De este modo, la difusión espacial es más fuerte en el último caso.

5.3.3. Coeficiente de fricción constante en la ecuación de Langevin-Itô

El proceso RBM tratado en el apartado anterior está caracterizado por un coeficiente de fricción constante $\alpha_\dagger$ cuando se adopta la integral backward en la ecuación de Langevin (5.1). Otro modelo de movimiento Browniano relativista, que denotaremos por RBM(I), se obtiene al considerar un coeficiente de fricción constante $\alpha_*(p) \equiv \alpha_* > 0$ en la ecuación de Langevin (5.1) con la integral de Itô.

La relación relativista de Einstein (5.4) implica que

$$D(p) = \frac{\alpha_*}{\beta^2}\left(1+\beta p^0\right) \quad \forall p \in \mathbb{R}.$$

Así que la ecuación de Langevin asociada al RBM(I) es

$$dP_t = -\alpha_* P_t dt + \left[\frac{2\alpha_*}{\beta^2}\left(1+\beta P_t^0\right)\right]^{1/2} * dW_t, \tag{5.16}$$

la cual tiene solución única.

Proposición 82 *Supongamos que* (X_0, P_0) *es una variable aleatoria independiente de* W_t *para* $t \geq 0$*. Entonces, la ecuación (5.16) tiene una única solución global.*

Demostración. Procederemos como en la demostración de la existencia y unicidad de la solución del proceso RBM. Del Lema 78 se sigue que, para cada $(P, Q) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
& |\alpha_* P - \alpha_* Q| + \left| \left[\frac{2\alpha_*}{\beta^2}\left(1+\beta P^0\right)\right]^{1/2} - \left[\frac{2\alpha_*}{\beta^2}\left(1+\beta Q^0\right)\right]^{1/2} \right| \\
\leq \;& \alpha_* |P-Q| + \left(\frac{2\alpha_*}{\beta^2}\right)^{1/2} \left| \left(1+\beta P^0\right)^{1/2} - \left(1+\beta Q^0\right)^{1/2} \right| \\
\leq \;& \alpha_* |P-Q| + \left(\frac{2\alpha_*}{\beta}\right)^{1/2} \frac{\left|P^0 - Q^0\right|}{\left|(1+\beta P^0)^{1/2} + (1+\beta Q^0)^{1/2}\right|} \\
\leq \;& \alpha_* |P-Q| + \left(\frac{\alpha_*}{2\beta}\right)^{1/2} |P-Q| \\
= \;& \left(\alpha_* + \left(\frac{\alpha_*}{2\beta}\right)^{1/2}\right) |P-Q|,
\end{aligned}$$

lo que prueba lo deseado. ■

Por otro lado, la velocidad del RBM(I) dado por (5.16) queda determinada de la siguiente manera.

Proposición 83 *Sea* (X_t, P_t) *como en la relación (5.16). Entonces, la ecuación diferencial* *asociada al proceso* $V_t = \frac{P_t}{P_t^0}$ *es*

$$dV_t = -\alpha_* \left[\left(1 - V_t^2\right) + \frac{3}{\chi} \left(1 - V_t^2\right)^{3/2} + \frac{3}{\chi^2} \left(1 - V_t^2\right)^2 \right] V_t dt + \left\{ \frac{2\alpha_*}{\chi} \left[\left(1 - V_t^2\right)^{5/2} + \chi^{-1} \left(1 - V_t^2\right)^3 \right] \right\} * dW_t, \tag{5.17}$$

con $\chi = \beta M$.

Demostración. Utilizaremos una vez más la Proposición 68. Notemos que la ecuación (5.16) es del tipo (5.1) con

$$\begin{aligned} \alpha_* (p) &= \alpha_* = \widetilde{\alpha}_* (v), \\ D(p) &= \frac{\alpha_*}{\beta^2} \left(1 + \beta p^0\right) = \alpha_* \left(\frac{\left(1 - v^2\right)^{1/2}}{\beta^2} + \frac{M^2}{\chi} \right) \left(1 - v^2\right)^{-1/2} = \widetilde{D}(v), \end{aligned}$$

bajo la identidad $v = \frac{p}{p^0}$. Aplicando la Proposición 68 a la ecuación (5.16) se llega al resultado deseado. ■

Para el coeficiente de difusión efectiva obtenemos la siguiente expresión.

Proposición 84 *La posición* X_t *asociada al proceso RBM(I) dado por la ecuación (5.16), tiene como constante de difusión asintótica a*

$$D_\infty (X) = \left[\alpha_* K_1 (\chi)\right]^{-1} \int_0^1 \frac{e^{-\chi\left(1 - v^2\right)^{-1/2}}}{\chi \left(1 - v^2\right) + \left(1 - v^2\right)^{3/2}} dv,$$

para $\chi = \beta M$ *y y* K_1 *la función de Bessel modificada de segunda clase de orden* 1.

Observación 85 *Cabe señalar que la integral que aparece en esta proposición no tiene una forma explícita y se evalúa de manera numérica.*

Demostración. (Proposición 84). Procederemos como en las pruebas de las Proposiciones 76 y 81. Nótese que la velocidad del proceso RBM(I) satisface la ecuación (5.17), la cual tiene como proceso equivalente a una ecuación de la forma (5.6) con

$$\begin{aligned}
b(v) &= \frac{\alpha_*}{\chi}\left[\left(1-v^2\right)^{5/2}+\chi^{-1}\left(1-v^2\right)^3\right],\\
a_\bullet(v) &= \alpha_*\left[\left(1-v^2\right)+\frac{3}{\chi}\left(1-v^2\right)^{3/2}+\frac{3}{\chi^2}\left(1-v^2\right)^2\right]-\alpha_*\left[\frac{5}{\chi}\left(1-v^2\right)^{3/2}+\frac{6}{\chi^2}\left(1-v^2\right)^2\right]\\
&= \alpha_*\left[\left(1-v^2\right)-\frac{2}{\chi}\left(1-v^2\right)^{3/2}-\frac{3}{\chi^2}\left(1-v^2\right)^2\right],
\end{aligned}$$

para cualquier $v\in[-1,1]$. Entonces, según la notación del Teorema 70

$$\mu_*(v)=\alpha_*\left[\left(1-v^2\right)+\frac{3}{\chi}\left(1-v^2\right)^{3/2}+\frac{3}{\chi^2}\left(1-v^2\right)^2\right]v,$$

$$\begin{aligned}
U(v) &= \chi\int_0^v \frac{\left[\left(1-w^2\right)+\frac{3}{\chi}\left(1-w^2\right)^{3/2}+\frac{3}{\chi^2}\left(1-w^2\right)^2\right]w}{\left[\left(1-w^2\right)^{5/2}+\chi^{-1}\left(1-w^2\right)^3\right]}dw\\
&= \chi\int_0^v \frac{w}{\left(1-w^2\right)^{3/2}}\left[\frac{1+\frac{3}{\chi}\left(1-w^2\right)^{1/2}+\frac{3}{\chi^2}\left(1-w^2\right)}{1+\chi^{-1}\left(1-w^2\right)^{1/2}}\right]dw\\
&= \chi\int_0^v \frac{w}{\left(1-w^2\right)^{3/2}}\left[\frac{1}{1+\chi^{-1}\left(1-w^2\right)^{1/2}}+\frac{\frac{3}{\chi}\left(1-w^2\right)^{1/2}+\frac{3}{\chi^2}\left(1-w^2\right)}{1+\chi^{-1}\left(1-w^2\right)^{1/2}}\right]dw\\
&= \chi\int_0^v \left[\frac{w}{\left(1-w^2\right)^{3/2}+\chi^{-1}\left(1-w^2\right)^2}+\frac{3w}{\chi\left(1-w^2\right)}\right]dw\\
&= \chi\int_0^v \frac{w}{\left(1-w^2\right)^{3/2}+\chi^{-1}\left(1-w^2\right)^2}dw-\frac{3}{2}\log\left(1-v^2\right)\\
&= \chi\left[\left(1-w^2\right)^{-1/2}+\frac{1}{2\chi}\log\left(\frac{1-w^2}{\left[1+\chi^{-1}\left(1-w^2\right)^{1/2}\right]^2}\right)\right]_{w=0}^{w=v}-\frac{3}{2}\log\left(1-v^2\right)\\
&= \frac{\chi}{\left(1-v^2\right)^{1/2}}+\frac{1}{2}\log\left(\frac{1-v^2}{\left[1+\chi^{-1}\left(1-v^2\right)^{1/2}\right]^2}\right)-\chi+\log\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right)-\frac{3}{2}\log\left(1-v^2\right)\\
&= \frac{\chi}{\left(1-v^2\right)^{1/2}}-\chi+\log\left[\frac{1}{\left(1-v^2\right)+\chi^{-1}\left(1-v^2\right)^{3/2}}\right]+\log\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right)\\
&= \log\left[\frac{\chi+1}{\chi\left(1-v^2\right)+\left(1-v^2\right)^{3/2}}\right]-\chi\left[1-\left(1-v^2\right)^{-1/2}\right],
\end{aligned}$$

para $v \in [0,1)$.

Considerando las demostraciones de las Proposiciones 76 y 81, y aplicando la ecuación (5.7), la Observación 71 y el Lema 75, se llega a que

$$\begin{aligned} D_{\infty}(X) &= \frac{e^{\chi}\chi 2}{\alpha_*(\chi+1)} \frac{\int_0^1 e^{U(y)} \left\{\int_y^1 x \exp\left[-\chi\left(1-x^2\right)^{-1/2}\right]\left(1-x^2\right)^{-3/2} dx\right\}^2 dy}{\int_0^1 \exp\left[-\chi\left(1-z^2\right)^{-1/2}\right]\left(1-z^2\right)^{-3/2} dz} \\ &= -\frac{e^{\chi}}{\alpha_*(\chi+1)\frac{d}{d\chi}K_0(\chi)} \int_0^1 e^{U(y)} \exp\left[-2\chi\left(1-y^2\right)^{-1/2}\right] dy \\ &= \frac{1}{\alpha_* K_1(\chi)} \int_0^1 \frac{\exp\left[-\chi\left(1-y^2\right)^{-1/2}\right]}{\chi\left(1-y^2\right)+\left(1-y^2\right)^{3/2}} dy \\ &= \left[\alpha_* K_1(\chi)\right]^{-1} \int_0^1 \frac{e^{-\chi\left(1-v^2\right)^{-1/2}}}{\chi\left(1-v^2\right)+\left(1-v^2\right)^{3/2}} dv, \end{aligned}$$

lo que demuestra lo deseado. ■

El ROUP y los dos modelos RBM son casos límites especiales de la ecuación de Langevin (5.1) con coeficientes de fricción elegidos arbitrariamente. Para sistemas realistas, la forma exacta del coeficiente de fricción se determina por las interacciones microscópicas. Por tanto se puede obtener información sobre las fuerzas microscópicas inherentes al realizar mediciones simultáneas de la temperatura y las constantes de difusión (asintótica). Más adelante, en el Capítulo 7, se dará un método general para deducir coeficientes de fricción más realistas a partir de modelos microscópicos.

Capítulo 6

Reparametrizaciones de la Ecuación de Langevin

En los capítulos anteriores sólo se han considerado ecuaciones de Langevin parametrizadas en términos del tiempo t del marco de referencia del laboratorio Σ. En este Capítulo se estudian las reparametrizaciones de la ecuación de Langevin en términos del tiempo propio de la partícula y del tiempo de un observador en movimiento. Lo primero se hace en la Sección 1 mientras que lo segundo en la Sección 2.

6.1. Reparametrización en términos del tiempo propio

En esta sección se estudia como la ecuación de Langevin, en términos del tiempo t del marco de referencia Σ, puede ser reparametrizada en términos del tiempo propio τ de la partícula. Para este propósito, se considera la ecuación de Langevin d-dimensional con la integral de Itô

$$dX_t^\alpha = \left(\frac{P_t^\alpha}{P_t^0}\right) dt, \tag{6.1a}$$

$$dP_t^i = A^i\left(t, \mathbf{X}_t, \mathbf{P}_t\right) dt + c^{ij}\left(t, \mathbf{X}_t, \mathbf{P}_t\right) * dW_t^j, \tag{6.1b}$$

para $i = 1, \ldots, d$, $\alpha = 0, 1, \ldots, d$, $\mathbf{X}_t = \left(X_t^1, \ldots, X_t^d\right)$ y $\mathbf{P}_t = \left(P_t^1, \ldots, P_t^d\right)$. Además, en la ecuación anterior, $\mathbf{W}_t = \left(W_t^1, \ldots, W_t^d\right)$ es un proceso de Wiener d-dimensional y las funciones $A^i, c^{ij} : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ son de clase C^1.

A partir de la fórmula de Itô, se llega a que la ecuación para la energía relativista $P_t^0 = \left(M^2 + \mathbf{P}_t^2\right)^{1/2}$ del proceso (6.1) satisface

$$dP_t^0 = \left\{ A_t^i \frac{P_t^i}{P_t^0} + \frac{D^{ij}}{2} \left[\frac{\delta_{ij}}{P_t^0} - \frac{P_t^i P_t^j}{\left(P_t^0\right)^3} \right] \right\} dt + \frac{P_t^i}{P_t^0} c^{ir} * dW_t^r, \tag{6.2}$$

con $D^{ij} := c^{ir} c^{jr} = \sum_{r=1}^d c^{ir} c^{jr}$, en donde hemos usado la convención de Einstein. Además, si la función de densidad de transición del proceso (6.1) existe[1], la ecuación de Fokker-Planck para la densidad del proceso $(\mathbf{X}_t, \mathbf{P}_t)$ es

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p^i}{p^0} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{\partial}{\partial p^i} \left[-A^i(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p^k} \left(D^{ik}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \right) \right],$$

para cualquier $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Se desea reescribir las ecuaciones (6.1) en términos del tiempo propio τ, el cual es un proceso estocástico definido por

$$\tau(t) := \int_0^t \left(1 - \mathbf{V}_s^2\right)^{1/2} ds = \int_0^t \frac{M}{P_s^0} ds \quad \forall t \geq 0.$$

Para lograr nuestro objetivo, conviene observar que $\tau(t)$ tiene inversa (para todo ω), a la cual denotaremos por $\widehat{X}_\tau^0 = \mathrm{t}(\tau)$. Esta función inversa representa el tiempo de la partícula en el marco de referencia Σ parametrizado por el tiempo propio τ. Entonces, se puede observar que, una forma de lograr el objetivo perseguido es encontrando ecuaciones diferenciales estocásticas para los procesos reparametrizados $\widehat{X}_\tau^\alpha := X_{\mathrm{t}(\tau)}^\alpha$ y $\widehat{P}_\tau^\alpha := P_{\mathrm{t}(\tau)}^\alpha$ en Σ. Precisamente, esta es la forma como se procederá. Estableceremos primero unos resultados técnicos preliminares.

Lema 86 *Los procesos* $P_t^0 := \left(M^2 + \mathbf{P}_t^2\right)^{1/2}$ *y* $c^{ij}(t, \mathbf{X}_t, \mathbf{P}_t)$ *cumplen las siguientes propiedades:*

(i) $0 < \left(\frac{P_t^0}{M}\right)^{1/2} < \infty \ \forall t \geq 0$*;*

(ii) $\left(\frac{P_t^0}{M}\right)^{1/2}$ *es un proceso no-anticipante;*

[1] Más precisamente, la ecuación (6.1), además de tener densidad de transición, debe cumplir las condiciones de los Teoremas 29, 37 y 107 y que su condición inicial tenga distribución P_0. Esto asegura la validez de la ecuación de Fokker-Planck.

Esta misma observación aplica para todos los casos donde se hable de la ecuación de Fokker-Planck en este capítulo.

(iii) $\int_0^t \frac{M}{P_s^0} ds < \infty \ \forall t \geq 0.$

Demostración. Los incisos (i) y (ii) se cumplen debido a que el proceso $\{\mathbf{P}_t, t \geq 0\}$ es no-anticipante y toma valores en $\mathbb{R}^d$. Para comprobar el inciso (iii), basta notar que $\frac{M}{P_t^0} = \frac{M}{\left(M^2+\mathbf{P}_t^2\right)^{1/2}} \leq \frac{M}{M} = 1$, lo que implica

$$\int_0^t \frac{M}{P_s^0} ds \leq \int_0^t ds = t < \infty \quad \forall t \geq 0.$$

Esto concluye la demostración. ■

Lema 87 *Los procesos* $c^{ij}\left(t, \mathbf{X}_t, \mathbf{P}_t\right)$ *cumplen la igualdad*

$$\int_0^{\mathrm{t}(\tau_0)} c^{ij}\left(s, \mathbf{X}_s, \mathbf{P}_s\right) dW_s^j = \int_0^{\tau_0} c^{ij}\left(\widehat{X}_{\mathrm{t}(r)}^0, \mathbf{X}_{\mathrm{t}(r)}, \mathbf{P}_{\mathrm{t}(r)}\right)\left(\frac{P_{\mathrm{t}(r)}^0}{M}\right)^{1/2} d\widehat{W}_r^j \qquad \forall \tau_0 \in [0, \tau(\infty)),$$

donde $\widehat{W}_t^j := \int_0^{\mathrm{t}(t)} \left(\frac{M}{P_s^0}\right)^{1/2} dW_s^j$, *para todo* $t \in [0, \infty)$.

Observación 88 *Una consecuencia inmediata del Teorema 38 es que, para cada* $j = 1, ..., d$, $\widehat{W}_t^j := \int_0^{\mathrm{t}(t)} \left(\frac{M}{P_s^0}\right)^{1/2} dW_s^j$ *define un nuevo proceso de Wiener.*

Demostración. Basaremos nuestra demostración en el Teorema 40. Del Lema 86 se sigue que podemos aplicar el Teorema 40 a las integrales $\int_0^t c^{ij}\left(s, \mathbf{X}_s, \mathbf{P}_s\right) dW_s^j$ y al tiempo intrínseco $\tau(t)$. Entonces, por el Teorema 40 tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{\mathrm{t}(\tau_0)} c^{ij}\left(s, \mathbf{X}_s, \mathbf{P}_s\right) dW_s^j &= \sum_{j=1}^d \int_0^{\mathrm{t}(\tau_0)} c^{ij}\left(s, \mathbf{X}_s, \mathbf{P}_s\right) dW_s^j \\
&= \sum_{j=1}^d \int_0^{\tau_0} c^{ij}\left(\mathrm{t}(r), \mathbf{X}_{\mathrm{t}(r)}, \mathbf{P}_{\mathrm{t}(r)}\right)\left(\frac{P_{\mathrm{t}(r)}^0}{M}\right)^{1/2} d\widehat{W}_r^j \\
&= \sum_{j=1}^d \int_0^{\tau_0} c^{ij}\left(X_{\mathrm{t}(s)}^0, \mathbf{X}_{\mathrm{t}(r)}, \mathbf{P}_{\mathrm{t}(r)}\right)\left(\frac{P_{\mathrm{t}(r)}^0}{M}\right)^{1/2} d\widehat{W}_r^j \\
&= \int_0^{\tau_0} c^{ij}\left(X_{\mathrm{t}(s)}^0, \mathbf{X}_{\mathrm{t}(r)}, \mathbf{P}_{\mathrm{t}(r)}\right)\left(\frac{P_{\mathrm{t}(r)}^0}{M}\right)^{1/2} d\widehat{W}_r^j,
\end{aligned}$$

para todo $0 \leq \tau_0 < \tau(\infty)$, donde $\widehat{W}_t^j := \int_0^{\mathrm{t}(t)} \left(\frac{M}{P_s^0}\right)^{1/2} dW_s^j$ para todo $t \in [0, \infty)$. Esto último prueba lo deseado. ■

A partir del Lema anterior es posible encontrar la reparametrización de la ecuación de Langevin en términos del tiempo propio, sin embargo es necesario demostrar primero que $\widehat{\mathbf{W}}_t := \left(\widehat{W}_t^1, \ldots, \widehat{W}_t^d\right)$ es un proceso de Wiener.

Lema 89 *Sea* $\widehat{W}_t^j := \int_0^{\mathrm{t}(t)} \left(\frac{M}{P_s^0}\right)^{1/2} dW_s^j$ *para cada* $t \geq 0$ *y* $j \in \{1, \ldots, d\}$*. Entonces,* $\widehat{\mathbf{W}}_t := \left(\widehat{W}_t^1, \ldots, \widehat{W}_t^d\right)$ $\forall t \geq 0$ *es un proceso de Wiener d-dimensional.*

Demostración. Para demostrar lo deseado, aplicaremos los Teoremas 42 y 43. Definamos $Y_t^j := \int_0^t \left(\frac{M}{P_s^0}\right)^{1/2} dW_s^j$ para cualesquiera $t \geq 0$ y $j \in \{1, \ldots, d\}$. Del Teorema 42, se sigue que

$$\left[Y^i, Y^j\right]_t = \int_0^t \frac{M}{P_s^0} d\left[W^i, W^j\right]_s \quad \forall t \geq 0.$$

Luego, se cumple que

$$\left[\widehat{W}^i, \widehat{W}^j\right]_t = \left[Y^i, Y^j\right]_{\mathrm{t}(t)} = \int_0^{\mathrm{t}(t)} \frac{M}{P_s^0} d\left[W^i, W^j\right]_s = \begin{cases} t & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases},$$

para cualesquiera $t \geq 0$, $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ e $i \neq j$. Entonces, la Observación 22 y el Teorema 43 implican que $\widehat{\mathbf{W}}_t := \left(\widehat{W}_t^1, \ldots, \widehat{W}_t^d\right)$ es un proceso de Wiener d-dimensional, que es lo que se quería demostrar. ■

El siguiente teorema es el resultado más importante de esta sección. Establece la reparametrización de la ecuación de Langevin (6.1) en términos del tiempo propio τ.

Teorema 90 *Supongamos que se cumple la ecuación (6.1). Entonces, los procesos* $\widehat{X}_\tau^0 := X_{\mathrm{t}(\tau)}^0$, $\widehat{\mathbf{X}}_\tau := \mathbf{X}_{\mathrm{t}(\tau)}$ *y* $\widehat{\mathbf{P}}_\tau := \mathbf{P}_{\mathrm{t}(\tau)}$ *satisfacen la ecuación*

$$d\widehat{X}_\tau^\alpha = \left(\frac{\widehat{P}_\tau^\alpha}{M}\right) d\tau, \tag{6.3a}$$

$$d\widehat{P}_\tau^i = \widehat{A}^i\left(\widehat{X}_\tau^0, \widehat{\mathbf{X}}_\tau, \widehat{\mathbf{P}}_\tau\right) d\tau + \widehat{c}^{ij}\left(\widehat{X}_\tau^0, \widehat{\mathbf{X}}_\tau, \widehat{\mathbf{P}}_\tau\right) * d\widehat{W}_\tau^j, \tag{6.3b}$$

para $i=1,...,d$ y $\alpha=0,1,...,d$; donde $\widehat{A}^i$, $\widehat{c}^{ij}$ y $\widehat{W}_t^j$ están dados por

$$\begin{aligned}
\widehat{A}^i\left(\widehat{X}_\tau^0,\widehat{\mathbf{X}}_\tau,\widehat{\mathbf{P}}_\tau\right) &:= \left(\frac{\widehat{P}_\tau^0}{M}\right) A^i\left(\widehat{X}_\tau^0,\widehat{\mathbf{X}}_\tau,\widehat{\mathbf{P}}_\tau\right), \\
\widehat{c}^{ij}\left(\widehat{X}_\tau^0,\widehat{\mathbf{X}}_\tau,\widehat{\mathbf{P}}_\tau\right) &:= \left(\frac{\widehat{P}_\tau^0}{M}\right)^{1/2} c^{ij}\left(\widehat{X}_\tau^0,\widehat{\mathbf{X}}_\tau,\widehat{\mathbf{P}}_\tau\right), \\
\widehat{W}_t^j &:= \int_0^{\mathrm{t}(t)} \left(\frac{M}{P_s^0}\right)^{1/2} dW_s^j \quad \forall t\in[0,\infty).
\end{aligned}$$

Observación 91 *Conviene notar que por el Lema 89 se tiene que $\widehat{\mathbf{W}}_t := \left(\widehat{W}_t^1,\dots,\widehat{W}_t^d\right)$ es un proceso de Wiener d-dimensional.*

Demostración. Basaremos nuestra demostración en el Lema 87. Aplicando el cambio de variable $s=\mathrm{t}(r)$ a la ecuación (6.1a), se llega a que

$$\begin{aligned}
\widehat{X}_{\tau_0}^\alpha &= X_{\mathrm{t}(\tau_0)}^\alpha = X_0^\alpha + \int_0^{\mathrm{t}(\tau_0)} \left(\frac{P_s^\alpha}{P_s^0}\right) ds \\
&= X_0^\alpha + \int_0^{\tau_0} \left(\frac{P_{\mathrm{t}(r)}^\alpha}{P_{\mathrm{t}(r)}^0}\right)\left(\frac{P_{\mathrm{t}(r)}^0}{M}\right) dr \\
&= X_0^\alpha + \int_0^{\tau_0} \frac{P_{\mathrm{t}(r)}^\alpha}{M} dr \\
&= \widehat{X}_0^\alpha + \int_0^{\tau_0} \frac{\widehat{P}_r^\alpha}{M} dr, \qquad (6.4)
\end{aligned}$$

para todo $0\le\tau_0<\tau(\infty)$. Además, del Lema 87 y el cambio de variable anterior, se sigue

$$\begin{aligned}
\widehat{P}_{\tau_0}^i &= P_{\mathrm{t}(\tau_0)}^i = P_0^i + \int_0^{\mathrm{t}(\tau_0)} A^i(s,\mathbf{X}_s,\mathbf{P}_s)\,ds + \int_0^{\mathrm{t}(\tau_0)} c^{ij}(s,\mathbf{X}_s,\mathbf{P}_s) * dW_s^j \\
&= P_0^i + \int_0^{\tau_0} A^i\left(\mathrm{t}(r),\mathbf{X}_{\mathrm{t}(r)},\mathbf{P}_{\mathrm{t}(r)}\right)\left(\frac{P_{\mathrm{t}(r)}^0}{M}\right) dr \\
&\quad + \int_0^{\tau_0} c^{ij}\left(X_{\mathrm{t}(r)}^0,\mathbf{X}_{\mathrm{t}(r)},\mathbf{P}_{\mathrm{t}(r)}\right)\left(\frac{P_{\mathrm{t}(r)}^0}{M}\right)^{1/2} d\widehat{W}_r^j \\
&= \widehat{P}_0^i + \int_0^{\tau_0}\left(\frac{\widehat{P}_r^0}{M}\right) A^i\left(\widehat{X}_r^0,\widehat{\mathbf{X}}_r,\widehat{\mathbf{P}}_r\right) dr \\
&\quad + \int_0^{\tau_0} c^{ij}\left(\widehat{X}_r^0,\widehat{\mathbf{X}}_r,\widehat{\mathbf{P}}_r\right)\left(\frac{\widehat{P}_r^0}{M}\right)^{1/2} d\widehat{W}_r^j
\end{aligned}$$

$$= \widehat{P}_0^i + \int_0^{\tau_0} \widehat{A}^i \left(\widehat{X}_\tau^0, \widehat{\mathbf{X}}_\tau, \widehat{\mathbf{P}}_\tau\right) d\tau + \int_0^{\tau_0} \widehat{c}^{ij} \left(\widehat{X}_\tau^0, \widehat{\mathbf{X}}_\tau, \widehat{\mathbf{P}}_\tau\right) d\widehat{W}_\tau^j, \tag{6.5}$$

para cualquier $0 \leq \tau_0 < \tau(\infty)$, donde $\widehat{A}^i$, $\widehat{c}^{ij}$ y $\widehat{W}_t^j$ se toman como en las hipótesis del Teorema.

De las ecuaciones (6.4) y (6.5) se siguen las igualdades (6.3a) y (6.3b), que es lo que queríamos probar. ■

Si la función de densidad de transición de la ecuación (6.1) existe, tenemos que el proceso (6.3) también tiene función de densidad de transición $\widehat{f}\left(\tau, x^0, \mathbf{x}, \mathbf{p}\right)$, la cual satisface la ecuación de Fokker-Planck

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{p^\alpha}{M}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)\widehat{f}\left(\tau, x^0, \mathbf{x}, \mathbf{p}\right) \;&=\; \frac{\partial}{\partial p^i}\left[-A^i\left(\tau, x^0, \mathbf{x}, \mathbf{p}\right) f\left(\tau, x^0, \mathbf{x}, \mathbf{p}\right)\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p^k}\left(D^{ik}\left(\tau, x^0, \mathbf{x}, \mathbf{p}\right) f\left(\tau, x^0, \mathbf{x}, \mathbf{p}\right)\right)\right], \end{aligned}$$

para cualquier $\left(\tau, x^0, \mathbf{x}, \mathbf{p}\right) \in (0,\infty) \times (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. La cantidad $\widehat{f}\left(\tau, x^0, \mathbf{x}, \mathbf{p}\right) \mathrm{d}x^0 \mathrm{d}^d x \mathrm{d}^d p$ se interpreta como la probabilidad de encontrar la partícula al tiempo propio τ en el espacio $(2d+1)$-dimensional $[t, t+\mathrm{d}t] \times \left(\prod_{i=1}^d \left[x^i, x^i + \mathrm{d}x^i\right]\right) \times \left(\prod_{i=1}^d \left[p^i, p^i + \mathrm{d}p^i\right]\right)$ del marco de referencia inercial Σ.

Una consecuencia interesante de esta reparametrización, surge al considerar el movimiento libre (sin la presencia de campos de fuerza) en un baño térmico termalizado, estacionario, isotrópico y homogéneo en el marco Σ. Como ya se ha comentado, en este caso la ecuación de Langevin toma la forma

$$dX_t^\alpha = \frac{P_t^i}{P_t^0} dt, \tag{6.6a}$$

$$dP_t^i = -\widehat{\alpha}\left(P_t^0\right) P_t^i + \left[\widehat{D}\left(P_t^0\right)\right]^{1/2} \delta_{ij} * dW_t^j, \tag{6.6b}$$

donde los coeficientes de ruido y fricción $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{D}$ dependen de la energía $p^0 = \left(M^2 + \mathbf{p}^2\right)^{1/2}$ y satisfacen la relación de Einstein

$$0 \equiv \widehat{\alpha}\left(p^0\right) p^0 + \widehat{D}'\left(p^0\right) - \beta D\left(p^0\right) \quad \forall p^0 \in \mathbb{R} - [-M, M].$$

En esta situación, la densidad estacionaria (marginal) del momento $f_\infty(p)$ para el proceso (6.6) es una función de Jüttner, es decir

$$f_\infty(\mathbf{p}) := \lim_{t\to\infty} f(t,\mathbf{p}) \propto \frac{\exp\left(-\beta p^0\right)}{Z_j} = \phi_J(\mathbf{p}),$$

siendo f la densidad marginal del momento del proceso (6.6).

Para algunos sistemas, es realista suponer que la velocidad de la partícula Browniana está acotada por una cantidad menor que $c = 1$. En estos casos, $\tau(\infty) = \infty$ y la densidad estacionaria marginal del momento $\widehat{f}_\infty(p)$ correspondiente a la reparametrización en términos de τ del proceso (6.6), está dada por

$$\widehat{f}_\infty(\mathbf{p}) := \lim_{\tau\to\infty} \widehat{f}(\tau,\mathbf{p}) \propto \frac{\exp\left(-\beta p^0\right)}{p^0 Z_j} = \phi_{MJ}(\mathbf{p}),$$

donde $\widehat{f}$ es la densidad marginal del momento de la reparametrización del proceso (6.6).

Así, el proceso (6.6) y su reparametrización en términos de τ tienen funciones de densidad de transición distintas, a pesar de que modelan el mismo fenómeno. Físicamente, la diferencia entre f_∞ y $\widehat{f_\infty}$ se debe a que las mediciones en $t = const$ y $\tau = const$ no son equivalentes, incluso cuando $t, \tau \to \infty$.

Usualmente, la función ϕ_{MJ} recibe el nombre de densidad de Jüttner modificada. Como puede observarse, ϕ_{MJ} difiere de la función de Jüttner estándar ϕ_J por un factor proporcional al inverso de la energía. La función de Jüttner modificada ϕ_{MJ} puede ser derivada de un principio de entropía relativa, usando el hecho de que la densidad de transición es un invariante de Lorentz.

6.2. Observadores en movimiento

Hasta ahora, solo se han tratado en este trabajo ecuaciones de Langevin que describen el movimiento aleatorio de una partícula Browniana relativista en el marco de referencia del laboratorio Σ. En esta sección, se determina como percibe un observador en movimiento (a velocidad constante $\boldsymbol{w}$) el desplazamiento de la partícula Browniana, suponiendo que se tiene una ecuación de Langevin de la forma (5.1) en el marco Σ.

Hay, al menos, dos maneras distintas de abordar este problema. Una de ellas utiliza la invarianza de Lorentz de la densidad de transición. La otra forma consiste en aplicar directamente una transformación de Lorentz a la ecuación de Langevin medida en Σ.

6.2.1. Transformación de Lorentz de la densidad de transición en el espacio fase

Un observador en reposo en el marco Σ puede medir una densidad $f(t,\mathbf{x},\mathbf{p})$, asociada al proceso $(\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t)$, que satisface las ecuaciones de Fokker-Planck (4.4) ó (4.6). Mientras que un observador que se mueve a través del marco Σ a velocidad constante $\boldsymbol{w}$ mide una densidad $f'(t',\mathbf{x}',\mathbf{p}')$. Como la densidad f resulta ser un escalar de Lorentz (ver Apéndice D.1), se tiene que

$$f'\left(t',\mathbf{x}',\mathbf{p}'\right)=f\left(t\left(t',\mathbf{x}'\right),\mathbf{x}\left(t',\mathbf{x}'\right),\mathbf{p}\left(\mathbf{p}'\right)\right) \tag{6.7}$$

y

$$f(t,\mathbf{x},\mathbf{p})=f'\left(t'(t,\mathbf{x}),\mathbf{x}'(t,\mathbf{x}),\mathbf{p}'(\mathbf{p})\right), \tag{6.8}$$

donde $(t',\mathbf{x}',\mathbf{p}')$ y $(t,\mathbf{x},\mathbf{p})$ están relacionados por

$$\begin{aligned}
x'^{\lambda}(t,\mathbf{x}) &= \Lambda^{\lambda 0}t+\Lambda^{\lambda i}x^{i},\\
p'^{i}(\mathbf{p}) &= \Lambda^{i0}\left(M^{2}+\mathbf{p}^{2}\right)^{1/2}+\Lambda^{\lambda j}p^{j},
\end{aligned}$$

siendo $\Lambda^{\nu\mu}$ una transformación de Lorentz del marco Σ al marco del observador en movimiento.

Para calcular f' es suficiente resolver las ecuaciones de Fokker-Planck (4.4) que se cumplen en el marco Σ, para una condición inicial t-simultánea $f(0,\mathbf{x},\mathbf{p})$, e insertar tal solución en (6.7). Obteniendo f' se logra determinar la forma en que el observador en movimiento (velocidad constante $\boldsymbol{w}$) percibe el movimiento de la partícula Browniana, con lo cual completamos nuestro objetivo.

6.2.2. Transformación de Lorentz de la ecuación de Langevin

Considérese un marco de referencia inercial Σ', el cual se encuentra en movimiento respecto a Σ. En esta subsección se encuentran ecuaciones diferenciales estocásticas explícitas para el movimiento Browniano en Σ', suponiendo que la ecuación de Langevin (6.1) se cumple en el marco Σ. Más precisamente, se obtienen ecuaciones diferenciales parametrizadas por el tiempo t' (de Σ') para la posición $\mathbf{X}'_{t'}$ y el momento $\mathbf{P}'_{t'}$ medidos en Σ'. Esto se logra aplicando una transformación de Lorentz a las ecuaciones de Langevin que se cumplen en Σ.

Con objeto de establecer las ecuaciones diferenciales estocásticas deseadas para $\mathbf{X}'_{t'}$ y $\mathbf{P}'_{t'}$, conviene comenzar estableciendo igualdades que relacionen a $\left(t', \mathbf{X}'_{t'}, \mathbf{P}'_{t'}\right)$ y $(t, \mathbf{X}_t, \mathbf{P}_t)$. Con este propósito, considérese una transformación de Lorentz $\Lambda = \Lambda^{\nu\mu}$ del marco del laboratorio Σ al marco Σ'. Por conveniencia, se excluyen transformaciones de Lorentz que envuelven inversión espacial o reversión temporal, es decir, nos restringimos a transformaciones propias de Lorentz con $\Lambda^{00} > 0$. Entonces, si se define

$$Y_t'^{\nu} := \Lambda^{\nu\mu} X_t^{\mu}, \qquad G_t'^{\nu} := \Lambda^{\nu\mu} P_t^{\mu},$$

para $\nu = 0, 1, \ldots, d$ y $t \geq 0$, se tiene que los procesos $\left(\mathbf{X}'_{t'}, \mathbf{P}'_{t'}\right)$ y $(\mathbf{X}_t, \mathbf{P}_t)$ cumplen las relaciones

$$X_{t'_0}'^{\alpha} = Y_{\mathrm{t}\left(t'_0\right)}'^{\alpha}, \qquad P_{t'_0}'^{\alpha} = G_{\mathrm{t}\left(t'_0\right)}'^{\alpha},$$

para $\alpha = 0, 1, \ldots d$ y donde se toma $\mathrm{t} := (t')^{-1}$. Además, también se tiene que

$$dt'(t) = dY_t'^{0} = \frac{\Lambda^{0\mu} P_t^{\mu}}{P_t^0} dt = \frac{G_t'^0}{P_t^0} dt = \frac{P_{t'(t)}'^0}{\left(\Lambda^{-1}\right)^{0\mu} P_{t'(t)}'^{\mu}} dt, \tag{6.9}$$

donde Λ^{-1} es la inversa de la transformación de Lorentz.

Con lo anterior, procederemos a encontrar las ecuaciones diferenciales estocásticas para $\mathbf{X}'_{t'}$ y $\mathbf{P}'_{t'}$. La idea a seguir es muy similar a la utilizada para encontrar la reparametrización en términos del tiempo propio. Se comienza encontrando ecuaciones diferenciales estocásticas para los procesos $\left(Y_{t'}'^{\alpha}\right)$ y $\left(G_{t'}'^{\alpha}\right)$. Posteriormente, se utiliza el Teorema 40 para establecer las ecuaciones para $\left(X_{t'}'^{\alpha}\right)$ y $\left(P_{t'}'^{\alpha}\right)$.

A continuación se establecen ecuaciones diferenciales para los procesos $\left(Y_{t'}'^{\alpha}\right)$ y $\left(G_{t'}'^{\alpha}\right)$. Se inicia con un resultado que simplifica el encontrar tales ecuaciones, el cual es una consecuencia inmediata de la ecuación (6.2).

Lema 92 *Supongamos que la ecuación (6.1) se cumple. Entonces, la energía relativista* $P_t^0 :=$

$\left(M^2+\mathbf{P}^2\right)^{1/2}$ *tiene asociada la diferencial*

$$dP_t^0 = A^0\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)dt + c^{0j}\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)dW_t^j,$$

donde

$$\begin{aligned} A^0\left(t,\mathbf{x},\mathbf{p}\right) &:= A^i\left(t,\mathbf{x},\mathbf{p}\right)\frac{p^i}{p^0} + \frac{D^{ij}\left(t,\mathbf{x},\mathbf{p}\right)}{2}\left[\frac{\delta_{ij}}{p^0} - \frac{p^ip^j}{\left(p^0\right)^3}\right], \\ c^{0j}\left(t,\mathbf{x},\mathbf{p}\right) &:= \frac{p^i}{p^0}c^{ij}\left(t,\mathbf{x},\mathbf{p}\right), \end{aligned}$$

para cualquier $(t,\mathbf{x},\mathbf{p}) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$*.*

Proposición 93 *Supongamos que la ecuación (6.1) se cumple. Entonces, los procesos* $Y_t'^{\nu} := \Lambda^{\nu\mu}X_t^{\mu}$ *y* $G_t'^{\nu} := \Lambda^{\nu\mu}P_t^{\mu}$ *satisfacen las ecuaciones diferenciales*

$$dY_t'^{\alpha} = \frac{G_t'^{\alpha}}{P_t^0}dt, \tag{6.10a}$$

$$dG_t'^{\alpha} = \Lambda^{i\mu}A^{\mu}\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)dt + \Lambda^{i\mu}c^{\mu j}\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)dW_t^j. \tag{6.10b}$$

Demostración. Comenzaremos probando (6.10b); para demostrarlo aplicaremos la fórmula de Itô. Definamos $u:\mathbb{R}^{d+1}\to\mathbb{R}^{d+1}$ dada por $u\left(p^0,\mathbf{p}\right) = \Lambda\left(p^{\alpha}\right)$.

Por ser Λ una transformación lineal, se tiene que u satisface las hipótesis necesarias para aplicarle la fórmula de Itô $d+1$-dimensional. Entonces, si $\{\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_{d+1}\}$ forma la base canónica de $\mathbb{R}^{d+1}$, de la fórmula de Itô 26 y el Lema 92, se sigue que el proceso $G_t'^{\nu} := \Lambda^{\nu\mu}P_t^{\mu} = u\left(P_t^0,\mathbf{P}_t\right)$ satisface la ecuación

$$\begin{aligned} dG_t^{\alpha} &= \sum_{\mu=0}^{d}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left\langle u\left(P_t^0,\mathbf{P}_t\right),\mathbf{e}_{\alpha}\right\rangle\right]dP_t^{\mu} + \frac{1}{2}\sum_{\beta,\nu=0}^{d}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^{\beta}\partial x^{\nu}}\left\langle u\left(P_t^0,\mathbf{P}_t\right),\mathbf{e}_{\alpha}\right\rangle\right]dP_t^{\beta}dP_t^{\nu} \\ &= \Lambda^{\alpha\mu}dP_t^{\mu} \\ &= \Lambda^{\alpha\mu}A^{\mu}\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)dt + \Lambda^{\alpha\mu}c^{\mu j}\left(t,\mathbf{X}_t,\mathbf{P}_t\right)dW_t^j, \end{aligned}$$

lo que prueba (6.10b). Para demostrar (6.10a) se puede proceder de manera similar. ■

Utilizando el resultado anterior, se encuentran las ecuaciones para $\left(X_{t'}^{\prime\alpha}\right)$ y $\left(P_{t'}^{\prime\alpha}\right)$. Se establecen primero unos resultados técnicos preliminares.

Lema 94 *Los procesos* $P_t^0 := \left(M^2 + \mathbf{P}_t^2\right)^{1/2}$ *y* $c^{ij}\left(t, \mathbf{X}_t, \mathbf{P}_t\right)$ *cumplen las siguientes propiedades:*

(i) $0 < \left(\frac{P_t^0}{\Lambda^{0\mu} P_t^\mu}\right)^{1/2} < \infty\ \forall t \geq 0$*;*

(ii) $\left(\frac{P_t^0}{\Lambda^{0\mu} P_t^\mu}\right)^{1/2}$ *es un proceso no-anticipante;*

(iii) $\int_0^t \frac{\Lambda^{0\mu} P_t^\mu}{P_t^0} ds < \infty\ \forall t \geq 0$*.*

Demostración. El inciso (i) se cumple debido a que $\mathbf{P}_t^2, (\mathbf{P}'_{t'(t)})^2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\ \forall t \geq 0$ y a que $\frac{P_t^0}{\Lambda^{0\mu} P_t^\mu} = \frac{P_t^0}{P_{t'(t)}^{\prime 0}} = \frac{\left(M^2 + \mathbf{P}_t^2\right)^{1/2}}{\left(M^2 + \left(\mathbf{P}'_{t'(t)}\right)^2\right)^{1/2}}\ \forall t \geq 0$. El inciso (ii) es una consecuencia de que el proceso $\{\mathbf{P}_t, t \geq 0\}$ sea no-anticipante y de que la transformación $\Lambda : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^{d+1}$ sea continua.

Resta demostrar el inciso (iii). Sea $t_0 \geq 0$. Debido a que $s \mapsto \frac{\Lambda^{0\mu} P_s^\mu}{P_s^0}$ es una composición de funciones continuas, tenemos que tal función esta acotada en $[0, t_0]\ \forall \omega$. Por lo tanto, $\int_0^{t_0} \frac{\Lambda^{0\mu} P_s^\mu}{P_s^0} ds < \infty$, lo cual implica que $\int_0^t \frac{\Lambda^{0\mu} P_s^\mu}{P_s^0} ds < \infty\ \forall t \geq 0$, lo que demuestra el inciso (iii). Con esto concluye la demostración. ■

Proposición 95 *El tiempo* t' *en* Σ' *satisface* $t'(\infty) = \infty$*.*

Demostración. Debido a que $\Lambda = \Lambda^{\nu\mu}$ es una transformación propia de Lorentz, por el Apéndice C (ecuación (C.7)) sabemos que

$$\Lambda = BR,$$

donde R es una rotación de la forma (C.5) y B es un boost de Lorentz de la forma (C.6) con $\gamma = \left(1 - \boldsymbol{w}^2\right)^{-1/2}$. Luego, tenemos que

$$\Lambda\left(X_t^0, \mathbf{X}_t\right) = BR \begin{pmatrix} X_t^0 \\ \mathbf{X}_t \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} t \\ \left(R_{ij}\right) \mathbf{X}_t \end{pmatrix}.$$

De esto último y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se sigue que

$$\begin{aligned} t'(t) &\equiv t'(t, \mathbf{X}_t) = \gamma t - \langle (R_{ij}) \mathbf{X}_t, \gamma \boldsymbol{w} \rangle \\ &\geq \gamma t - \|(R_{ij}) \mathbf{X}_t\| \, \|\gamma \boldsymbol{w}\| \\ &= \gamma (t - \|\mathbf{X}_t\| \, \|\boldsymbol{w}\|) \\ &\geq \gamma (t - (t + \mathbf{X}_0) \, \|\boldsymbol{w}\|) \\ &= \gamma t (1 - \|\boldsymbol{w}\|) - \gamma \mathbf{X}_0 \, \|\boldsymbol{w}\| . \end{aligned} \tag{6.11}$$

Entonces, debido a que consideramos a $\mathbf{X}_0$ una condición inicial determinista, de la ecuación (6.11) es claro que $t'(\infty) = \infty$, que prueba lo deseado. ■

Sin perder generalidad se puede suponer que $\mathbf{X}_0 = 0$. Esta suposición permite establecer una ecuación diferencial estocástica "sencilla" para describir el movimiento Browniano relativista en Σ'.

Lema 96 *Supongamos que se cumplen las ecuaciones (6.1). Los procesos $c^{ij}(t, \mathbf{X}_t, \mathbf{P}_t)$ cumplen la relación*

$$\int_0^{\mathrm{t}(t'_0)} \Lambda^{i\mu} c^{\mu j}(s, \mathbf{X}_s, \mathbf{P}_s) \, dW_s^j = \int_0^{t'_0} \Lambda^{i\mu} c^{\mu j}\left(\mathrm{t}(r), \mathbf{X}_{\mathrm{t}(r)}, \mathbf{P}_{\mathrm{t}(r)}\right) \left(\frac{P^0_{\mathrm{t}(r)}}{G'^0_{\mathrm{t}(r)}}\right)^{1/2} dW'^j_r \qquad \forall t'_0 \geq 0,$$

donde $W'^j_t := \int_0^{\mathrm{t}(t)} \left(\frac{G'^0_t}{P^0_t}\right)^{1/2} dW_s^j$, para todo $t \in [0, \infty)$.

Observación 97 *Una consecuencia inmediata del Teorema 38 es que, para cada $j = 1, ..., d$, $W'^j_t := \int_0^{\mathrm{t}(t)} \left(\frac{G'^0_t}{P^0_t}\right)^{1/2} dW_s^j$ define un nuevo proceso de Wiener.*

Demostración. Basaremos nuestra demostración en el Teorema 40. Por ser $\mathbf{X}_0 = 0$, tenemos que $t'(0) = 0$. Entonces, de las ecuaciones (6.9), se sigue que

$$t'(t) = \int_0^t \frac{\Lambda^{0\mu} P_s^\mu}{P_s^0} ds = \int_0^t \frac{G'^0_s}{P_s^0} ds = \int_0^t \frac{P'^0_{t'(s)}}{(\Lambda^{-1})^{0\mu} P'^\mu_{t'(s)}} ds \quad \forall t \geq 0.$$

Teniendo en cuenta la ecuación anterior, del Lema 94 se sigue que podemos aplicar el Teorema 40 a las integrales $\int_0^t \Lambda^{i\mu} c^{\mu j}(s, \mathbf{X}_s, \mathbf{P}_s) \, dW_s^j$ y al tiempo intrínseco $t'(t)$. Entonces, por el Teorema 40 tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^{\mathrm{t}(t_0')} \Lambda^{i\mu} c^{\mu j}(s, \mathbf{X}_s, \mathbf{P}_s)\, dW_s^j &= \sum_{j=1}^{d} \int_0^{\mathrm{t}(t_0')} \Lambda^{i\mu} c^{\mu j}(s, \mathbf{X}_s, \mathbf{P}_s)\, dW_s^j \\ &= \sum_{j=1}^{d} \int_0^{t_0'} \Lambda^{i\mu} c^{\mu j}\left(\mathrm{t}(r), \mathbf{X}_{\mathrm{t}(r)}, \mathbf{P}_{\mathrm{t}(r)}\right) \left(\frac{P^0_{\mathrm{t}(r)}}{G'^0_{\mathrm{t}(r)}}\right)^{1/2} dW_r'^j \\ &= \int_0^{t_0'} \Lambda^{i\mu} c^{\mu j}\left(\mathrm{t}(r), \mathbf{X}_{\mathrm{t}(r)}, \mathbf{P}_{\mathrm{t}(r)}\right) \left(\frac{P^0_{\mathrm{t}(r)}}{G'^0_{\mathrm{t}(r)}}\right)^{1/2} dW_r'^j,\end{aligned}$$

para todo $0 \leq t_0' < t'(\infty) = \infty$, donde $W_t'^j := \int_0^{\mathrm{t}(t)} \left(\frac{G_t'^0}{P_t^0}\right)^{1/2} dW_s^j$ para todo $t \in [0, \infty)$. Esto último prueba lo deseado. ■

A partir del Lema anterior es posible encontrar las ecuaciones que describen el movimiento de la partícula Browniana en Σ; sin embargo, al igual que en la reparametrización en términos del tiempo propio, es necesario demostrar que $\mathbf{W}_t' := \left(W_t'^1, \ldots, W_t'^d\right)$ es un proceso de Wiener d-dimensional.

Lema 98 *Sea* $W_t'^j := \int_0^{\mathrm{t}(t)} \left(\frac{G_t'^0}{P_t^0}\right)^{1/2} dW_s^j$ *para cada* $t \geq 0$ *y* $j \in \{1, \ldots, d\}$*. Entonces,* $\left\{\mathbf{W}_t' := \left(W_t'^1, \ldots, W_t'^d\right), t \geq 0\right\}$ *es un proceso de Wiener d-dimensional.*

Demostración. Procederemos como en la demostración del Lema 98. Definamos $Y_t^j := \int_0^t \left(\frac{G_t'^0}{P_t^0}\right)^{1/2} dW_s^j = \int_0^t \left(\frac{\Lambda^{0\mu} P_t^\mu}{P_t^0}\right)^{1/2} dW_s^j$ para cualesquiera $t \geq 0$ y $j \in \{1, \ldots, d\}$. Por el Teorema 42, tenemos que

$$\left[Y^i, Y^j\right]_t = \int_0^t \frac{G_t'^0}{P_t^0} d\left[W^i, W^j\right]_s \quad \forall t \geq 0.$$

Luego, como supusimos $\mathbf{X}_0 = 0$, se cumple que

$$\left[W'^i, W'^j\right]_t = \left[Y^i, Y^j\right]_{\mathrm{t}(t)} = \int_0^{\mathrm{t}(t)} \frac{G_t'^0}{P_t^0} d\left[W^i, W^j\right]_s = \begin{cases} t & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases},$$

para cualesquiera $t \geq 0$, $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ e $i \neq j$. Entonces, la Observación 22 y el Teorema 43 implican que $\mathbf{W}_t' := \left(W_t'^1, \ldots, W_t'^d\right)$ es un proceso de Wiener d-dimensional, que es lo que se quería probar. ■

El siguiente teorema es el resultado más importante de esta subsección. Establece las ecuaciones que describen el movimiento de la partícula Browniana en Σ'.

Teorema 99 *Supongamos que se cumple la ecuación (6.1). Entonces, los procesos* $X_{t_0'}'^{\alpha} = Y_{\mathrm{t}(t_0')}'^{\alpha}$ *y* $P_{t_0'}'^{\alpha} = G_{\mathrm{t}(t_0')}'^{\alpha}$ *satisfacen las ecuaciones*

$$\begin{aligned} dX_{t'}'^{\alpha} &= \left(\frac{P_{t'}'^{\alpha}}{M}\right) dt', && (6.12a) \\ dP_{t'}'^{i} &= A'^{i}\left(t', \mathbf{X}_{t'}', \mathbf{P}_{t'}'\right) d\tau + c'^{ij}\left(t', \mathbf{X}_{t'}', \mathbf{P}_{t'}'\right) * dW_{t'}'^{j}, && (6.12b) \end{aligned}$$

para $i = 1, \ldots, d$ *y* $\alpha = 0, 1, \ldots, d$*; donde* A'^i, c'^{ij} *y* $W_{t'}'^{j}$ *están dados por*

$$\begin{aligned} A'^{i}\left(x'^{0}, \mathbf{x}', \mathbf{p}'\right) &: = \left[\frac{\left(\Lambda^{-1}\right)^{0\mu} p'^{\mu}}{p'^{0}}\right] \Lambda^{i\nu} A^{\nu}\left(\left[\left(\Lambda^{-1}\right)^{\alpha\mu} x'^{\mu}\right]_{\alpha=0}^{d}, \left[\left(\Lambda^{-1}\right)^{j\mu} p'^{\mu}\right]_{j=1}^{d}\right) \\ c'^{ij}\left(x'^{0}, \mathbf{x}', \mathbf{p}'\right) &: = \left[\frac{\left(\Lambda^{-1}\right)^{0\mu} p'^{\mu}}{p'^{0}}\right]^{1/2} \Lambda^{i\nu} c^{\nu j}\left(\left[\left(\Lambda^{-1}\right)^{\alpha\mu} x'^{\mu}\right]_{\alpha=0}^{d}, \left[\left(\Lambda^{-1}\right)^{j\mu} p'^{\mu}\right]_{j=1}^{d}\right) \\ W_t'^{j} &: = \int_0^{\mathrm{t}(t)} \left(\frac{G_t'^{0}}{P_t^0}\right)^{1/2} dW_s^j, \quad \forall t \in [0, \infty). \end{aligned}$$

Observación 100 *Hay dos hechos implícitos importantes en la definición de* A'^i *y* c'^{ij}*:*

1. *Dado un vector* $\left(z^0, z^1, \ldots, z^d\right) \in \mathbb{R}^{d+1}$ *y un número* $m \in \{0, 1, \ldots, d\}$*, definimos*

$$\left[z^l\right]_{l=m}^{d} := \left(z^m, z^{m+1}, \ldots, z^d\right) \in \mathbb{R}^{d+1-m}.$$

   Luego, $\left[z^l\right]_{l=m}^{d}$ *es un vector en* $\mathbb{R}^{d+1-m}$.

2. *En un pequeño abuso de notación, estamos entendiendo*

$$\left[\left(\Lambda^{-1}\right)^{\alpha\mu} x'^{\mu}\right]_{\alpha=0}^{d} = \left(\left(\Lambda^{-1}\right)^{0\mu} x'^{\mu}, \left[\left(\Lambda^{-1}\right)^{j\mu} x'^{\mu}\right]_{j=1}^{d}\right).$$

   Entonces, tiene sentido evaluar A^i *y* c^{ij} *en* $\left(\left[\left(\Lambda^{-1}\right)^{\alpha\mu} x'^{\mu}\right]_{\alpha=0}^{d}, \left[\left(\Lambda^{-1}\right)^{j\mu} p'^{\mu}\right]_{j=1}^{d}\right)$*. Hacemos uso de esta notación para facilitar el tratamiento, así como para simplificar y compactar expresiones.*

Demostración. (Teorema 99). Basaremos nuestra demostración en las Proposiciones 93 y

96. Aplicando el cambio de variable $s = \mathrm{t}(r)$ a la ecuación (6.10a), se llega a que

$$\begin{aligned}
X'^{\alpha}_{t'_0} &= Y'^{\alpha}_{\mathrm{t}(t'_0)} = Y'^{\alpha}_0 + \int_0^{\mathrm{t}(t'_0)} \frac{G'^{\alpha}_s}{P^0_s} ds \\
&= Y'^{\alpha}_0 + \int_0^{t'_0} \frac{G'^{\alpha}_{\mathrm{t}(r)}}{P^0_{\mathrm{t}(r)}} \frac{P^0_{\mathrm{t}(r)}}{G'^0_{\mathrm{t}(r)}} dr \\
&= Y'^{\alpha}_0 + \int_0^{t'_0} \frac{G'^{\alpha}_{\mathrm{t}(r)}}{G'^0_{\mathrm{t}(r)}} dr \\
&= X'^{\alpha}_0 + \int_0^{t'_0} \frac{P'^{\alpha}_r}{P'^0_r} dr, \qquad (6.13)
\end{aligned}$$

para todo $t'_0 \geq 0$. Además, del Lema 96 y el cambio de variable anterior, se sigue

$$\begin{aligned}
P'^i_{t'_0} &= G'^i_{\mathrm{t}(t'_0)} = G'^i_0 + \int_0^{\mathrm{t}(t'_0)} \Lambda^{i\mu} A^{\mu}(s, \mathbf{X}_s, \mathbf{P}_s)\, ds + \int_0^{\mathrm{t}(t'_0)} \Lambda^{i\mu} c^{\mu j}(s, \mathbf{X}_s, \mathbf{P}_s)\, dW^j_s \\
&= G'^i_0 + \int_0^{t'_0} \Lambda^{i\mu} A^{\mu}\left(\mathrm{t}(r), \mathbf{X}_{\mathrm{t}(r)}, \mathbf{P}_{\mathrm{t}(r)}\right) \frac{P^0_{\mathrm{t}(r)}}{G'^0_{\mathrm{t}(r)}} dr \\
&\quad + \int_0^{t'_0} \Lambda^{i\mu} c^{\mu j}\left(\mathrm{t}(r), \mathbf{X}_{\mathrm{t}(r)}, \mathbf{P}_{\mathrm{t}(r)}\right) \left(\frac{P^0_{\mathrm{t}(r)}}{G'^0_{\mathrm{t}(r)}}\right)^{1/2} dW'^j_r \\
&= P'^i_0 + \int_0^{t'_0} \Lambda^{i\mu} A^{\mu}\left(\left[\left(\Lambda^{-1}\right)^{\alpha\mu} x'^{\mu}\right]_{\alpha=0}^d, \left[\left(\Lambda^{-1}\right)^{j\mu} p'^{\mu}\right]_{j=1}^d\right) \frac{\left(\Lambda^{-1}\right)^{0\mu} P'^{\mu}_r}{P'^0_r} dr \\
&\quad + \int_0^{t'_0} \Lambda^{i\mu} c^{\mu j}\left(\left[\left(\Lambda^{-1}\right)^{\alpha\mu} x'^{\mu}\right]_{\alpha=0}^d, \left[\left(\Lambda^{-1}\right)^{j\mu} p'^{\mu}\right]_{j=1}^d\right) \left(\frac{\left(\Lambda^{-1}\right)^{0\mu} P'^{\mu}_r}{P'^0_r}\right)^{1/2} dW'^j_r \\
&= P'^i_0 + \int_0^{t'_0} A'^i\left(t, \mathbf{X}'_t, \mathbf{P}'_t\right) dr + \int_0^{t'_0} c'^{ij}\left(t, \mathbf{X}'_t, \mathbf{P}'_t\right) dW'^j_r, \qquad (6.14)
\end{aligned}$$

para cualquier $t'_0 \geq 0$, donde A'^i, c'^{ij} y W'^j se toman como en las hipótesis del problema.

De (6.13) y (6.14) se siguen las ecuaciones (6.12), que es lo que queríamos probar. ■

El Teorema anterior muestra que la trayectoria $\left(\mathbf{X}'_{t'}, \mathbf{P}'_{t'}\right)$ en Σ' de la partícula Browniana, satisface una ecuación diferencial de la forma

$$\begin{aligned}
dX'^{\alpha}_{t'} &= \left(\frac{P'^{\alpha}_{t'}}{P'^0_{t'}}\right) dt', \\
dP'^i_{t'} &= A'^i dt' + c'^{ij} * dW'^j_{t'}.
\end{aligned}$$

Además, se puede encontrar la ecuación diferencial estocástica para la energía relativista $P'^0_t =$

$\left(M^2+\mathbf{P}_t'^2\right)^{1/2}$ en Σ' reemplazando las cantidades sin prima $(')$ por cantidades con prima en la ecuación (6.2).

Debido a los prefactores $\left[\frac{\left(\Lambda^{-1}\right)^{0\mu}p'^{\mu}}{p'^0}\right]$ en las definiciones de A'^i y c'^{ij}, se tiene que los coeficientes A^i y c^{ij} no constituyen tensores de Lorentz. Esta es, esencialmente, una consecuencia de la parametrización temporal de las ecuaciones (6.1) y (6.12).

Si la función de densidad de transición de la ecuación (6.1) existe, tenemos que el proceso (6.12) también tiene función de densidad de transición $f'\left(t',\mathbf{x}',\mathbf{p}'\right)$, la cual satisface la ecuación de Fokker-Planck

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t'}+\frac{p'^i}{p'^0}\frac{\partial}{\partial x'^i}\right)f'\left(t',\mathbf{x}',\mathbf{p}'\right) &= \frac{\partial}{\partial p'^i}\left[-A'^i\left(t',\mathbf{x}',\mathbf{p}'\right)f'\left(t',\mathbf{x}',\mathbf{p}'\right)\right.\\ &\quad \left.+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p'^k}\left(D'^{ik}\left(t',\mathbf{x}',\mathbf{p}'\right)f'\left(t',\mathbf{x}',\mathbf{p}'\right)\right)\right],\end{aligned}$$

para cualquier $(t',\mathbf{x}',\mathbf{p}')\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$, donde $D'^{ij}:=c'^{ir}c'^{jr}$.

Cuando se considera el movimiento libre en un baño térmico termalizado, estacionario, isotrópico y homogéneo en el marco Σ, la ecuación de Langevin en Σ toma la forma

$$\begin{aligned}dX_t^\alpha &= \frac{P_t^\alpha}{P_t^0}dt,\\ dP_t^i &= -\widehat{\alpha}\left(P_t^0\right)P_t^i+\left[\widehat{D}\left(P_t^0\right)\right]^{1/2}\delta_{ij}*dW_t^j,\end{aligned}$$

donde los coeficientes de ruido y fricción $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{D}$ dependen de la energía $p^0=\left(M^2+\mathbf{p}^2\right)^{1/2}$ y, si la función de densidad estacionaria del proceso (6.6) existe, satisfacen la relación de Einstein

$$0\equiv\widehat{\alpha}\left(p^0\right)p^0+\widehat{D}'\left(p^0\right)-\beta D\left(p^0\right)\quad\forall p^0\in\mathbb{R}-\left[-M,M\right].$$

En esta situación, si la transformación de Lorentz es solo un boost, la densidad estacionaria marginal del momento en el marco en movimiento Σ', esta dada por una función de Jüttner transformada de la forma

$$\phi'\left(\mathbf{p}'\right)\propto\exp\left(-\beta U'^\alpha p'^\alpha\right),$$

donde U'^α es la cuadri-velocidad del baño térmico en Σ'.

Capítulo 7

El Modelo de Colisión Binaria Relativista

Para que el enfoque de Langevin se apegue a la realidad, se deben conocer los coeficientes de ruido $D(p)$ y fricción $\alpha(p)$ que son apropiados para el sistema bajo consideración. Algunos modelos de fricción realistas pueden obtenerse, por ejemplo, derivando ecuaciones de Fokker-Planck de las ecuaciones relativistas de Boltzmann. Sin embargo, los métodos conocidos en la literatura resultan ser complicados y son poco entendidos.

En este capítulo bosquejaremos un procedimiento alternativo para obtener coeficientes de ruido y fricción a partir de un modelo de interacción microscópica simple y bajo el supuesto de equilibrio térmico. Tal procedimiento puede considerarse como la generalización relativista del modelo de colisión binaria presentado en el Capítulo 3, así como una justificación heurística de la ecuación de Langevin relativista.

En la exposición de este capítulo se considera un sistema unidimensional que consiste de una partícula Browniana pesada (masa M) inmersa en un baño térmico de partículas más pequeñas (masa $m \ll M$, número total de partículas $N \gg 1$). El modelo que se desarrolla supone que el movimiento aleatorio de una partícula Browniana surge debido a frecuentes colisiones elásticas con las partículas del baño térmico circundante.

De manera similar al modelo de colisión binaria no-relativista, el interés primordial radica en encontrar la mejor aproximación (posible) de la dinámica exacta en la clase de ecuaciones diferenciales estocásticas definidas por la ecuación de Langevin-backward (5.1).

En la primera sección se desarrolla la cinemática de las colisiones relativistas, se construye una ecuación del tipo Langevin teniendo en cuenta algunos supuestos y se comenta sobre una posible justificación de la ecuación de Langevin (4.2) en ausencia de campos de fuerza externos. La sección 2 trata la distribución del baño térmico considerada (aquella del equilibrio térmico) y se realiza un par de comentarios sobre la fuerza media de deriva. Finalmente, en la sección 3 se estudia como aproximar, según algunos supuestos que se establecen, la 'ecuación de tipo Langevin' obtenida de la cinemática relativista por ecuaciones diferenciales estocásticas.

7.1. Cinemática de las colisiones relativistas

Considérese una (única) colisión elástica entre la partícula Browniana (momento P_t, energía $E(P_t) = P_t^0$) y una partícula del baño térmico (momento p_t, energía $\varepsilon(p_t) = p_t^0$). La energía relativista, el momento y la velocidad de las dos partículas antes de la colisión, están dadas por

$$P_t = MV_t\gamma(V_t), \qquad E(P_t) = \left(M^2 + P_t^2\right)^{1/2}, \tag{7.1a}$$

$$p_t = mv_t\gamma(v_t), \qquad \varepsilon(p_t) = \left(m^2 + p_t^2\right)^{1/2}, \tag{7.1b}$$

donde $\gamma(w) := \left(1 - w^2\right)^{-1/2}$. Por tener colisiones elásticas, la cinemática de la colisión obedece las leyes de conservación

$$\widehat{M} = M, \qquad \widehat{m} = m, \qquad E + \varepsilon = \widehat{E} + \widehat{\varepsilon}, \qquad P_t + p_t = \widehat{P}_t + \widehat{p}_t, \tag{7.2}$$

donde los símbolos con $(\widehat{\ })$ representan el estado después de la colisión. Insertando las ecuaciones (7.1) en las leyes de conservación (7.2) y despejando el momento $\widehat{P}_t$ de la partícula Browniana después de la colisión, se obtiene que

$$\widehat{P}_t = \gamma(u_t)^2 \left[2u_t E(P_t) - \left(1 + u_t^2\right) P_t\right],$$

donde u_t es la velocidad del centro de masa (invariante bajo la colisión), el cual esta dado por la fórmula

$$u_t \equiv u\left(p_t, P_t\right) = \frac{P_t + p_t}{E\left(P_t\right) + \varepsilon\left(p_t\right)}.$$

Obsérvese que las partículas del baño térmico pueden enumerarse con números entre 1 y N. Si denotamos por $\Delta P_t^r := \widehat{P}_t - P_t$ al cambio de momento de la partícula Browniana en una única colisión con la partícula 'r' $(0 \leq r \leq N)$ del baño térmico, se tiene que

$$\Delta P_t^r = -2\gamma\left(u\left(\mathfrak{p}_t^r, P_t\right)\right)^2 \frac{\varepsilon\left(\mathfrak{p}_t^r\right)}{E\left(P_t\right) + \varepsilon\left(\mathfrak{p}_t^r\right)} P_t + 2\gamma\left(u\left(\mathfrak{p}_t^r, P_t\right)\right)^2 \frac{E\left(P_t\right)}{E\left(P_t\right) + \varepsilon\left(\mathfrak{p}_t^r\right)} \mathfrak{p}_t^r, \tag{7.3}$$

donde $\mathfrak{p}_t^r$ es el momento de la partícula 'r' al tiempo $t \geq 0$. En el caso límite no-relativista, donde $u\left(\mathfrak{p}_t^r, P_t\right)^2 \ll 1$, $E \simeq M$ y $\varepsilon\left(\mathfrak{p}_t^r\right) \simeq m$, la ecuación (7.3) se reduce a la ecuación (3.12).

Para construir una ecuación del tipo Langevin a partir de las ecuaciones anteriores, se considera el cambio de momento total $\delta P\left(t\right) := P_{t+\delta t} - P_t$ de la partícula Browniana en el intervalo 'mesoscópico' $[t, t+\delta t]$, asumiendo que:

- las colisiones que ocurren en $[t, t+\delta t]$ pueden ser vistas como eventos independientes;
- el salto de tiempo δt es lo suficientemente pequeño para que se cumpla $\left|\delta P\left(t\right) / P\left(t\right)\right| \ll 1$ y para que ocurra a lo más solo una colisión entre la partícula Browniana y una partícula específica del baño térmico;
- el valor de δt es lo suficientemente grande para que el número de colisiones sea mayor que 1.

Los requisitos anteriores solo pueden cumplirse simultáneamente cuando $m \ll M$, lo cual constituye uno de los supuestos iniciales de nuestro modelo.

Entonces se tiene que el cambio de momento $\delta P\left(t\right)$ de la partícula Browniana, durante el intervalo de tiempo $[t, t+\delta t]$, puede aproximarse por

$$\begin{aligned}
\delta P(t) &= P_{t+\delta t} - P_t \approx \sum_{r=1}^{N} \Delta P_t^r I_r(t, \delta t) \\
&= -\left[2 \sum_{r=1}^{N} \gamma\left(u\left(\mathfrak{p}_t^r, P_t\right)\right)^2 \frac{\varepsilon\left(\mathfrak{p}_t^r\right)}{E\left(P_t\right)+\varepsilon\left(\mathfrak{p}_t^r\right)} I_r(t, \delta t)\right] P_t \\
&\quad +2 \sum_{r=1}^{N} \gamma\left(u\left(\mathfrak{p}_t^r, P_t\right)\right)^2 \frac{E\left(P_t\right)}{E\left(P_t\right)+\varepsilon\left(\mathfrak{p}_t^r\right)} \mathfrak{p}_t^r I_r(t, \delta t),
\end{aligned} \tag{7.4}$$

donde $I_r(t, \delta t)$ es la función indicadora para una colisión entre la partícula Browniana y la partícula 'r', es decir

$$I_r(t, \delta t) = \begin{cases} 1 & \text{si una colisión entre la partícula Browniana} \\ & \text{y la partícula } r \text{ ha ocurrido en } [t, t+\delta t], \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Conviene notar que la ecuación (7.4) es la contraparte relativista de la ecuación (3.16). Heurísticamente, el primer término de la ecuación (7.4) puede ser interpretado como fricción, mientras que el segundo término puede pensarse como ruido. Esto justifica, de cierta manera, el porque tomar ecuaciones de Langevin de la forma (4.2) con $F \equiv 0$ para modelar la dinámica relativista de la partícula Browniana en ausencia de campos de fuerza externos.

Por la sección 3.2.1., se tiene que heurísticamente

$$I_r(t, \delta t) \approx \frac{\delta t}{2} \left|\mathfrak{v}_t^r - V_t\right| \delta\left(\mathfrak{x}_t^r - X_t\right), \tag{7.5}$$

siendo $\mathfrak{x}_t^r$ y $\mathfrak{v}_t^r$ la posición y la velocidad de la partícula 'r' del baño térmico, respectivamente. Sin embargo, en este caso, debemos usar las velocidades relativistas $V_t = \frac{P_t}{\left(M^2+P_t^2\right)^{1/2}}$ y $\mathfrak{v}_t^r = \frac{\mathfrak{p}_t^r}{\left(m^2+\left(\mathfrak{p}_t^r\right)^2\right)^{1/2}}$.

7.2. La distribución del baño térmico y la fuerza de deriva

Como es de interés sólo el caso en el que hay equilibrio térmico, asumiremos que el baño está termalizado. También es realista suponer que las partículas del baño térmico están confinadas a un volumen $\mathbb{V} = [0, L] \subset \mathbb{R}$ finito. Entonces, bajo los supuestos anteriores, la densidad que modela la probabilidad de encontrar a una partícula específica del baño térmico en algún lugar del espacio fase, esta dada por la función de Jüttner espacialmente homogénea

$$f_b^1(x,p) = (2mK_1(\beta m)L)^{-1} \exp\left[-\beta\left(m^2+p^2\right)^{1/2}\right] \Theta(L-x)\Theta(x) \quad \forall (x,p) \in \mathbb{V} \times \mathbb{R},$$

donde $\mathcal{T} = (\beta k_B)^{-1}$ es la temperatura del baño, Θ es una función Heaviside y K_1 denota la función de Bessel modificada de segunda especie y orden 1.

Para completar la información de la distribución del baño térmico, también se asumirá que:

- las partículas del baño térmico son independiente e idénticamente distribuidas;
- las colisiones entre la partícula Browniana y las partículas del baño térmico no afectan la distribución de las partículas.

Las dos suposiciones anteriores pueden justificarse para baños lo suficientemente grandes, siempre y cuando las colisiones entre las partículas del baño restablecen rápidamente un distribución espacialmente homogénea.

Utilizaremos la distribución de las partículas del baño térmico para calcular la fuerza media de deriva $\mathcal{K}$, la cual se define como

$$\mathcal{K}(p) := \left\langle \frac{\delta P(t)}{\delta t} \mid P_t = p \right\rangle.$$

Al sustituir la ecuación (7.4) en la definición anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(p) &= -n_b\left\langle \gamma\left(u\left(\mathfrak{p}_t^r, P_t\right)\right)^2 \frac{\varepsilon\left(\mathfrak{p}_t^r\right)}{E(P_t)+\varepsilon\left(\mathfrak{p}_t^r\right)} L I_r(t,\delta t) \mid P_t = p \right\rangle p \\ &\quad + n_b\left\langle \gamma\left(u\left(\mathfrak{p}_t^r, P_t\right)\right)^2 \frac{E(P_t)}{E(P_t)+\varepsilon\left(\mathfrak{p}_t^r\right)} \mathfrak{p}_t^r L I_r(t,\delta t) \mid P_t = p \right\rangle, \end{aligned}$$

donde $n_b = N/L$ es la densidad de las partículas del baño térmico.

Desafortunadamente, es muy complicado, o incluso imposible, evaluar analíticamente la esperanza anterior. Sin embargo, puede ser evaluada numéricamente haciendo uso de expansiones de Taylor en el sentido de funciones generalizadas. Cabe destacar que, a diferencia del caso no-relativista, la expansión de Taylor (7.5) no permite encontrar un expresión analítica para la fuerza media de deriva $\mathcal{K}$.

Conviene observar que se pueden hacer desarrollos similares si se considera una distribución distinta para el baño térmico. Es posible que se obtengan expresiones diferentes para estos casos, pero la forma de proceder es análoga.

7.3. Aproximación de Langevin

Para finalizar, se estudia como, en principio, se pueden aproximar la ecuación (7.4) por ecuaciones diferenciales estocásticas de la forma (141). Solo se estudiará a fondo el caso de la ecuación de (5.1) con la integral backward, la cual tiene la expresión

$$dP_t = -\alpha\left(P_t\right) P_t dt + \left[2D\left(P_t\right)\right]^{1/2} \bullet dW_t. \tag{7.6}$$

Los procedimientos resultan análogos para las otras integrales estocásticas, aunque con expresiones más complicadas. Se sugiere utilizar las relaciones entre las ecuaciones diferenciales estocásticas de los Teoremas 46 y 50 para obtener ecuaciones diferenciales estocásticas con la integral de Itô y la integral de Stratonovich que aproximen a (7.4), en lugar de aplicar el método directo que a continuación se desarrollará.

Para obtener un modelo de Langevin útil y apegado a la realidad, los coeficientes α y D tienen que elegirse de tal manera que produzcan la mejor aproximación posible en la clase de ecuaciones diferenciales estocásticas definida por la ecuación (7.6). Es posible que existan una infinidad de criterios para construir una "buena aproximación", en este trabajo los criterios que deberá cumplir el proceso (7.6) son dos:

- Aproximar la distribución estacionaria correcta;
- Exhibir el comportamiento de relajación media correcto, lo cual se puede expresar matemáticamente como[1] $\left\langle \frac{dP(t)}{dt} \mid P_t = p \right\rangle = \mathcal{K}\left(p\right)$.

[1]Estamos usando la misma aproximación heurística para $\frac{dP(t)}{dt}$ que en el modelo de colisión binaria no-relativista (ver pág. 48 de esta tesis). También se supone que $\int_0^t \left\langle 2D\left(P_s\right)\right\rangle ds < \infty \ \forall t \geq 0$, para tener $\left\langle \int_0^t \left[2D\left(P_s\right)\right]^{1/2} dW_s \right\rangle = 0 \ \forall t \geq 0$.

El criterio anterior resulta plausible pues con él se logra captar información muy importante del baño térmico.

Debido a que el baño térmico esta termalizado, la distribución estacionaria del momento de la partícula Browniana en el modelo de colisión binaria, está dada por la función de Jüttner

$$\phi_J(p) = (2MK_1(\beta M))^{-1} \exp\left[-\beta\left(p^2+M^2\right)^{1/2}\right] \quad \forall p \in \mathbb{R}. \tag{7.7}$$

Entonces para que la ecuación (7.6) cumpla el primer criterio de buena aproximación impuesto, se pide que la ecuación (7.6) tenga como densidad estacionaria a la función (7.7). De las relaciones de Einstein (4.8) se sigue que esto es equivalente a que las funciones α y D satisfagan

$$D(p) = \beta^{-1}\alpha(p)E(p), \tag{7.8}$$

para cualquier $p \in \mathbb{R}$, donde $E(p) = \left(m^2+p^2\right)^{1/2}$.

Además, para que la ecuación (7.6) cumpla ambos criterios de buena aproximación, también se pide que tal ecuación cumpla la relación

$$\left\langle \frac{dP(t)}{dt} \mid P_t = p \right\rangle = \mathcal{K}(p) = \left\langle \frac{\delta P(t)}{\delta t} \mid P_t = p \right\rangle. \tag{7.9}$$

Por las propiedades de la integral backward-Itô, se sabe que

$$\left\langle \frac{dP(t)}{dt} \mid P_t = p \right\rangle = -\alpha(p)p + \frac{d}{dp}D(p).$$

Sustituyendo la relación de Einstein (7.8) en la ecuación anterior, se llega a que

$$\left\langle \frac{dP(t)}{dt} \mid P_t = p \right\rangle = -\alpha(p)p + \beta^{-1}\frac{d}{dp}\left[\alpha(p)E(p)\right].$$

Así que la condición (7.9) es equivalente a la ecuación diferencial

$$-\alpha(p)p + \beta^{-1}\frac{d}{dp}\left[\alpha(p)E(p)\right] = \mathcal{K}(p).$$

Cuando no se conoce una expresión para la función $\mathcal{K}(p)$, se puede, por ejemplo, tratar de fijar una expresión analítica sencilla y, subsecuentemente, usar esta aproximación en la ecuación anterior. Para esto existen diversas técnicas conocidas como aproximar por splines, entre otros.

Apéndice A

Procesos de Markov y Procesos de Difusión

En esta sección se presenta un breve resumen de procesos de Markov y procesos de difusión. Para mayor información sobre estos temas se recomienda consultar, por ejemplo, los libros [6, 29, 50, 53, 56].

Definición 101 *Sean $t_0 \geq 0$ y $t_0 < T < \infty$. Sea $\{\mathbf{X}_t, t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso estocástico en $\mathbb{R}^d$ definido sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$. El proceso $\mathbf{X}_t$ es un proceso de Markov si se satisface la propiedad: para $t_0 \leq s \leq t \leq T$ y para todo $B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$, la ecuación*

$$\mathbb{P}\left(\mathbf{X}_t \in B \mid \sigma\left(\mathbf{X}_r; t_0 \leq r \leq s\right)\right) = \mathbb{P}\left(\mathbf{X}_t \in B \mid \mathbf{X}_s\right)$$

se cumple con probabilidad 1.

Dado un proceso de Markov, el pasado y el futuro son estocásticamente independientes cuando se conoce el presente. Este principio puede ser considerado como el principio de causalidad de la física clásica llevado a sistemas dinámicos estocásticos.

Un concepto básico en los procesos de Markov lo constituye la probabilidad de transición.

Definición 102 *Sea $\{\mathbf{X}_t, t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de Markov. Una función $P\left(s, \mathbf{x}, t, B\right)$ es llamada una probabilidad de transición si tiene las siguientes propiedades:*

(i) *Para* $s \leq t$ *y* $B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ *fijos, se cumple con probabilidad* 1

$$P\left(s, \mathbf{X}_s, t, B\right) = \mathbb{P}\left(\mathbf{X}_t \in B \mid \mathbf{X}_s\right).$$

(ii) $P\left(s, \mathbf{x}, t, \cdot\right)$ *es una medida de probabilidad sobre* $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$*, para* $s \leq t$ *y* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ *fijos.*

(iii) $P\left(s, \cdot, t, B\right)$ *es* $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$*-medible, para* $s \leq t$ *y* $B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ *fijos.*

(iv) *Para* $t_0 \leq s \leq u \leq t \leq T$ *y* $B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ *y para todo* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ *con la posible excepción de un conjunto* $N \subset \mathbb{R}^d$ *tal que* $\mathbb{P}\left(\mathbf{X}_s \in N\right) = 0$*, tenemos la llamada ecuación de Chapman-Kolmogorov*

$$P\left(s, \mathbf{x}, t, B\right) = \int_{\mathbb{R}^d} P\left(u, \mathbf{y}, t, B\right) P\left(s, \mathbf{x}, u, d\mathbf{y}\right).$$

Si $P\left(s, x, t, B\right)$ *es una probabilidad de transición, la función* $P\left(s, x, t, B\right)$ *también recibe el nombre de probabilidad de transición del proceso de Markov* $\mathbf{X}_t$*.*

Para $s, t \in [t_0, T]$ fijos tales que $s \leq t$, $P\left(s, \mathbf{x}, t, B\right)$ esta únicamente definida como función de $\mathbf{x}$ y B con la posible excepción de un conjunto N de valores de $\mathbf{x}$ (independiente de B) tal que $\mathbb{P}\left(\mathbf{X}_s \in N\right) = 0$. Además, en ocasiones se usa la notación

$$P\left(s, \mathbf{x}, t, B\right) = \mathbb{P}\left(\mathbf{X}_t \in B \mid \mathbf{X}_s = \mathbf{x}\right),$$

la cual es la probabilidad de que el proceso observado estará en el conjunto B al tiempo t si al tiempo s, donde $s \leq t$, esta en el estado $\mathbf{x}$.

Las probabilidades de transición, como toda distribución de una variable aleatoria, pueden tener asociada una función de densidad. En el caso de los procesos de Markov, a la función de densidad se le conoce como densidad de transición.

Definición 103 *Sea* $\left\{\mathbf{X}_t, t_0 \leq t \leq T\right\}$ *un proceso de Markov y* $P\left(s, \mathbf{x}, t, B\right)$ *su probabilidad de transición. Si existe una función* $p\left(s, \mathbf{x}, t, \mathbf{y}\right)$ *que satisface*

$$P\left(s, \mathbf{x}, t, B\right) = \int_B p\left(s, \mathbf{x}, t, \mathbf{y}\right) d\mathbf{y}$$

para cualesquiera $t_0 \leq s \leq t \leq T$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ *y* $B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$, *tal función recibe el nombre de densidad de transición del proceso* $\mathbf{X}_t$.

Un tipo especial e importante de procesos de Markov son los procesos homogéneos.

Definición 104 *Un proceso de Markov* $\{\mathbf{X}_t, t_0 \leq t \leq T\}$ *se dice homogéneo si su probabilidad de transición* $P(s, \mathbf{x}, t, B)$ *es estacionaria, es decir si la condición*

$$P(s+u, \mathbf{x}, t+u, B) = P(s, \mathbf{x}, t, B)$$

se cumple para cualesquiera $t_0 \leq s \leq t \leq T$ *y* $t_0 \leq s+u \leq t+u \leq T$.

Cuando se tiene un proceso de Markov homogéneo, se acostumbra escribir

$$P(t-s, \mathbf{x}, B) = P(s, \mathbf{x}, t, B),$$

para $0 \leq t - t_0 \leq T - t_0$.

Observación 105 *¿Cuándo un proceso de Markov* $\{\mathbf{X}_t, t_0 \leq t \leq T\}$ *es también un proceso estacionario? Una condición necesaria y suficiente para ser estacionario es:*

(i) $\mathbf{X}_t$ *es homogéneo;*

(ii) existe una distribución invariante P^0 *en el espacio de estados, es decir*

$$P^0(B) = \int_{\mathbb{R}^d} P(t, \mathbf{x}, B)\, P^0(dx) \quad \text{para cualesquiera } B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right),\ t \in [0, T - t_0].$$

Si elegimos esta P^0 *como distribución inicial para* $\mathbf{X}_{t_0}$, *entonces* $\mathbf{X}_t$ *es un proceso estacionario. Además, si existe un invariante* P^0, *tenemos que para distribuciones iniciales arbitrarias y* $T = \infty$,

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{P}[\mathbf{X}_t \in B] = P^0(B)$$

para todo $B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ *cuya frontera tiene* P^0*-medida* 0; *esto es, la distribución invariante es una distribución estacionaria límite y es independiente de la distribución inicial. Existen* *algunas condiciones bajo las cuales una función de transición homogénea $P(t, \mathbf{x}, B)$ tiene una distribución invariante (véase [50]).*

Los procesos de difusión son casos especiales de procesos de Markov con trayectorias muestrales continuas. Más precisamente, estos procesos quedan caracterizados bajo la siguiente definición.

Definición 106 *Un proceso de Markov $\{\mathbf{X}_t, t_0 \leq t \leq T\}$ en $\mathbb{R}^d$ con trayectorias muestrales continuas a.s. es llamado un proceso de difusión si sus probabilidades de transición $P(s, \mathbf{x}, t, B)$ satisfacen, para cualesquiera $s \in [t_0, T]$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ y $\varepsilon > 0$, las siguientes tres condiciones :*

(i) $\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|>\varepsilon} P(s, \mathbf{x}, t, dy) = 0$;

(ii) existe una función $f(s, \mathbf{x})$ que toma valores en $\mathbb{R}^d$ y

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \leq \varepsilon} (\mathbf{x}-\mathbf{y}) P(s, \mathbf{x}, t, d\mathbf{y}) = f(s, \mathbf{x});$$

(iii) existe una función $B(s, \mathbf{x})$ que toma valores en $\mathrm{Mat}_{d \times d}(\mathbb{R})$ tal que

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \leq \varepsilon} (\mathbf{x}-\mathbf{y})(\mathbf{x}-\mathbf{y})^{\mathrm{T}} P(s, \mathbf{x}, t, d\mathbf{y}) = B(s, \mathbf{x}).$$

Las funciones f y B son llamados los coeficientes del proceso de difusión. En particular, f es denominada vector de deriva y B es llamada matriz de difusión. $B(s, \mathbf{x})$ es simétrica y no-negativa definida.

El siguiente resultado establece una ecuación de evolución para la densidad de transición de un proceso de difusión.

Teorema 107 *Sea $\{\mathbf{X}_t, t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de difusión en $\mathbb{R}^d$, el cual posee una densidad de transición $p(s, \mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ y cumple uniformemente en s y $\mathbf{x}$ las relaciones límite de la definición 106. Si las derivadas $\frac{\partial p}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial y^i}\left(f^i(t, \mathbf{y}) p\right)$ y $\frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j}\left(B^{ij}(t, \mathbf{y}) p\right)$ existen y son continuas, entonces, para s y $\mathbf{x}$ fijos con $s \leq t$, la densidad de transición $p(s, \mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ es una solución fundamental de la ecuación de Fokker-Planck*

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial y^i}\left(f^i(t, \mathbf{y}) p\right) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j}\left(B^{ij}(t, \mathbf{x}) p\right) = 0. \tag{A.1}$$

Observación 108 *Si se define la distribución de $\mathbf{X}_{t_0}$ en términos de la probabilidad inicial P_{t_0}, la densidad de probabilidad $p(t,\mathbf{y})$ del proceso $\mathbf{X}_t$ puede obtenerse por*

$$p(t,\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^d} p(s,\mathbf{x},t_0,\mathbf{y})\, P_{t_0}(d\mathbf{x}).$$

Si en la ecuación de Fokker-Planck anterior integramos respecto a $P_{t_0}(d\mathbf{x})$, obtenemos que $p(t,\mathbf{y})$ también satisface tal ecuación de Fokker-Planck.

La ecuación de Fokker-Planck también se conoce como la ecuación forward de Kolmogorov. Algunas condiciones para la existencia de las densidades $p(s,\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ y $p(t,\mathbf{y})$ se derivan de las condiciones para que la ecuación (A.1) tenga solución. En general, la existencia de estas densidades es un problema no trivial. El siguiente Teorema proporciona algunas condiciones para la existencia de la densidad de transición de un proceso de difusión unidimensional.

Teorema 109 *Sea $\{X_t, 0 \le t \le T\}$ un proceso de difusión en $\mathbb{R}$ con deriva $f(t,x)$ y coeficiente de difusión $\sigma^2(t,x) > 0$, el cual satisface*

(i) $\frac{\partial}{\partial x} f(t,x)$ *y* $\frac{\partial}{\partial x}\sigma(t,x)$ *existen y son acotadas; las derivadas* $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma(t,x)$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\sigma(t,x)$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sigma(t,x)$ *y* $\frac{\partial}{\partial t}\sigma(t,x)$ *existen;*

(ii) $g(t,x)$ *esta definida por* $x = \int_0^{g(t,x)} \frac{dy}{\sigma(t,y)}$*;*

$$\begin{aligned}
\overline{a}(t,x) &= \int_0^{g(t,x)} \frac{\frac{\partial}{\partial t}\sigma(t,x)}{\sigma^2(t,y)} dy + \frac{f(t,g(t,x))}{\sigma(t,g(t,x))} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\sigma(t,g(t,x)), \\
\overline{B}(t,x) &= -\frac{1}{2}\overline{a}^2(t,x) - -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\overline{a}(t,x) - \int_0^x \frac{\partial}{\partial t}\overline{a}(t,y)\, dy,
\end{aligned}$$

y $\overline{B}(t,x)$ *cumple que*

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{1+x^2} \sup_{0\le t\le T} \overline{B}(t,x) \le 0.$$

Bajo estos supuestos la densidad transición del proceso existe.

Las condiciones del Teorema anterior incluso permiten encontrar una expresión explícita para la densidad de transición (véase, [29] págs. 96-97).

Apéndice B

Distribución de Maxwell

La distribución de Maxwell modela a un gas (cuasi-ideal) diluido, cerca del equilibrio térmico, con efectos cuánticos insignificantes y con velocidades no relativistas. Tal distribución establece que la velocidad de una partícula de un gas con las propiedades anteriores obedece una densidad $\psi_M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$\psi_M\left(\boldsymbol{v}; m, \beta, d\right) = \left[\frac{\beta m}{2\pi}\right]^{d/2} \exp\left(\frac{-\beta m \boldsymbol{v}^2}{2}\right), \tag{B.1a}$$

donde m es la masa en reposo de una partícula del gas, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^d$ es la velocidad no-relativista y $\mathcal{T} = (k_B\beta)^{-1}$ es la temperatura. A partir de la ecuación anterior, se encuentra que la densidad que gobierna el momento de una partícula del gas es

$$\phi_M\left(\mathbf{p}; m, \beta, d\right) = \left[\frac{\beta}{2\pi m}\right]^{d/2} \exp\left(\frac{-\beta m \mathbf{p}^2}{2}\right), \tag{B.1b}$$

siendo $\mathbf{p} = m\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^d$ el momento no-relativista y $\phi_M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.

Obviamente la densidad Maxwelliana para la velocidad no respeta el postulado relativista fundamental de que nada puede viajar más rápido que la luz. La función de densidad adecuada para trabajar en el caso relativista se expone en el Apéndice D.

Cuando se trabaje en el caso clásico, se asume que las partículas de cualquier baño en equilibrio térmico obedecen una densidad de Maxwell de la forma (B.1). Lo mismo aplica para una partícula Browniana que este en equilibrio térmico con el baño circundante.

Apéndice C

Conceptos Básicos de Relatividad

El objetivo de este apéndice es establecer la notación, las convenciones y los conceptos de relatividad especial que se utilizan en el tratamiento del movimiento Browniano relativista. Para profundizar en estos temas se recomienda consultar [37, 26, 54, 58].

C.1. Notación y convenciones

En relatividad especial, un marco de referencia inercial[1] Σ corresponde a un sistema coordenado Cartesiano global del espacio-tiempo. Un evento $\mathcal{E}$ del espacio-tiempo esta etiquetado por un vector $(1+d)$-dimensional $\overline{x} = (x^\alpha) = (ct, \mathbf{x}) = \left(ct, x^1, \ldots, x^d\right)$ en Σ, donde d es el número de dimensiones espaciales y, adoptando unidades naturales, $c = 1$ es la velocidad de la luz. Los super y subíndices griegos $\alpha, \beta, \ldots$ toman los valores $0, 1, \ldots, d$, mientras que se usan índices latinos $i, k, \ldots \in \{1, \ldots, d\}$ para las componentes espaciales. Los vectores con superíndices son llamados contravariantes.

Se usa el convenio de sumación de Einstein, el cual permite simplificar sumas como

$$y = c^i x^i := \sum_{i=1}^{d} c^i x^i,$$

[1] Entendemos por marco de referencia inercial a un marco de referencia no acelerado.

para los índices latinos, o bien

$$y = c^\alpha x^\alpha := \sum_{\alpha=0}^{d} c^\alpha x^\alpha,$$

para los índices griegos. Además, se usa la notación

$$\mathbf{x}^2 := |\mathbf{x}|^2 = \left(x^i\right)^2$$

para denotar la norma euclidiana del vector de componentes espaciales $\mathbf{x} = \left(x^1, \ldots, x^d\right)$.

Con respecto al marco de coordenadas Cartesiano Σ, las componentes $\eta_{\alpha\beta}$ del tensor métrico del espacio-tiempo de Minkowski se definen por

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} -1 & \alpha = \beta = 0 \\ +1 & \alpha = \beta = 1, \ldots, d \\ 0 & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Por definición, las componentes de los vectores covariantes (x_α) se obtienen al contraer el vector contravariante (x^α) con $\eta_{\alpha\beta}$, es decir

$$x_\alpha := \eta_{\alpha\beta} x^\beta \qquad \Rightarrow \qquad (x_\alpha) = (-t, \mathbf{x}) \, .$$

Los vectores (x^α) y (x_α) son llamados cuadrivectores, sin importar el número de dimensiones.

La distancia en el espacio-tiempo de Minkowski entre dos eventos $\overline{x}_A = (x^\alpha_A) = (t_A, \mathbf{x}_A)$ y $\overline{x}_B = (x^\alpha_B) = (t_B, \mathbf{x}_B)$ se define por

$$d\left(\overline{x}_A, \overline{x}_B\right)^2 := \eta^{\alpha\beta}\left(x^\alpha_A - x^\alpha_B\right)\left(x^\alpha_A - x^\alpha_B\right) = -\left(t_A - t_B\right)^2 + \left(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B\right)^2 .$$

Por definición, la separación entre dos eventos es

- Tipo tiempo, si $d\left(\overline{x}_A, \overline{x}_B\right)^2 < 0$;
- Tipo luminoso, si $d\left(\overline{x}_A, \overline{x}_B\right)^2 = 0$;
- Tipo espacio, si $d\left(\overline{x}_A, \overline{x}_B\right)^2 > 0$.

Los eventos con separación tipo tiempo pueden estar causalmente conectados por (una serie de) señales viajando a una velocidad menor o igual a la velocidad de la luz. Los eventos con separación tipo luminosa pueden estar relacionados solo por señales ininterrumpidas que viajan a la velocidad de la luz. Los eventos con separación tipo espacio son causalmente disconexos.

El movimiento clásico de una partícula masiva puntual a través del espacio tiempo, corresponde a una curva en Σ lo suficientemente suave del tipo tiempo. Tal curva recibe el nombre de línea de universo. Considérese un observador estacionario $\mathcal{O}$, el cual se encuentra en reposo en Σ. Es natural que $\mathcal{O}$ parametrice el movimiento de la partícula usando el tiempo t de Σ, es decir que $\mathcal{O}$ describe la línea de universo como $\left(x^0\left(t\right), x^i\left(t\right)\right)$ con $x^0\left(t\right) = t$. En una vecindad de cada punto (evento) sobre la línea de universo de la partícula, una diferencial del tiempo propio infinitesimal puede definirse por

$$d\tau := -\left(\eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta\right)^{1/2} = \left(\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2\right)^{1/2} = \mathrm{d}t\left(1 - \mathbf{v}^2\right)^{1/2}, \tag{C.1}$$

donde $\mathbf{v}\left(t\right) = \frac{dx(t)}{dt}$ es la velocidad de la partícula en Σ. De acuerdo a los postulados de la relatividad especial, $d\tau$ es el intervalo de tiempo medido por un reloj intrínseco comoviéndose con la partícula, mientras que dt es un intervalo de tiempo medido por un reloj en reposo en Σ.

La cuadrivelocidad (u^α) de una partícula masiva se define como la derivada de la línea de universo con respecto a su tiempo propio, es decir

$$u^\alpha := \frac{dx^\alpha}{d\tau} \qquad \Rightarrow \qquad u_\alpha u^\alpha = -1.$$

Para una partícula puntual con masa en reposo $m > 0$, el cuadrivector de energía-momento $(p^\alpha) = \left(p^0, p^1, \ldots, p^d\right) = (\epsilon, \mathbf{p})$ se define por

$$p^\alpha := m u^\alpha \qquad \Rightarrow \qquad p_\alpha p^\alpha = -m^2. \tag{C.2}$$

Al comparar con (C.1), se tiene que para una partícula con velocidad $\mathbf{v}$ en Σ

$$p^0 = \epsilon = m\gamma\left(\mathbf{v}\right), \qquad \mathbf{p} = m\gamma\left(\mathbf{v}\right)\mathbf{v}, \qquad \gamma\left(\mathbf{v}\right) = \left(1 - \mathbf{v}^2\right)^{-1/2}.$$

La entrada $p^0 = \epsilon$ es la energía relativista de la partícula.

C.2. Transformaciones de Lorentz-Poncairé

En relatividad especial, las transformaciones lineales afines de Lorentz-Poncairé de la forma

$$\overline{x}' = \Lambda \overline{x} + \overline{a} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha\beta} x^{\beta} + a^{\alpha} \tag{C.3}$$

describen la transición de un marco de referencia inercial Σ a otro marco inercial Σ'. Se usa la notación (x'^{α}) para los eventos en Σ'. El cuadrivector constante (a^{α}) traslada el origen del tiempo y el espacio, mientras que la matriz constante de Lorentz $\left(\Lambda^{\alpha\beta}\right)$ puede dar cuenta de una rotación, un cambio de orientación o una velocidad relativa entre los dos marcos Σ y Σ'. Las componentes matriciales $\Lambda^{\alpha\beta}$ están determinadas por la condición

$$d\left(\overline{x}'_A, \overline{x}'_B\right)^2 = d\left(\overline{x}_A, \overline{x}_B\right)^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \Lambda^{\alpha\gamma}\Lambda^{\beta\delta}\eta^{\alpha\beta} = \eta^{\gamma\delta}, \tag{C.4}$$

lo cual significa que las relaciones causales se preservan durante transiciones entre sistemas inerciales. Las transformaciones de Lorentz-Poncairé forman un grupo. De particular interés para nuestro tratamiento es el subgrupo de las transformaciones propias de Lorentz, definido al tomar $a^{\alpha} = 0$ y las restricciones adicionales

$$\Lambda^{00} \geq 1, \qquad\qquad \det\left(\Lambda^{\alpha\beta}\right) = +1.$$

Los requisitos anteriores excluyen reversión temporal e inversión espacial. Ejemplos de transformaciones propias de Lorentz son las rotaciones

$$\Lambda^{00} = 1, \qquad \Lambda^{i0} = \Lambda^{0i} = 0, \qquad \Lambda^{ij} = R^{ij}, \tag{C.5}$$

donde $\left(R^{ij}\right)$ es una matriz de rotación (i.e., $\det\left(R^{ij}\right) = 1$ y $R^{ij}R^{kj} = \delta_{ij}$ con δ_{ij} una delta de Kronecker). Otro ejemplo lo constituyen los boosts de Lorentz

$$\Lambda^{00} = \gamma, \qquad \Lambda^{i0} = \Lambda^{0i} = -\gamma w^{i}, \qquad \Lambda^{ij} = \delta_{ij} + \frac{w^i w^j}{\mathbf{w}^2}\left(\gamma - 1\right), \tag{C.6}$$

con velocidad $\mathbf{w} = \left(w^1, \ldots, w^d\right)$ y factor de Lorentz $\gamma := \left(1 - \mathbf{w}^2\right)^{-1/2}$. Para ilustrar brevemente el efecto de un boost, considérese una partícula en reposo en el origen de Σ y, por lo tanto, descrita por la línea de universo $(x^\alpha(t)) \equiv (t, \mathbf{0})$ en Σ. Aplicando el boost de Lorentz (C.6) a $(x^\alpha) = (t, \mathbf{0})$, se encuentra que

$$x'^0 = \Lambda^{00} x^0 = \gamma t = t', \qquad x'^i = \Lambda^{i0} x^0 = -\gamma w^i t = -w^i t',$$

lo cual significa que la partícula viaja a velocidad constate $\mathbf{w}' = -\mathbf{w}$ a través de Σ'. La inversa de la transformación (C.6) se obtiene al reemplazar $\mathbf{w}$ con $-\mathbf{w}$.

Toda transformación propia de Lorentz puede escribirse como el producto de un boost con una rotación. Más precisamente, si Λ es un transformación propia de Lorentz, existe un boost Λ_{bst} de la forma (C.6) y una rotación Λ_{rot} de la forma (C.5) tales que

$$\Lambda = \Lambda_{bst} \Lambda_{rot}. \tag{C.7}$$

De las ecuaciones (C.2), (C.3) y (C.4), se obtiene la ley de transformación de energía-momento relativista

$$p'^\alpha = \Lambda^{\alpha\beta} p^\beta. \tag{C.8}$$

Combinando la ecuación anterior y la igualdad (C.4), es posible verificar la condición de "mass-shell"

$$m^2 = \epsilon^2 - \mathbf{p}^2 = \epsilon'^2 - \mathbf{p}'^2 = m'^2,$$

lo cual implica que la masa en reposo es un invariante de Lorentz. En particular, de la condición anterior se sigue que las componentes espaciales de la ecuación (C.8) pueden escribirse como

$$p'^i(\mathbf{p}) = \Lambda^{i0} \left(m^2 + \mathbf{p}^2\right)^{1/2} + \Lambda^{ij} p^j.$$

Apéndice D

Densidades de Probabilidad en Relatividad Especial

En este apéndice se presentan algunos resultados para las distribuciones de probabilidad en el espacio fase de una partícula. Este apartado esta dividido en dos secciones, la primera de ellas trata la invarianza de Lorentz de las densidades en el espacio fase y la segunda habla sobre la densidad de Jüttner. El primer tema se trata con mayor profundidad en las referencias [26, 39, 40, 41], mientras que el segundo puede ser consultado en [26].

D.1. Invarianza de Lorentz de las densidades en el espacio fase

Considérense dos marcos de referencia inercial Σ y Σ', de tal manera que Σ' se mueve con velocidad constante $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ relativa a Σ. También, considérense observadores $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ tales que $\mathcal{O}$ se encuentra en estado de reposo en Σ y $\mathcal{O}'$ se encuentra en reposo en el marco Σ'. Dada un partícula en movimiento, los observadores medirán distintas densidades para la posición en el espacio fase de la partícula. Denótese por $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ y $f'(t', \mathbf{x}', \mathbf{p}')$ la densidades medidas por $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$, respectivamente. Naturalmente, surge la pregunta de como están relacionadas $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ y $f'(t', \mathbf{x}', \mathbf{p}')$. En la teoría no relativista, el cambio de un sistema inercial a otro no afecta la coordenada temporal; de ahí que, en este caso, se puedan usar las leyes usuales de transformación entre densidades. En contraste, la situación se vuelve más complicada en la teoría relativista, pues la definición de $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ y $f'(t', \mathbf{x}', \mathbf{p}')$ se basa en la noción de simultaneidad:

las mediciones de $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ se refieren a diferentes hiperplanos "$t = const$" y "$t' = const$" en el espacio de Minkowski, respectivamente.

En un artículo publicado en 1969, van Kampen [40] probó que la densidad $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ de la posición de una partícula en el espacio fase se transforma como un escalar de Lorentz, es decir

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = f'\left(t', \mathbf{x}', \mathbf{p}'\right),$$

donde $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ y $(t', \mathbf{x}', \mathbf{p}')$ están conectados por transformaciones de Lorentz. Además, van Kampen demostró que

$$\int f\left(t', \mathbf{x}', \mathbf{p}'\right) \mathrm{d}^d x' \mathrm{d}^d p' = \int f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \, \mathrm{d}^d x \mathrm{d}^d p,$$

lo que implica que la función f' satisface la condición de normalización t'-simultánea

$$\int f\left(t', \mathbf{x}', \mathbf{p}'\right) \mathrm{d}^d x' \mathrm{d}^d p' = 1.$$

En la referencia [26] se pueden encontrar varias consecuencias de esto.

D.2. La distribución de Jüttner

En el estudio del movimiento Browniano relativista, estamos especialmente interesados en distribuciones que se cumplen en equilibrio térmico. Cuando se postulan ecuaciones relativistas de Langevin, estas distribuciones deben conocerse de antemano para poder especificar la relación de fluctuación-disipación correcta. También las distribuciones del equilibrio térmico se usan para derivar ecuaciones del tipo Langevin a partir de modelos microscópicos.

Al comienzo del siglo pasado, era comúnmente aceptado que un gas (cuasi-ideal) diluido en equilibrio térmico estaba descrito por la densidad Maxwelliana para la velocidad $\psi_M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ con

$$\psi_M(\boldsymbol{v}; m, \beta, d) = \left[\frac{\beta m}{2\pi}\right]^{d/2} \exp\left(\frac{-\beta m \boldsymbol{v}^2}{2}\right), \tag{D.1a}$$

o, equivalentemente, por la densidad para el momento $\phi_M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ con

$$\phi_M(\mathbf{p}; m, \beta, d) = \left[\frac{\beta}{2\pi m}\right]^{d/2} \exp\left(\frac{-\beta m \mathbf{p}^2}{2}\right), \tag{D.1b}$$

donde m es la masa en reposo de una partícula del gas, $\boldsymbol{v} = \mathbf{p}/m \in \mathbb{R}^d$ la velocidad no-relativista y $\mathcal{T} = (k_B\beta)^{-1}$ la temperatura. Después de que Einstein formuló su teoría de la relatividad especial en 1905, Planck y otros inmediatamente se dieron cuenta de que la distribución (D.1) estaba en conflicto con el postulado relativista fundamental de que nada puede ir más rápido que la luz. Una solución para este problema fue encontrada por Jüttner en 1911, quien propuso reemplazar la densidad de Maxwell por

$$\psi_J(\boldsymbol{v}; m, \beta, d) = \mathcal{Z}_d^{-1} m^d \gamma(\boldsymbol{v})^{2+d} \exp(-\beta m \gamma(\boldsymbol{v}))\, \Theta(1 - |\boldsymbol{v}|), \tag{D.2a}$$

donde $\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función Heaviside y $\psi_J : (-1, 1) \to \mathbb{R}^+$ solo puede evaluarse en los valores permitidos para la velocidad. Para el momento relativista $\mathbf{p} = m\gamma(\mathbf{v})\, \boldsymbol{v}$, la distribución anterior da lugar a la densidad

$$\phi_J(\mathbf{p}; m, \beta, d) = \mathcal{Z}_d^{-1} \exp\left[-\beta\left(m^2 + \mathbf{p}^2\right)^{1/2}\right], \tag{D.2b}$$

donde $\phi_J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. De manera similar a la distribución de Maxwell (D.1), la distribución de Jüttner (D.2) se refiere al marco de referencia del laboratorio Σ donde el recipiente que contiene al gas está en reposo. Para las dimensiones espaciales $d = 1, 2, 3$, la constante de normalización

$$\mathcal{Z}_d(m, \beta) = \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\beta\left(m^2 + \mathbf{p}^2\right)^{1/2}\right] \mathrm{d}^d p$$

puede expresarse como

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_1 &= 2mK_1(\beta m), \\
\mathcal{Z}_2 &= 2\pi m^2 \exp(-\beta m)(1 + \beta m)(\beta m)^{-2}, \\
\mathcal{Z}_3 &= 4\pi m^3 K_2(\beta m)(\beta m)^{-1},
\end{aligned}$$

con $K_n(z)$ denotando funciones de Bessel modificadas de segundo tipo. La energía promedio por partícula se obtiene de la diferenciación

$$\langle\epsilon\rangle_d = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log \mathcal{Z}_d,$$

dando lugar a

$$\begin{aligned}
\langle\epsilon\rangle_1 &= m\frac{K_0(\beta m)+K_2(\beta m)}{2K_1(\beta m)}, \\
\langle\epsilon\rangle_2 &= \frac{2}{\beta}+\frac{m^2\beta}{1+m\beta}, \\
\langle\epsilon\rangle_3 &= \frac{3}{\beta}+m\frac{K_1(\beta m)}{K_2(\beta m)},
\end{aligned}$$

y exhibiendo el comportamiento límite

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta\to\infty}\langle\epsilon\rangle_d &= m, \\
\lim_{\beta\to 0}\beta\langle\epsilon\rangle_d &= d.
\end{aligned}$$

Además, se puede demostrar que, para dimensiones espaciales arbitrarias d, el valor medio $\langle\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{v}\rangle$ es independiente de la masa; más precisamente

$$\langle\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{v}\rangle = \left\langle\frac{\mathbf{p}^2}{\epsilon}\right\rangle = \frac{d}{\beta},$$

lo cual permite considerar a $\langle\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{v}\rangle$ como un termómetro estadístico.

De particular relevancia en termodinámica del equilibrio son los sistemas confinados que pueden ser descritos por una densidad $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{p})$ estacionaria e isotrópica en un marco de referencia especifico Σ. Un ejemplo típico lo constituye un gas en equilibrio enclaustrado en un contenedor en reposo en el marco del laboratorio Σ. En la teoría estándar del movimiento Browniano tales sistemas a menudo juegan el rol del baño térmico. En el marco Σ, un gas espacialmente homogéneo está descrito por una función de densidad de la forma

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{p}) = V^{-1}\mathcal{J}(\mathbf{x},\mathbb{V})\,\phi_J(\mathbf{p}), \tag{D.3}$$

donde V es el volumen en reposo (medida de Lebesgue) de la región contenedor $\mathbb{V}\subset\mathbb{R}^d$ ($\mathbb{V}$

abierto y conexo) en Σ y $\mathcal{J}(\mathbf{x},\mathbb{V})$ denota la función indicadora

$$\mathcal{J}(\mathbf{x},\mathbb{V}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \mathbf{x} \in \mathbb{V}, \\ 0, & \text{si } \mathbf{x} \notin \mathbb{V}. \end{cases}$$

Más específicamente, estaremos interesados en contenedores cúbicos de la forma $\mathbb{V} = \prod_{i=1}^{d} [L/2, L/2]$, donde $L > 0$.

En general, cuando un baño térmico relativista se encuentra en equilibrio térmico, se asume que sus partículas cumplen una distribución de Jüttner (en el marco del laboratorio Σ) de la forma (D.3) cuando se especifique un volumen finito $\mathbb{V}$; o bien, de la forma (D.2) cuando solo importe el momento. Lo mismo aplica para una partícula Browniana relativista cuando ésta se encuentra en equilibrio térmico con el baño.

Apéndice E

Notación

Conviene establecer algo de notación con el fin de facilitar la exposición de este trabajo.

Notación 110 *A continuación se presenta una lista de símbolos y convenciones:*

1. $\mathbb{R}^d$ *es el espacio euclidiano d-dimensional con la topología usual.*
2. $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ *es la* σ*-álgebra de Borel en* $\mathbb{R}^d$.
3. $\left(x^i\right)$ *denota al vector* $x = \left(x^1, \ldots, x^d\right)$, *donde d tiene que especificarse.*
4. $A = \left(A^{ij}\right)$ *es la matriz con entradas* A^{ij}, *la dimensión a de ser especificada.*
5. A^{T} *es la transpuesta de la matriz* A *(no excluye vectores).*
6. $\mathrm{Mat}_{d\times m}\left(\mathbb{R}\right)$ *es el conjunto de las matrices con coeficientes reales y dimensión* $d \times m$.
7. $\mathrm{tr}\, A$ *es la traza de la matriz* A.
8. *Se toma como norma de una matriz* A *de dimensión* $d \times m$ *a* $|A|^2 = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{m}\left(A^{ij}\right)^2 = \mathrm{tr}\left(AA^{\mathrm{T}}\right)$
9. δ_{ij} *denota a un delta de Kronecker.*
10. $\sigma\left(X\right)$ *es la* σ*-álgebra generada por* X *y* $\sigma\left(X_t; t \in B\right)$ *es la* σ*-álgebra más pequeña que contiene a* $\sigma\left(X_t\right)$ *para todo* $t \in B$.
11. $\langle X\rangle$ *denota la esperanza de la variable aleatoria* X.

12. st-lím *es el límite estocástico,* ac-lím *es el límite con probabilidad* 1 *y* qm-lím *el límite cuadrático medio.*

13. k_B *es la constante de Boltzmann.*

14. $c = 1$ *es la velocidad de la luz.*

Bibliografía

[1] M. Abdel-Aziz y S. Gavin. Causal diffusion and the survival of charge fluctuations in nuclear collisions. *Phys. Rev. C*, 70(3):034905, 2004.

[2] M. Abdel-Aziz y S. Gavin. Causal diffusion at RHIC. *J. Phys. G: Nucl. Phys.*, 31:S77–S84, 2005.

[3] L. J. S. Allen. *Stochastic Processes with Applications to Biology*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.

[4] R. Aloisio, V. Berezinsky, y A. Gazizov. Superluminal problem in diffusion of relativistic particles and its phenomenological solution. *arXiv/0805.1867*, 2008.

[5] J. Angst y J. Franchi. Central limit theorem for a class of relativistic diffusions. *J. Math. Phys.*, 48(8):083101, 2007.

[6] L. Arnold. *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. John Wiley & Sons, 1974.

[7] C. Barbachoux, F. Debbasch y J. P. Rivet. The spatially one-dimensional relativistic Ornstein-Uhlenbeck process in an arbitrary in-ertial frame. *Eur. Phys. J. B*, 19:37–47, 2001.

[8] E. Bertschinger. Brownian Motion of Stars, Dust, and Invisible Matter. *AIP Conf. Proc.*, 861(1):97–105, 2006.

[9] J. P. Bouchaud y M. Potters. *Theory of Financial Risks: From Statistical Physics to Risk Management*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[10] F. Debbasch, K. Mallick, y J. P. Rivet. Relativistic Ornstein-Uhlenbeck Process. *J. Stat. Phys*, 88:945–966, 1997.

[11] F. Debbasch y J. P. Rivet. A diffusion equation from the relativistic Ornstein-Uhlenbeck process. *J. Stat. Phys*, 90:1179–1199, 1998.

[12] C. D. Dermer. The production spectrum of a relativistic Maxwell-Boltzmann gas. *Astrophys. J.*, 280:328–333, 1984.

[13] M. E. Dieckmann, L. O'C. Drury, y P. K. Shukla. On the ultrarelativistic two-stream instability, electrostatic turbulence and Brownian motion. *New J. Phys.*, 8:40, 2006.

[14] R. M. Dudley. Lorentz-invariant Markov processes in relativistic phase space. *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 6:241–268, 1965.

[15] R. M. Dudley. A note on Lorentz-invariant Markov processes. *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 6:575–581, 1967.

[16] R. M. Dudley. Asymptotics of Some Relativistic Markov Processes. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 70(12):3551–3555, 1973.

[17] R. M. Dudley. Recession of some relativistic Markov processes. *Rocky Mountain J. Math.*, 4:401–406, 1967.

[18] J. Dunkel y P. Hänggi. Theory of the relativistic Brownian motion: The (1+1)-dimensional case. *Phys. Rev. E*, 71:016124, 2005.

[19] J. Dunkel y P. Hänggi. Theory of the relativistic Brownian motion: The (1+3)-dimensional case. *Phys. Rev. E*, 72:036106, 2005.

[20] J. Dunkel, S. Hilbert y P. Hänggi. Langevin-Gleichungen mit nichtlinearer Reibung. In T. Pöschel, H. Malchow, and L. Schimansky-Geier, editors, *Irreversible Prozesse und Selbstorganisation*, pages 11–21. Logos-Verlag, Berlin, 2006. ISBN 3-8325-1350-7.

[21] J. Dunkel y P. Hänggi. Relativistic Brownian motion: From a microscopic binary collision model to the Langevin equation. *Phys. Rev. E*, 74:051106, 2006. *Erratum*, Phys. Rev. E, 74:069902(E), 2006.

[22] J. Dunkel y P. Hänggi. One-dimensional nonrelativistic and relativistic Brownian motions: A microscopic collision model. *Physica A*, 374(2):559–572, 2007.

[23] J. Dunkel. *Relativistic Brownian Motion and Diffusion Processes.* Ph.D. thesis, Universität Augsburg, 2008.

[24] J. Dunkel, P. Talkner y P. Hänggi. Relativistic diffusion processes and random walk models. *Phys. Rev. D*, 75:043001, 2007.

[25] J. Dunkel, P. Hänggi y S. Weber. Time parameters and Lorentz transformations of relativistic stochastic processes. *arXiv:0812.0466v1*, 2008.

[26] J. Dunkel y P. Hänggi. Relativistic Brownian Motion. *Phys. Rep.,* 471(1):1-73, 2009.

[27] R. J. Elliott y P. E. Kopp. *Mathematics of Financial Markets.* Springer-Verlag, New York, 1999.

[28] L. C. Evans. *An Introduction to Stochastic Differential Equations. http://math.berkeley.edu/~evans*, 2009.

[29] I. I. Gihman y A. V. Skorohod. *Stochastic Differential Equations.* Springer-Verlag, Berlín, Heidelberg, New York, 1972.

[30] P. Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering.* Number 53 in Applications of Mathematics. Springer, New York, 2004.

[31] R. Hakim. A covariant theory of relativistic Brownian Motion. I. Local Equilibrium. *J. Math. Phys.*, 6(10):1482–1495, 1965.

[32] R. Hakim. Relativistic stochastic processes. *J. Math. Phys.*, 9:1805–1818, 1968.

[33] R. Hakim. Remarks on Relativistic Statistical Mechanics. I. *J. Math. Phys.*, 8(6):1315–1344, 1965.

[34] R. Hakim. Remarks on Relativistic Statistical Mechanics. II. Hierarchies for the Reduced Densities. *J. Math. Phys.*, 8(7):1397–1400, 1965.

[35] H. van Hees y R. Rapp. Thermalization of heavy quarks in the quark-gluon plasma. *Phys. Rev. C*, 71(3):034907, 2005.

[36] H. van Hees, V. Greco, y R. Rapp. Heavy-quark probes of the quark-gluon plasma and interpretation of recent data taken at the BNL Relativistic Heavy Ion Collider. *Phys. Rev. C*, 73:034913, 2006.

[37] O. D. Johns. *Analytical Mechanics for Relativity and Quantum Mechanics*. Oxford University Press, 2005.

[38] F. Jüttner. Das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in der Relativtheorie. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 34(5):856–882, 1911.

[39] N. G. van Kampen. Relativistic thermodynamics of moving systems. *Phys. Rev.*, 173:295–301, 1968.

[40] N. G. van Kampen. Lorentz-invariance of the distribution in phase space. *Physica*, 43:244–262, 1969.

[41] N. G. van Kampen. Relativistic thermodynamics. *J. Phys. Soc. Jap. Suppl.*, 26:316–321, 1969.

[42] I. Karatzas y S. E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, Berlín, Heidelberg, New York, 1988.

[43] N. E. Karoui y L. Mazliak. *Backward Stochastic Differential Equations*. Addison-Wesley, 1997.

[44] P. E. Kloeden y E. Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlín, Heidelberg, New York, 1995.

[45] M. von Laue. Zur Dynamik der Relativitätstheorie. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 35:524–542, 1911.

[46] H. P. McKean Jr. *Stochastic Integrals*. Academic Press, New York, 1969.

[47] K. von Mosengeil. Theorie der stationären Strahlung in einem gleichförmig bewegten Hohlraum. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 22:867–904, 1907.

[48] B. Oksendal. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications.* Springer-Verlag, Berlín, Heidelberg, New York, Tokio, 1989.

[49] H. Ott. Lorentz-Transformation der Wärme und der Temperatur. *Z. Phys.*, 175:70–104, 1963.

[50] Yu. V. Prohorov y Yu. A. Rozanov. *Probability Theory.* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlín, 1969.

[51] P. E. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations.* Springer-Verlag, Berlín, Heidelberg, New York, 2003.

[52] R. Rapp, V. Greco, y H. van Hees. Heavy-Quark Spectra at RHIC and Resonances in the QGP. *Nucl. Phys. A*, 774:685–688, 2006.

[53] L. C. G. Rogers y D. Williams. *Diffusions, Markov Processes and Martingales, Vol. 2.* Cambridge University Press, 2004.

[54] R. U. Sexl y H. K. Urbantke. *Relativity, Groups, Particles.* Springer Physics. Springer, Wien, 2001.

[55] B. Svetitsky. Diffusion of charmed quarks in the quark-gluon plasma. *Phys. Rev. D*, 37(9):2484–2491, 1988.

[56] C. Tudor. *Procesos Estocásticos.* Sociedad Matemática Mexicana. Aportaciones Matemáticas,Textos Nivel Avanzado 2. 2002.

[57] G. N. Watson. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions.* Merchant Books, 2008.

[58] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology.* John Wiley & Sons, 1972.

[59] D. Wilkinson. *Stochastic Modelling for Systems Biology,* volumen 11 de *Mathematical and Computational Biology Series.* Chapman & Hall/CRC, London, 2006.

[60] G.Wolschin, M. Biyajima, T. Mizoguchi, y N. Suzuki. Time evolution of relativistic d+au and au+au collisions. *Ann. Phys.*, 15(6):369–378, 2006.

[61] C. K. Yuen. Lorentz transformation of thermodynamic quantities. *Am. J. Phys.*, 38:246–252, 1970.

[62] B. Wolfe y F. Melia. Covariant kinetic theory with an application to the coma cluster. *Astrophys. J.*, 638, 2006.

[63] G. Wolschin. Diffusion and local deconfinement in relativistic systems. *Phys. Rev. C*, 69(2):024906, February 2004.