CIMAT

# Procesos Ambit como Modelos de Contratos Forward en Mercados de Energía

## Tesis

que para obtener el grado de

Maestro en ciencias con especialidad en probabilidad y estadística

## Presenta

Orimar Sauri Arregui

## Director de tesis

Dr. Víctor Manuel Pérez-Abreu Carrión

Guanajuato, Guanajuato, México a 4 de Julio de 2012

# Agradecimientos

En primera instancia agradezco a mi asesor el Doctor Víctor Pérez-Abreu, por su apoyo incondicional durante la maestría y en el desarrollo del presente trabajo. Agradezco de igual manera a todo el departamento de Probabilidad y Estadística del CIMAT, en especial a los doctores Víctor Rivero, Juan Carlos Pardo y Rogelio Ramos por brindarme su apoyo y amistad a través de estos años. De mención especial es el profundo agradecimiento que tengo para el CONACYT por brindarme la beca que fue el sustento para mi desarrollo a lo largo de ésta parte de mi formación. Finalmente, quiero dar las gracias a mis sinodales Daniel Hernández y Erick Treviño por las sugerencias hechas para mejorar esta tesis.

# Índice general

# Introducción

Actualmente los energéticos tienen un papel primordial y estratégico en la economía global. En el contexto de mercados financieros, los mercados de energía han tenido una creciente importancia por sus propiedades atípicas con respecto a los mercados tradicionales. A partir de los años 90´s, los mercados de energía comenzaron a liberarse económicamente, ya que la distribución y producción de los energéticos en algunos países comenzó a ser manejada por empresas privadas en vez del estado. Esto hizo que el estilo de compra y venta fuese más flexible dando paso a una organización más del tipo financiera; siendo Inglaterra, Gales y los países Nórdicos las primeras naciones en apostar por esta clase de estructura. En 1999, el *Chicago Mercantile Exchange* organizó un mercado de temperatura, el cual recientemente se ha posicionado como uno de los principales mercados de energía. De igual manera el *New York Mercantile Exchange* creó un mercado exclusivo para derivados del gas. El nivel de impacto y el crecimiento que tuvieron tales mercados favoreció el desarrollo y la implementación de contratos financieros. La aparición de dichos instrumentos llamó la atención no sólo de los consumidores habituales, sino de una basta gama de agentes económicos, incluyendo a especuladores.

Por lo que se refiere a la electricidad (al igual que la temperatura y el gas), ésta presenta cualidades especiales (como activo), siendo la más representativa la falta de almacenamiento. Otra característica a destacar son los cambios drásticos en el proceso de precios (comparado con otras materias primas), exhibiendo una fuerte reversión a la media. A causa de esto, el riesgo de mercado es mayor, en contraste con los mercados de acciones. Por tanto, los inversionistas esperan un incremento en sus rendimientos con el fin de justificar su inversión, lo cual muchas veces no sucede. En esta misma línea, la imposibilidad de almacenamiento provoca un mercado altamente ilíquido, debido principalmente a su exposición frente a las necesidades de productores y consumidores. Un desbalance entre estos actores desencadena una sobrevaloración o devaluación del activo. Otro punto importante que origina la falta de almacenamiento, es un déficit de estrategias de cobertura sobre dicho subyacente. Es decir, los altos costos de crear una reserva de electricidad hacen imposible el diseño de un portafolio que permita, tanto diversificar el riesgo como hacer fluctuar la riqueza en el tiempo de inversión, y cuyo valor dependa de dicho activo.

Lo expuesto anteriormente impide una definición precisa sobre arbitraje, debido a que tal concepto es entendido como una estrategia de inversión nula que permite obtener ganancias sin riesgo. Así pues, al no existir una noción clara de arbitraje, argumentos de valuación que están soportados en la ausencia de éste no son viables. De ahí que los agentes opten por comerciar con derivados del precio en vez de con la materia prima, siendo el más usual el llamado contrato forward.

Lo anterior plantea la construcción de enfoques de modelación más flexibles, puesto que la visión común en matemáticas financieras se remite a argumentos de no arbitraje. Sin embargo, al no existir tal concepto, es posible crear dinámicas para el proceso de precios que vayan más allá del contexto clásico (martingalas, martingalas locales y semimartingalas). En resumen, debido a que algunos mercados de energía son bastante irregulares, es necesario crear modelos lo suficientemente generales y parsimoniosos que consideren la iliquidez en el mercado, la escasez de portafolios que incluyan al bien energético y sobre todo los cambios drásticos en el precio, así como una tasa de reversión a la media atípica y su comportamiento estacional.

En la literatura concerniente a los mercados de energía existen varios enfoques de modelación, siendo el más común el dirigido a modelar el *"convenience yield"* (ver lo trabajos de

Carmona y Ludkovski (2004, 2010) para más detalles). No obstante, tal concepto está íntimamente relacionado con la utilidad que se obtiene por almacenar la materia prima, de modo que la electricidad no está contemplada dentro de este contexto.

El tema central de este trabajo de tesis es el estudio de una reciente propuesta en la modelación de contratos financieros en mercados de energía, la cual está basada en el contexto de los llamados *procesos ambit*.

Dentro del contexto de mercados de tasas de interés, el enfoque propuesto por Heat, Jarrow y Morton (1992) permite modelar la estructura del precio forward y en base a ella, obtener una configuración (con propiedades análogas) para el precio spot; esta metodología es conocida como la de Heath-Jarrow-Morton. Estos autores sugieren modelar la tasa forward mediante un proceso estocástico gaussiano, indexado por el tiempo de vida del contrato y su fecha de maduración. Como un primer acercamiento en la descripción del precio spot de algunos energéticos, es posible considerar dinámicas del estilo anterior. Sin embargo, tal enfoque ha demostrado ser incapaz de captar los saltos desmedidos que el proceso de precios muestra, debido en gran parte al movimiento browniano que funge como factor de ruido y la ausencia de volatilidad estocástica.

Posteriormente Goldstein (2000) considera procesos más generales que el gaussiano y además se dota al modelo con un proceso de volatilidad estocástica, el cual permite reflejar algunos saltos en la serie. Deng (2000) se plantea una configuración para el precio forward, la cual se basa en una ecuación de difusión browniana con un coeficiente de saltos gobernado por un proceso de Poisson compuesto, donde además se desarrolla una dinámica discontinua para el precio forward. Si bien este último trabajo parece ser uno de los primeros que estudia, de manera detallada, la falta de almacenamiento y los pronunciados picos en la serie de datos, el que explica de una manera bastante amplia el funcionamiento de los mercados de electricidad es el de Benth y Koekebakker (2008). En donde, auxiliados por la metodología de Heat-Jarrow-Morton, se logra describir el precio forward a través de una ecuación de evolución con saltos, siendo la componente de difusión un movimiento browniano y la parte de discontinuidad se rige por una medida de Poisson puntual.

Recientemente Barndorff-Nielsen, Benth y Veraart (2010b) proponen un nuevo enfoque de modelación basado en los llamados *campos ambit,* los cuales son procesos aleatorios del tipo espacio-temporal, descritos por medio de integrales estocásticas con respecto a una clase especial de medidas aleatorias (*bases de Lévy*). En ese trabajo los autores muestran como varias de las dinámicas clásicas para el precio/tasa forward, pueden ser vistas como un campo ambit. Asimismo encuentran una estructura para el precio spot, la cual está íntimamente relacionada con el modelo descrito por Barndorff-Nielsen, Benth y Veraart (2010c). De manera relevante, la forma propuesta para el precio forward consigue captar una amplia e importante gama de hechos referentes a los mercados de energía, tales como volatilidad estocástica, ausencia de estrategias de cobertura, iliquidez, estacionalidad, entre otros.

Los *procesos y campos ambit* fueron introducidos por Barndorff-Nielsen y Schmiegel (2003), como modelos espacio-temporales para estudiar la variabilidad existente en los campos de velocidad de fluidos turbulentos, lo que es conocido como intermitencia en la física. Estos modelos también han sido usados para describir el crecimiento de sistemas biológicos, incluidos los tumores (ver Barndorff-Nielsen, Jensen, Jónsdóttir y Schmiegel (2007)). La herramienta principal para estudiar dichos procesos son las integrales estocásticas, las cuales permiten compactar la información de un sistema perturbado a través de su integrador e integrando.

El objetivo general de esta tesis es exponer el enfoque *ambit* en la descripción del precio forward en mercados de energía, discutiendo las ventajas e inconvenientes que surgen al adoptar dicho enfoque. En particular, se considera la modelación de la volatilidad estocástica que impera en el precio de activos riesgosos. La exposición se desarrolla de tal forma que permita exhibir el potencial que tiene la metodología de *procesos ambit* en la descripción de una gran variedad de series financieras.

Para tales propósitos se realiza una revisión detallada de los componentes del modelo de Barndorff-Nielsen y cols. (2010b). Se incluye un compendio de la teoría relacionada con las *bases de Lévy*, así como la construcción de integrales estocásticas con respecto a éstas, con el fin de estudiar los *campos y procesos ambit*. En esta recopilación se presenta un nuevo enfoque para abordar el problema de integración sobre la recta real, relacionado con las *bases de Lévy homogéneas*. Igualmente, se estudian algunas dinámicas para el precio forward y se efectúa una comparación entre éstas y la estructura obtenida a través del contexto *ambit*.

La estructura de la tesis es la siguiente. En el Capítulo 1 se expone el funcionamiento interno de los mercados eléctricos, y en cierta medida el enfoque de modelación que se seguirá a lo largo de este escrito. Se describe el sistema de subastas en el cual se basa la elección del precio spot, así como la formación de contratos forward relacionados a éste. Finalmente, con base en argumentos de no arbitraje, se describe la estructura del precio forward sustentado fuertemente por Benth, Benth y Koekebakker (2008).
En el Capítulo 2 se hace una recopilación de la teoría de *bases de Lévy*, en la cual se incluye su representación de Lévy-Kintchine y su descomposición del tipo Lévy-Itô. De igual forma se muestra la relación que existe entre éstas y los procesos aditivos naturales. Usando dicha clase de medidas aleatorias, se construyen integrales estocásticas tanto para integrandos deterministas como para aleatorios. El primer enfoque se basa en la convergencia de ternas características y el segundo en la construcción usual de Itô. Se concluye el capítulo examinando la equivalencia entre ambas teorías de integración y en base a esto se trata el caso especial de las *bases de Lévy homogéneas*.
En el Capítulo 3 se introducen *los campos y procesos ambit* como procesos espacio-temporales, descritos por integrales estocásticas con respecto a una base de Lévy. De igual manera se incluyen los *procesos de Lévy semi-estacionarios* como *campos ambit* con coordenada espacial nula. Asimismo se expone y justifica el modelo propuesto en Barndorff-Nielsen y cols. (2010b),

mostrando de manera detallada sus propiedades financieras y matemáticas.

En el Capítulo 4 presentamos un compendio de los beneficios e inconvenientes que el enfoque *ambit* presenta en el proceso de modelación y durante la calibración. De igual forma, se proponen algunas extensiones así como una posible ecuación de evolución estocástica para el precio forward. Finalmente se presentan las conclusiones de nuestro análisis.

# Capítulo 1

# Una introducción al mercado de electricidad

El objetivo de este capítulo es describir el mecanismo que existe detrás de los mercados de energía haciendo énfasis principalmente en el de electricidad, ya que es éste uno de los más atípicos. De manera general, se describe la generación del precio spot en los diferentes tipos de mercados que existen, así como también el funcionamiento y la formación de contratos financieros. Además, se muestran las diferencias que existen entre los mercados clásicos (acciones, divisas, bonos, tasas de interés, etc.) y los de electricidad, siendo el de mayor interés la falta de almacenamiento, la ausencia de estrategias de cobertura y la carencia de una definición de arbitraje.

Para los lectores no familiarizados con la terminología de matemáticas financieras se sugiere consultar Shiryaev (2008), Mikosch (1998) o Capinski y Zastawniak (2003) para familiarizarse con los términos financieros que aparecerán a lo largo de esta tesis, tales como activo financiero, iliquidez, proceso de precios, numéraire, contratos forward y swap, opciones vainilla, medida de martingala equivalente, entre otros. Con respecto a la terminología de mercados de energía se sugiere consultar Benth y cols. (2008).

## 1.1. El precio spot y contratos reguladores

Originalmente, previo a los años 90´s, los precios en los sectores de energía eran determinados por una serie de reguladores, los cuales principalmente tomaban como base los costos de producción y distribución así como la capacidad de transmisión. Actualmente los precios se determinan por la oferta y la demanda que existe entre productores y consumidores. Si bien la electricidad, al igual que el gas y la temperatura, está incluida dentro de los bienes energéticos, es en muchos sentidos diferente a los usuales, tales como el petróleo. Esto debido principalmente a la forma de comerciarlos y producirlos.

Posterior a la liberación comercial de los energéticos, varios países optaron por la creación de mercados financieros donde el activo principal fuera dicho bien, en particular, el consumo y la producción de electricidad pasó a ser regulado vía contratos financieros. En estos se establecen periodos de entrega donde se surte o se elabora una cantidad pactada del producto en cuestión, lo que dio paso a la participación de especuladores en el mercado. A partir de ello, se diseñaron varios mecanismos para balancear la oferta y la demanda que existe en este sector, uno de ellos fue el desarrollo de contratos que prescribieran principalmente dos tipos de acuerdos: *entrega física del artículo* y *convenios del tipo financiero*. En las siguientes subsecciones, se detalla más acerca de el funcionamiento de los instrumentos antes mencionados.

## Contratos con entrega física

Al hablar de contratos con entrega física, nos referimos a contratos que estipulan la producción o el consumo de electricidad. En mercados donde los contratos de esta índole son comerciados podemos encontrar principalmente dos tipos, el mercado a *tiempo real* y el del *día siguiente*, ambos regulados por un *operador de sistema de producción*, el cual se encarga de balancear la oferta y la demanda, pues la capacidad del sistema es limitada. El término operador de sistema de producción se refiere a la persona o personas que están encargadas de transmitir energía eléctrica desde plantas de generación. Dadas las especificaciones del contrato, usualmente los agentes que intervienen en estos mercados son aquellos que tienen tanto facilidades de fabricación como de adquisición.

El mercado a tiempo real se organiza mediante un sistema operador que se encarga de regular las alzas y bajas del precio a corto plazo. Con el fin de estabilizar el valor de la energía, el sistema operador realiza subastas en donde los agentes, mediante el contrato, especifican el periodo de tiempo que se generará o consumirá la energía requerida. Las subastas son presentadas usualmente cada hora a lo largo del tiempo de operación. En caso de existir un déficit, el sistema operador lo ajusta estableciendo como precio la oferta mayor que ha sido dada en orden de prioridad. En contra parte, si hay un excedente, el precio se toma como la mínima propuesta hecha en la subasta.

Por su parte, en el mercado del día siguiente los agentes ofertan a través del contrato la duración de uso o producción a través del día posterior. El sistema operador en base a las subastas deriva el precio para cada hora del día siguiente y posteriormente lo hacen público.

### Convenios del tipo financiero

Este tipos de mercados son más bien del tipo clásico, es decir, son mercados financieros usuales cuyo activo principal es el contrato forward referente al precio de la electricidad. Sin embargo, en el sentido estricto, los acuerdos comerciados no son del tipo mencionado. Por una parte, el tiempo de ejercicio no es un sólo instante en el tiempo, sino un *periodo de entrega*. Durante este período, el contrato no se liquida mediante el activo subyacente, sino por el diferencial entre el precio spot y el precio pactado en el contrato, es decir, el contrato no se liquida con la producción o consumo de electricidad, sino en la diferencia (en efectivo) entre el precio spot (comúnmente el del mercado del día siguiente) y el fijado en el convenio. Es importante enfatizar que los agentes pueden decidir tomar una posición (corta o larga), previo al comienzo del periodo de entrega, por lo que podemos considerar dichos contratos como swaps con el flujo de efectivo dado por el diferencial entre el precio del activo y el de ejercicio. En lo que resta del trabajo nos referiremos a estos contratos como forwards con período de entrega o simplemente swaps.

Cabe resaltar la imposibilidad que existe en estos mercados para cubrirse del riesgo que produce los brincos en el precio, pues los contratos se basan en efectivo y no en una transacción del activo subyacente, por lo que no es posible tomar una posición que diversifique el riesgo de un portafolio. De modo que, de manera natural, nos preguntamos sobre derivados del precio de la electricidad que nos permitan crear una estrategia óptima de inversión. Es aquí donde la falta de almacenamiento juega un papel importante y, que además caracteriza a las series de precios como se verá en secciones posteriores.

## 1.2. La falta de almacenamiento

A causa de los excesivos costos que tiene el almacenar la electricidad, los agentes financieros que intervienen en los mercados referentes a ésta optan por no comerciarla directamente, sino a través de contratos, por lo que es razonable considerar que en general no es posible almacenarla, provocando esto que el mercado sea bastante ilíquido. Dicho lo anterior, no es estrictamente correcto tratar como activos financieros usuales a la electricidad así como otros bienes energéticos.

En los mercados clásicos, un activo financiero es entendido como un bien que puede ser intercambiado por un valor monetario. Este es principalmente usado para diseñar estrategias de inversión (creación de portafolios) que permitan que el valor de dicho bien, así como la riqueza del inversionista, fluctúen en el tiempo. Desafortunadamente el costo de almacenamiento de la energía eléctrica hace que dichas estrategias no sean factibles, pues portafolios que incluyan a la electricidad como activo no tienen sentido.

El concepto de arbitraje y más generalmente el de *"free lunch with vanishing risk"*(FLVR) son conceptos fundamentales en finanzas, no sólo por ser una propiedad deseada, sino por ser una de las herramientas principales en la valuación de derivados. Para ver una discusión más amplia sobre los conceptos previos, ver Delbaen y Schachermayer (1994). El Teorema Fundamental de Valuación de Activos (TFVA), en una de sus versiones más generales, nos garantiza que si el precio es una semimartingala, entonces el mercado no admite FLVR si y solamente si existe una medida de martingala (local) equivalente.

El *argumento estándar de valuación* se basa en el supuesto de que en el mercado no existe arbitraje. Si lo anterior ocurre, el TFVA nos permite representar el precio (no necesariamente único) de cualquier derivado como la esperanza condicional de la función de pago (descontada) del activo contingente, bajo la medida de martingala equivalente. Si bien, el supuesto sobre la ausencia de arbitraje o FLVR es deseable en mercados financieros usuales, éste no hace sentido en el de electricidad, pues estos conceptos se basan en la creación de estrategias referentes al activo subyacente, lo cual es imposible en éste.

Lo anterior presenta un problema de valuación importante, ya que al estar dichos mercados basados en contratos forward como activo principal, es necesario un método que asigne un precio justo a los derivados. Cabe enfatizar que en los mercados en donde se comercian contratos del tipo financiero el problema se hereda, por la evidente razón de que el precio del forward depende de la fluctuación del precio de la energía eléctrica. A pesar de ello, el problema de modelación se convierte en algo más flexible, pues podemos considerar dinámicas para el precio más generales que el enfoque de semimartingalas. No obstante, el problema sobre el concepto de arbitraje persiste, razón por la cual se necesita de una definición más general de arbitraje, la cual incluya el caso de mercados de electricidad, entre otros.

## 1.3. El precio del contrato y la metodología de Heath-Jarrow-Morton

En los mercados de tasas de interés es usual la formación de contratos forward referentes a la tasa libre de riesgo. En esta sección haremos una revisión de estos y la relación directa con los convenios tipo swap que surgen en los mercados de energía.

Consideremos el mercado $(B_t, S_t)_{t\geq 0}$, donde $B_t$ y $S_t$ son los precios del numéraire y el de un activo financiero usual respectivamente, ambos definidos sobre un espacio de probabilidad filtrado $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$. Consideremos un contrato forward con fecha de entrega $T > 0$. Bajo el supuesto de no arbitraje, es fácil probar que el precio forward está dado por

$$F(t,T) = \frac{B_T}{B_t} S_t, \quad t \leq T.$$

Nuevamente, suponiendo no arbitraje

$$\begin{aligned} F(t,T) &= \frac{B_T}{B_t} S_t \\ &= B_T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \frac{S_T}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right], \quad t \leq T, \end{aligned}$$

donde $\mathbb{Q}$ es una medida de martingala equivalente. Para facilitar la notación vamos a suponer que $B$ es una cuenta bancaria capitalizable continuamente bajo una tasa libre de riesgo $r \geq 0$, por lo que

$$F(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ S_T \mid \mathcal{F}_t \right], \quad t \leq T. \tag{1.3.1}$$

En el caso de contratos forward en mercados de electricidad, el período de entrega comprende de un intervalo de tiempo (medido en horas) en vez de un sólo punto en el tiempo. Supongamos que $S$ es el proceso de precios de la electricidad y que al tiempo $t \leq T_1$ tomamos una posición corta en un contrato del tipo antes mencionado, con período de entrega $[T_1, T_2]$. También consideremos a $\mathbb{Q}$ una medida equivalente a $\mathbb{P}$ tal que el proceso de precios descontado de la energía eléctrica sea una martingala (local) bajo $\mathbb{Q}$. Pensemos además, que el flujo de pago del contrato se capitaliza continuamente. Entonces la ganancia por tomar una posición en dicho convenio está dada por

$$\rho \left[ t, T_1, T_2, (S_r)_{T_1 \leq r \leq T_2} \right] = \int_{T_1}^{T_2} e^{-r(u-t)} \left[ S_u - \widetilde{F}(t, T_1, T_2) \right] du, \quad t \leq T,$$

donde $F(t, T_1, T_2)$ es el precio de entrega establecido en el contrato. Puesto que tomar una posición en el contrato no tiene costo, podemos garantizar vía no arbitraje que

$$e^{-rt} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \int_{T_1}^{T_2} e^{-r(u-t)} \left[ S_u - \widetilde{F}(t, T_1, T_2) \right] du \mid \mathcal{F}_t \right] = 0, \quad t \leq T_1.$$

Ahora bien, en vista de que el precio del contrato está basado en la información que ha generado el mercado, podemos considerar que dicho proceso de precios es adaptado, lo cual nos permite concluir que

$$\widetilde{F}(t, T_1, T_2) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \int_{T_1}^{T_2} \frac{r e^{-ru}}{e^{-rT_1} - e^{-rT_2}} S_u du \mid \mathcal{F}_t \right], \quad t \leq T_1. \tag{1.3.2}$$

Por otra parte, si el convenio dicta que la única fecha de flujo de pago es el final del período de entrega, la ganancia por adquirir el derivado en cuestión es

$$\rho \left[ t, T_1, T_2, (S_r)_{T_1 \leq r \leq T_2} \right] = e^{-r(T_2 - t)} \int_{T_1}^{T_2} \left[ S_u - \widetilde{F}(t, T_1, T_2) \right] du, \quad t \leq T_1,$$

por lo que en éste caso

$$e^{-rT_2}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_{T_1}^{T_2}\left[S_u-\widetilde{F}\left(t,T_1,T_2\right)\right]du \mid \mathcal{F}_t\right]=0,$$

de modo que

$$\widetilde{F}\left(t,T_1,T_2\right)=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_{T_1}^{T_2}\frac{1}{T_2-T_1}S_u du \mid \mathcal{F}_t\right], \quad t\leq T_1. \tag{1.3.3}$$

Las ecuaciones (1.3.2) y (1.3.3) junto con (1.3.1), indican que el precio forward con un período de entrega, es más bien el promedio ponderado del precios forward referentes al activo subyacente, ya que

$$\begin{aligned}\widetilde{F}\left(t,T_1,T_2\right) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_{T_1}^{T_2}\widehat{w}\left(u,T_1,T_2\right)S_u du \mid \mathcal{F}_t\right] &(1.3.4)\\ &= \int_{T_1}^{T_2}\widehat{w}\left(u,T_1,T_2\right)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[S_u \mid \mathcal{F}_t\right]du &(1.3.5)\\ &= \int_{T_1}^{T_2}\widehat{w}\left(u,T_1,T_2\right)F\left(t,u\right)du, \quad t\leq T_1, &(1.3.6)\end{aligned}$$

donde

$$\widehat{w}\left(u,r,s\right)=\frac{w\left(u\right)}{\int_r^s w\left(v\right)dv} \tag{1.3.7}$$

con

$$w\left(u\right):=\begin{cases}1 & \text{si el swap se liquida al final del período de entrega;}\\ e^{-ru} & \text{si el flujo de pago del contrato se capitaliza continuamente.}\end{cases}$$

Esto muestra que el problema de modelación puede ser reducido al desarrollo de dinámicas para el precio forward usual. Desafortunadamente, en el sentido estricto, dichos contratos no existen en mercados de electricidad.

Actualmente existen varios enfoques para modelar el precio forward, la gran mayoría orientados a los mercados de tasas de interés, donde el bono es el activo que principalmente se comercia. Asimismo, se pueden encontrar derivados tales como las tasas forward (precios forward) e instantáneas así como el yield. Una gran ventaja que existe en estos mercados, es la relación uno a uno que hay entre los derivados mencionados anteriormente y el bono, puesto que modelar cualquiera de estos es equivalente a modelar el precio del bono. En el caso del precio forward la relación es simple

$$S_t=F\left(t,t\right), \quad t\geq 0. \tag{1.3.8}$$

Esta ecuación se puede explicar fácilmente, aunque se puede deducir de (1.3.1). El precio forward es interpretado como el *precio justo* que se debe especificar en el contrato de tal manera que los agentes involucrados puedan liquidarlo, es decir, es el precio que permite a los inversionistas crear una estrategia de inversión para poder saldar el contrato de la mejor manera posible. En este sentido, el precio justo en un contrato que expira inmediatamente es claramente el precio actual. Usar la relación (1.3.8) para modelar el precio spot es conocida como *la metodología de Heath-Jarrow-Morton* (ver Heath, Jarrow y Morton (1992)).

Algo que es conveniente tener en cuenta es que si bien $F(s,t) \to S_t$ cuando $s \uparrow t$, $\widetilde{F}(s,t,y)$ no converge al spot cuando $s \uparrow t$, esto es debido a que

$$\begin{aligned}
\lim_{s \uparrow t} \widetilde{F}(s,t,y) &= \int_t^y \widehat{w}(u,t,T_2)\, F(s,u)\, du \\
&= \int_t^y \widehat{w}(u,t,T_2) \lim_{s \uparrow t} F(s,u)\, du \\
&= \int_t^y \widehat{w}(u,t,T_2)\, F(t,u)\, du, \qquad t \leq y, \qquad (1.3.9)
\end{aligned}$$

el cual no es en general igual a $S_t$, a menos claro está que $S$ sea por si mismo una martingala.

Dada las similitudes que existen entre los contratos en mercados de energía y los de tasas de interés, en esta tesis usaremos la metodología de Heath-Jarrow-Morton (HJM) para obtener un modelo para el precio spot de la energía eléctrica así como uno para los contratos tipos swap que se comercian en éste.

# Capítulo 2

# Preliminares de procesos ambit

En este capítulo se presentan las herramientas matemáticas que son necesarias para estudiar a los procesos ambit. Esto se enmarca en la teoría de integración estocástica con respecto a una medida aleatoria, en particular a la conocidas como *bases de Lévy*. Se presentan las pruebas de algunos resultados y otros son sólo enunciados remitiendo sus demostraciones al trabajo de Márquez, Pérez-Abreu y Sauri (2012). Al final del capítulo se presenta una propuesta de esta tesis para abordar un problema de integración con respecto a bases de *Lévy homogéneas* con integrandos aleatorios.

## 2.1. Bases de Lévy

En esta sección se exhiben los resultados básicos referentes a las bases de Lévy, tales como la terna de medidas asociada, la forma de su función cumulante, entre otros. Se estudia además la relación que existe entre las bases mencionadas anteriormente y los procesos con incrementos independientes. Finalmente, mostramos la construcción de una base Lévy auxiliándonos de la función cumulante y de la representación de Lévy-Khintchine asociada. Los conceptos que se exponen son vitales en la construcción de la integral estocástica con respecto a bases de Lévy además de ser la piedra angular de los procesos ambit

### 2.1.1. Bases de Lévy y su representación de Lévy-Khintchine

Una de los componentes principales en los *campos ambit* son las *bases de Lévy* las cuales se presentan en esta parte, exponiendo además la forma de la función cumulante asociada como una repesentación del tipo Lévy-Khintchine, y de qué manera la terna referida a tal representación, induce una medida de control que permite compactar la información de dicha base, así como su variabilidad, siendo esto último esencial en el desarrollo de integrales estocásticas.

Inicialmente Prékopa (1956, 1957), así como Urbanick y Woyczynski (1967), estudiaron una clase de medidas aleatorias con la propiedad *"independent scaterred"*(IS). Sin embargo, no fue

sino hasta el trabajo de Rajput y Rosinski (1989) donde fueron estudiadas de manera rigurosa. Actualmente este tipo de medidas aleatorias son conocidas como bases de Lévy, nombradas así por Ole Barndorff-Nielsen a través de sus trabajos de investigación.
Fijemos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

**Definición 2.1.1** *Sea $\mathcal{R}$ un $\delta$-anillo de un conjunto no vacío $R$, de tal manera que existe $\{R_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{R}$ con $\cup_{n\geq 1} R_n = R$. Consideremos además una función conjunto $L : \Omega \times \mathcal{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que $L$ es una* ***base de Lévy*** *si*

1. *Para cada $A \in \mathcal{R}$, $L(A)$ es una v.a. infinitamente divisible;*

2. *Si $B, C \in \mathcal{R}$, con $B \cap C = \emptyset$, entonces $L(B)$ y $L(C)$ son independientes.*

3. *Para cualquier colección disjunta $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{R}$ tal que $\cup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{R}$, se verifica*

$$L\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} L(A_n), \qquad c.s.,$$

   *donde la serie anterior converge casi seguramente.*

Podemos pensar que una base de Lévy es un proceso estocástico indexado por una colección de conjuntos, que es $\sigma$-aditivo y que además toma valores en el espacio de variables aleatorias infinitamente divisibles. La propiedad 2 en la definición anterior es a lo que nos referimos cuando hablamos de IS. El hecho de que una base de Lévy concentre sus valores en variables aleatorias infinitamente divisibles, nos hace preguntarnos inmediatamente sobre una representación del tipo Lévy-Khintchine (ver por ejemplo Sato (1999)) que tome en cuenta la dependencia sobre los conjuntos. Antes de presentar el resultado concerniente a lo mencionado anteriormente, introduciremos un poco de notación.

**Definición 2.1.2** *Sea $X$ una variable aleatoria definida en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Definimos y denotamos la* ***función cumulante*** *de $X$ como*

$$\mathcal{C}(v \ddagger X) := \log \mathbb{E}\left(e^{ivX}\right), \qquad v \in \mathbb{R},$$

*siempre que $\mathbb{E}\left(e^{ivX}\right) > 0$.*

En el caso de que $X$ sea infinitamente divisible, la función cumulante está bien definida sobre todos los reales.

**Proposición 2.1.1** *Sea $L$ una base de Lévy en $\mathcal{R}$. Entonces*

1. *Para cada* $A \in \mathcal{R}$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\left(v \ddagger L\left(A\right)\right) &= iv\nu_0\left(A\right) - \frac{1}{2}v^2\nu_1\left(A\right) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \left[e^{ivx} - 1 - iv\tau\left(x\right)\right]\nu_A\left(dx\right), \qquad v \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

*donde* $\nu_0$ *es una medida con signo,* $\nu_1$ *es una medida,* $\nu_A\left(\cdot\right)$ *es una medida de Lévy en* $\mathbb{R}$ *y*

$$\tau\left(x\right) = \begin{cases} x & si \ \left|x\right| \leq 1; \\ \frac{x}{\left|x\right|} & si \ \left|x\right| > 1. \end{cases}$$

*Más aún, el mapeo* $A \mapsto \nu_A\left(B\right)$*, es una medida siempre que* $0 \notin \overline{B}$*.*

2. *Recíprocamente, si* $\nu_0$*,* $\nu_1$ *y* $\nu$ *son como antes, entonces existe una única (en el sentido de distribuciones finito-dimensionales) base de Lévy* $L$*, tal que (2.1.1) se satisface.*

3. *Para* $\nu_0$*,* $\nu_1$ *y* $\nu$ *como antes, definamos*

$$\widehat{\lambda}\left(A\right) := \left|\nu_0\right|\left(A\right) + \nu_1\left(A\right) + \int_{\mathbb{R}} 1 \wedge \left|x\right|^2 \nu_A\left(dx\right), \qquad A \in \mathcal{R}. \tag{2.1.2}$$

*Entonces* $\widehat{\lambda}$ *es una medida sobre* $\mathcal{R}$ *tal que* $\widehat{\lambda}\left(A_n\right) \to 0$ *con* $\left\{A_n\right\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{R}$*, implica que necesariamente* $L\left(A_n\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$*.*

Nos referiremos a $(\nu_0, \nu_1, \nu)$ como la terna asociada a $L$.

**Observación 2.1.1** *Por ser* $L\left(A\right)$ *infinitamente divisible para cada* $A \in \mathcal{R}$*, ésta admite una representación del tipo Lévy-Itô (ver Pedersen (2003) para más detalles), la cual está dada por*

$$\begin{aligned} L\left(A\right) &\overset{c.s.}{=} \nu_0\left(A\right) + W\left(A\right) + \int_A \int_{\{|x|<1\}} x\left(N - \nu\right)\left(dx, dr\right) \\ &\quad + \int_A \int_{\{|x|\geq 1\}} xN\left(dx, dr\right), \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

*donde* $W$ *es una base de Lévy con terna* $(0, \nu_1, 0)$ *y* $N$ *es una medida de Poisson puntual con intensidad* $\nu$*, siendo* $W$ *y* $N$ *independientes. En particular, si* $L$ *tiene esperanza finita, esto es* $\mathbb{E}\left[L\left(A\right)\right] < \infty$ *para todo* $A \in \mathcal{R}$*, por Sato (1999, Ejemplo 25.12) dado* $A \in \mathcal{R}$ $\int_A \int_{\{|x|\geq 1\}} x\nu\left(dx, dr\right) < \infty$*, de ahí que*

$$L\left(A\right) \overset{c.s.}{=} \nu_0'\left(A\right) + W\left(A\right) + \int_A \int_{\mathbb{R}} x\left(N - \nu\right)\left(dx, dr\right), \tag{2.1.4}$$

*donde*

$$\nu_0'(dr) := \nu_0(dr) + \int_{\{|x|\geq 1\}} x\nu(dy, dr).$$

Consideremos a $\widehat{\lambda}$ como en (2.1.2). En vista de que $\widehat{\lambda}(R_n) < \infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos extender a ésta a una única medida $\sigma$-finita $\lambda$ en $(R, \sigma(\mathcal{R}))$. En lo que resta del presente trabajo, $\lambda$ será llamada la **medida de control** de $L$.

Veamos ahora como $\lambda$ permite expresar a la función cumulante de $L$ como la integral de funciones cumulantes de variables aleatorias infinitamente divisibles. Notemos que por (2.1.2), existen $a, b : R \to \mathbb{R}^+$ funciones medibles tal que

$$|\nu_0|(A) = \int_A a(r)\lambda(dr), \quad A \in \mathcal{R},$$

y

$$\nu_1(A) = \int_A b(r)\lambda(dr), \quad A \in \mathcal{R},$$

pues $|\nu_0|$ y $\nu_1$ son absolutamente continuas con respecto a $\lambda$. Lo anterior indica que (2.1.1) admite la representación

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(v\ddagger L(A)) &= iv\int_A a(r)\lambda(dr) - \frac{1}{2}v^2\int_A b(r)\lambda(dr) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \left[e^{ivx} - 1 - iv\tau(x)\right]\nu_A(dx), \quad v \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Una descomposición para $\nu$ que involucre a $\lambda$ es deseable, pues en tal caso la función cumulante puede ser expresada como una integral con respecto a la medida de control.

**Proposición 2.1.2** *Sea $\nu$ como en la Proposición 2.1.1. Entonces existe una única medida $\sigma$-finita $\mu$ en $\sigma(\mathcal{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que*

$$\mu(A \times B) = \nu_A(B).$$

*Más aún, existe una función $\rho : R \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$, tal que*

1. *$\rho(r, \cdot)$ es una medida de Lévy en $\mathbb{R}$.*
2. *$\rho(\cdot, B)$ es una función $\sigma(\mathcal{R})$-medible, para cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*
3. *Para cualquier $h : R \times \mathbb{R} \to [0, \infty]$ medible*

$$\int_{S\times\mathbb{R}} h(r, x)\mu(ds, dx) = \int_S \int_{\mathbb{R}} h(r, x)\rho(r, dx)\lambda(dr).$$

**Corolario 2.1.1** *Sea $L$ una base de Lévy definida en $\mathcal{R}$ y $\lambda$ su medida de control. Entonces*

$$\mathcal{C}\left(v\ddagger L\left(A\right)\right)=\int_{A}K\left(v,r\right)\lambda\left(dr\right),\qquad v\in\mathbb{R},A\in\mathcal{R}, \tag{2.1.5}$$

*donde*

$$K\left(v,r\right)=iva\left(r\right)-\frac{1}{2}v^{2}b\left(r\right)+\int_{\mathbb{R}}\left[e^{ivx}-1-iv\tau\left(x\right)\right]\rho\left(r,dx\right). \tag{2.1.6}$$

Ahora bien, para cada $r\in R$, consideremos la variable aleatoria infinitamente divisible $L'\left(r\right)$, asociada a la terna $\left(a\left(r\right),b\left(r\right),\rho\left(r,dx\right)\right)$. Entonces, por el Corolario anterior

$$\mathcal{C}\left(v\ddagger L\left(A\right)\right)=\int_{A}\mathcal{C}\left(v\ddagger L'\left(r\right)\right)\lambda\left(dr\right),\qquad v\in\mathbb{R},A\in\mathcal{R}. \tag{2.1.7}$$

La representación de la función cumulante dada en (2.1.7), nos permite pensar en la distribución de $L\left(A\right)$ como la integral sobre $A$ de variables aleatorias infinitamente divisibles. En lo siguiente, nos referiremos a la colección $\{L'\left(r\right),r\in R\}$ como las **semillas de Lévy** asociadas a $L$.

**Definición 2.1.3** *Sea $L$ una base de Lévy definida en $\mathcal{R}$ con $R\subset\mathbb{R}^{d}$ y $\lambda$ su medida de control. Se dice que $L$ es **factorizable** si existe una medida de Lévy $\eta$, tal que*

$$\rho\left(r,dx\right)\lambda\left(dr\right)=\eta\left(dx\right)\lambda\left(dr\right),$$

*es decir $\rho$ no depende de $r$. En este mismo sentido, si $L$ es factorizable nos referiremos a ella como **homogénea** si las funciones $a$ y $b$ no dependen de $r$ y además $\lambda$ es proporcional a la medida de Lebesgue.*

Nótese que si $L$ es homogénea , entonces su cumulante toma la forma

$$\mathcal{C}\left(v\ddagger L\left(A\right)\right)=leb\left(A\right)\left\{iva-\frac{1}{2}v^{2}b+c\int_{\mathbb{R}}\left[e^{ivx}-1-iv\tau\left(x\right)\right]\eta\left(dx\right)\right\},\qquad v\in\mathbb{R},A\in\mathcal{R}, \tag{2.1.8}$$

donde $leb$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^{d}$ y $c$ la constante de proporcionalidad entre $\lambda$ y $leb$. En el caso particular de que $A=(0,t]$, dicho cumulante corresponde a un proceso de Lévy con terna característica $(a,b,c\eta)$. En la siguiente subsección se habla más acerca de la relación entre bases de Lévy y procesos con incrementos independientes.

### 2.1.2. Bases de Lévy y procesos con incrementos independientes

En esta subsección se hace una recopilación de los resultados que relacionan a las bases de Lévy con procesos que poseen incrementos independientes. Lo que se presenta aquí, está basado en su mayoría en el trabajo de Sato (2004), donde se muestra de manera natural el nexo entre medidas con la propiedad IS y procesos naturales. Las pruebas de los resultados que aparecen a continuación pueden ser consultadas en dicho trabajo al igual que en Márquez y cols. (2012).

Consideremos a $L$ una base de Lévy, $R = \mathbb{R}^+$ y $\mathcal{R} = \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^+)$ el anillo formado por todos los conjuntos de Borel acotados en la topología usual. Por comodidad en la notación, vamos a suponer que la constante de proporcionalidad entre $\lambda$ y $leb$ es uno. Definamos el proceso

$$X_t := L((0,t]), \quad t \geq 0. \tag{2.1.9}$$

Entonces $X$ es un proceso con trayectorias càdlàg, incrementos independientes y tripleta

$$a_t := \int_0^t a(r)\lambda(dr); \quad b_t := \int_0^t b(r)\lambda(dr); \quad \nu_t(dx) := \nu_{(0,t]}(dx).$$

En efecto, es claro que $X_t$ es infinitamente divisible con las ternas anteriormente enunciadas. Ahora bien, gracias a la propiedad de IS para cada $0 \leq s \leq t$, se tiene que $X_s$ y $L((s,t])$ son independientes, pero por la propiedad 3 de la Definición 2.1.1

$$\begin{aligned} L((s,t]) &\overset{c.s.}{=} L((0,t]) - L((0,s]) \\ &= X_t - X_s. \end{aligned}$$

La continuidad por la derecha y la existencia del límite por la izquierda son consecuencia de la $\sigma$-aditividad de $L$. De hecho podemos decir más:

**Proposición 2.1.3** *Sea $X$ como en (2.1.9). Entonces $X$ es una semimartingala.*

La prueba de la proposición anterior hace uso del hecho de que el mapeo $t \mapsto a_t$ es localmente de variación acotada. Los procesos con incrementos independientes que tienen la propiedad anterior son llamados en Sato (2004) **procesos aditivos naturales** o simplemente naturales. De hecho, la representación de la terna característica de un proceso aditivo no influyen en su naturalidad. Ver Sato (1999) para una discusión más amplia sobre la función centradora en la representación de Lévy-Khintchine.

Como vimos, dada una base de Lévy es posible asociarle un proceso natural. Una pregunta de mayor impacto surge del contexto: ¿Dado un proceso natural $X$, es posible encontrar una base de Lévy $L$ tal que $X$ este dado por (2.1.9)? La respuesta es afirmativa y se probó por primera vez en Sato (2004). De igual manera en Pedersen (2003) se puede encontrar una prueba basada en la descomposición de Lévy-Itô.

**Teorema 2.1.1** *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso aditivo natural. Entonces existe una base de Lévy $L^X$ tal que (2.1.9) se mantiene casi seguramente. Más aún, $L^X$ es única en el sentido de que si $M$ es otra base de Lévy que satisface (2.1.9), entonces*

$$L^X(A) = M(A), \quad c.s. \ \forall\ A \in \mathcal{B}_b\left(\mathbb{R}^+\right).$$

Es claro que cuando $X$ es un proceso de Lévy, éste es natural y además la base de Lévy inducida por éste es homogénea.

### 2.1.3. Ejemplo: Distribución hiperbólica generalizada

En esta parte se desarrolla un ejemplo concreto de una base de Lévy. Dicha base se construye a partir de una semilla y a través de ésta se encuentra su función cumulante. Nos enfocaremos en la distribución hiperbólica generalizada, ya que ésta ha resultado ser una elección razonable para describir los rendimientos logarítmicos de varias series financieras incluyendo la del precio de electricidad (ver por ejemplo Barndorff-Nielsen y cols. (2010c)). Las pruebas y cálculos que se presentan durante esta parte pueden ser consultados en Hu (2005) y Eberlein y Hammerstein (2002).

En 1977, Ole Barndorff-Nielsen introdujo la distribución *hiperbólica* para describir la distribución del tamaño de granos de arena en dunas. De igual manera desarrolló una gran familia basada en éstas, la cual es conocida como la distribución *hiperbólica generalizada* (HG), siendo incluidas en ésta la distribución *normal inversa gaussiana* (NIG) así como la varianza-gamma (VG).

Recuerde que la notación $\overset{d}{=}$ se refiere a igualdad en distribución.

**Definición 2.1.4** *Se dice que una variable aleatoria $X$ tiene distribución **hiperbólica generalizada** si*

$$X \overset{d}{=} \mu + \beta W + \sqrt{W} Z, \tag{2.1.10}$$

*donde $\mu, \beta \in \mathbb{R}$, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $W$ es una v.a. inversa gaussiana generalizada, esto es, $W$ tiene densidad y está dada por*

$$f_W(w;\phi,\gamma,\delta) = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\phi} \frac{1}{2K_{\phi}(\delta\gamma)} w^{\phi-1} e^{-\frac{1}{2}\left(\delta^2 w^{-1} + \gamma^2 w\right)} \mathbf{1}_{\{w>0\}},$$

*donde $K_\phi$ denota la función de Bessel modificada de segundo tipo con índice $\phi$ y*

$$\left.\begin{array}{l} \delta \geq 0, \gamma > 0 \ \text{si}\ \phi > 0; \\ \delta > 0, \gamma > 0 \ \text{si}\ \phi = 0; \\ \delta > 0, \gamma \geq 0 \ \text{si}\ \phi < 0. \end{array}\right\} \tag{2.1.11}$$

*Además $Z$ y $W$ son independientes. Como parte de la notación, escribimos $X \sim HG(\mu,\beta,\phi,\gamma,\delta)$ si $X$ sigue esta distribución.*

En general, si una v.a. cumple una relación análoga a 2.1.10 para $W$ arbitraria, se dice que es una *mezcla normal de media-varianza.* Notemos que $X\,|W \sim \mathcal{N}(\mu + \beta W, W)$, por lo que la densidad de $X$ se puede expresar como

$$f_X(x;\mu,\beta,\phi,\gamma,\delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{w^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2w}(x-\mu-\beta w)^2\right\}f_W(w;\phi,\gamma,\delta)\,dw.$$

**Proposición 2.1.4** *Si $X\sim HG(\mu,\phi,\gamma,\delta,\beta)$, entonces su densidad está dada por*

$$f_X(x;\mu,\beta,\phi,\gamma,\delta)=a(\mu,\beta,\phi,\gamma,\delta)\left[\delta^2+(x-\mu)^2\right]^{(\phi-1/2)/2}e^{\beta(x-\mu)}K_{\phi-1/2}\left(\gamma\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}\right),$$

*para cada $x\in\mathbb{R}$ y*

$$a(\mu,\beta,\phi,\gamma,\delta)=\frac{\left(\gamma^2-\beta^2\right)^{\phi/2}}{\sqrt{2\pi}\gamma^{\phi-1/2}K_\phi\left(\delta\sqrt{\gamma^2-\beta^2}\right)}.$$

De igual manera, la función característica puede ser obtenida vía condicionamiento, esto es, si $X\sim HG(\mu,\beta,\phi,\gamma,\delta)$, entonces para cada $v\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{ivX}\right) &= \int_0^{\infty}\mathbb{E}\left(e^{ivX}\mid W\right)f_W(w;\phi,\gamma,\delta)\,dw\\ &= \int_0^{\infty}e^{i(\mu+\beta w)v-\frac{1}{2}wv^2}f_W(w;\phi,\gamma,\delta)\,dw\\ &= e^{i\mu v}\int_0^{\infty}e^{iw\left(\beta\nu-\frac{1}{2}v^2\right)}f_W(w;\phi,\gamma,\delta)\,dw\\ &= e^{i\mu v}\mathbb{E}\left(e^{iv\left(\beta\nu-\frac{1}{2}v^2\right)W}\right),\end{aligned}$$

por lo que es suficiente calcular la función característica de una v.a. distribuida como una inversa gaussiana generalizada.

**Proposición 2.1.5** *Supongamos que $X\sim HG(\mu,\beta,\phi,\gamma,\delta)$. Entonces*

$$\mathbb{E}\left(e^{ivX}\right)=e^{i\mu v}\left(\frac{\gamma^2-\beta^2}{\gamma^2+(\nu-i\beta)^2}\right)^{\phi/2}\frac{K_\phi\left(\delta\sqrt{\gamma^2+(\nu-i\beta)^2}\right)}{K_\phi\left(\delta\sqrt{\gamma^2-\beta^2}\right)},\qquad v\in\mathbb{R}. \tag{2.1.12}$$

Un hecho de mayor relevancia para el presente trabajo, es la propiedad de divisibilidad infinita que posee la distribución de nuestro interés. Dicho resultado fue probado originalmente en Barndorff-Nielsen y Halgreen (1977) y lo presentamos a continuación.

**Teorema 2.1.2** *Supongamos que $X \sim HG(\mu, \beta, \phi, \gamma, \delta)$. Entonces $X$ es infinitamente divisible con tripleta*

$$a = \mu + \beta \frac{\delta}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}} \frac{K_{\phi+1}\left(\delta\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}\right)}{K_{\phi}\left(\delta\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}\right)}, \tag{2.1.13}$$

*$b = 0$ y la medida de Lévy está dada por*

$$\nu(dx) = \frac{e^{\beta x}}{|x|}\left\{\int_0^\infty \frac{e^{-|x|\sqrt{2y-\gamma^2}}}{\pi^2 y\left[J_{|\phi|}^2\left(\delta\sqrt{2y}\right) + Y_{|\phi|}^2\left(\delta\sqrt{2y}\right)\right]} dy + \max(0, \phi)\, e^{-\gamma|x|}\right\} dx, \tag{2.1.14}$$

*donde $J_q$ y $Y_q$ son funciones del Bessel del primer y segundo tipo de índice $q$, respectivamente. La función centradora que se considera en esta descomposición es la función identidad.*

Gracias a esta caracterización podemos elegir una familia de variables aleatorias con distribución hiperbólica generalizada, las cuales toman el papel de las semillas de una base de Lévy. Podemos proceder de dos maneras, viá función cumulante o vía terna característica.

Consideremos $(L'(r))_{r\in\mathbb{R}^+}$ una colección de variables aleatorias con función cumulante dada para cada $r \in \mathbb{R}^+$ y $v \in \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{C}\left(v\ddagger L'(r)\right) = i\mu(r)v + \log\left\{\left(\frac{\gamma(r)^2 - \beta(r)^2}{\gamma(r)^2 + (\nu - i\beta(r))^2}\right)^{\phi(r)/2} \frac{K_{\phi(r)}\left(\delta(r)\sqrt{\gamma(r)^2 + (\nu - i\beta(r))^2}\right)}{K_{\phi(r)}\left(\delta(r)\sqrt{\gamma(r)^2 - \beta(r)^2}\right)}\right\}.$$

donde $\mu(r), \beta(r), \phi(r), \gamma(r), \delta(r)$, cumplen las restricciones dadas en la Definición 2.1.4 y en (2.1.11), por lo que, por (2.1.12), $L'(r) \sim HG(\mu(r), \beta(r), \phi(r), \gamma(r), \delta(r))$. Supongamos que los mapeos $r \mapsto \mu(r), \beta(r), \phi(r), \gamma(r), \delta(r)$ son medibles, entonces por (2.1.7), la función

$$f_A(\nu) = \int_A i\mu(r)v + \log\left\{\left(\frac{\gamma(r)^2 - \beta(r)^2}{\gamma(r)^2 + (\nu - i\beta(r))^2}\right)^{\phi(r)/2} \frac{K_{\phi(r)}\left(\delta(r)\sqrt{\gamma(r)^2 + (\nu - i\beta(r))^2}\right)}{K_{\phi(r)}\left(\delta(r)\sqrt{\gamma(r)^2 - \beta(r)^2}\right)}\right\} dr,$$

para $v \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$, corresponde al cumulante de una base de Lévy cuya medida de control es la de Lebesgue en $\mathbb{R}^+$.

Por otro lado, sabemos del Teorema 2.1.2 que para cualquier $r \in \mathbb{R}^+$, $L'(r)$ tiene la terna característica

$$a(r) = \mu(r) + \beta(r)\frac{\delta(r)}{\sqrt{\gamma(r)^2 - \beta(r)^2}} \frac{K_{\phi(r)+1}\left(\delta(r)\sqrt{\gamma(r)^2 - \beta(r)^2}\right)}{K_{\phi(r)}\left(\delta(r)\sqrt{\gamma(r)^2 - \beta(r)^2}\right)},$$

$b(r) = 0$ para cada $r \in \mathbb{R}^+$ y

$$\widetilde{\nu}_r(dx) = \frac{e^{\beta(r)x}}{|x|}\left\{\int_0^\infty \frac{e^{-|x|\sqrt{2y-\gamma(r)^2}}}{\pi^2 y\left[J^2_{|\phi(r)|}\left(\delta(r)\sqrt{2y}\right)+Y^2_{|\phi(r)|}\left(\delta(r)\sqrt{2y}\right)\right]}dy + \text{máx}\left(0,\phi(r)\right)e^{-\gamma(r)|x|}\right\}dx.$$

Nuevamente, suponiendo medibilidad en los mapeos $r \mapsto v_r(dx), a(r)$, obtenemos que $(L'(r))_{r\in\mathbb{R}^+}$ induce la base de Lévy con terna característica dada por

$$\begin{aligned}
\nu_0(dr) &= \mu(r) + \beta(r)\frac{\delta(r)}{\sqrt{\gamma(r)^2-\beta(r)^2}}\frac{K_{\phi(r)+1}\left(\delta(r)\sqrt{\gamma(r)^2-\beta(r)^2}\right)}{K_{\phi(r)}\left(\delta(r)\sqrt{\gamma(r)^2-\beta(r)^2}\right)}dr,\\
\nu_{dr}(dx) &= \frac{e^{\beta(r)x}}{|x|}\left\{\int_0^\infty \frac{e^{-|x|\sqrt{2y-\gamma(r)^2}}}{\pi^2 y\left[J^2_{|\phi(r)|}\left(\delta(r)\sqrt{2y}\right)+Y^2_{|\phi(r)|}\left(\delta(r)\sqrt{2y}\right)\right]}dy + \text{máx}\left(0,\phi(r)\right)e^{-\gamma(r)|x|}\right\}dxdr,
\end{aligned}$$

y $\nu_1 \equiv 0$. Observamos además que la descomposición de la medida de Lévy generalizada, puede ser dada de manera explicita por

$$\nu_{dr}(dx) = \widetilde{\nu}_r(dx)\,dr. \tag{2.1.15}$$

**Observación 2.1.2** *Notemos que el proceso natural inducido por la base construida previamente a partir de la relación (2.1.9), es de hecho un proceso aditivo sin parte browniana, es decir, es un proceso de salto puro con intensidad de saltos dada por (2.1.9). Recíprocamente, si consideramos un proceso aditivo $(L_t)_{t\geq 0}$ con ternas dadas para cada $t \geq 0$ por*

$$a_t = \nu_0((0,t]),$$

$b_t \equiv 0$ *y*

$$\widetilde{\nu}_t(dx) = \int_0^t \widetilde{\nu}_r(dx)\,dr.$$

*Entonces por el Teorema 2.1.1, la base de Lévy inducida por dicho proceso es aquella que tiene como semillas a $(L'(r))_{r\in\mathbb{R}^+}$.*

## 2.2. Integración

Con ayuda de los conceptos, resultados e ideas introducidas anteriormente, en esta sección se describe la teoría de integración estocástica con respecto a bases de Lévy. Cabe resaltar que las construcciones presentadas están divididas en dos enfoques de estudio: integración de funciones deterministas e integral de procesos estocásticos en tiempo y espacio con respecto a una medida aleatoria, la cual toma valores en el espacio de martingalas. En la primera se analiza principalmente la existencia de un límite para integrales de funciones simples, dicha existencia está íntimamente relacionado con la tripleta y la medida de control de una base de Lévy. Para el caso de integrandos aleatorios, se expone el concepto de *medidas martingala-valuadas* y el vínculo que existe con una base de Lévy. Se construye además la medida de variación en este caso y se discute sobre la relación que existe entre ésta y la medida de control. Haciendo uso de la medida de variación se dan condiciones para la existencia de la integral estocástica como límite de sumas de Riemann. Es de vital importancia hacer notar que la metodología que se emplea en este caso es la que originalmente introdujo Itô. Se puntualiza además que los resultados que se muestran durante esta sección, fueron presentados originalmente en Rajput y Rosinski (1989) y Walsh (1986), sin embargo pruebas más detalladas y generalizaciones de los resultados que se exponen en esta tesis pueden ser consultadas en Márquez y cols. (2012).

### 2.2.1. A manera de motivación

En esta subsección se da de manera muy corta, una motivación para desarrollar teoría de integración con respecto a medidas aleatorias, siendo particularmente de interés las bases de Lévy.

Se recuerda que una base de Lévy es una medida aleatoria con la propiedad IS, la cual toma valores en el espacio de variables aleatorias infinitamente divisibles. Es conveniente tener en cuenta la relación que aparece entre éstas y los procesos naturales, pues al ser estos procesos semimartingalas resultan ser una buena elección como integradores estocásticos (ver por ejemplo Jacod y Shiryaev (2002)). Debido a esto, se esperaría que la integral con respecto a una base de Lévy pueda ser bien definida, no obstante, una respuesta inmediata no es trivial. Puesto que una base de Lévy en general no es no negativa, la variación de tal medida puede ser infinita para un conjunto de probabilidad positiva, razón por la cual la cantidad

$$\int_A f(r)\, L(dr)(\omega) := \int_A f(r)\, L(\omega, dr), \qquad \omega \in \Omega,\ A \in \sigma(\mathcal{R}),$$

puede no tener sentido para una función medible (posiblemente estocástica).

Al igual que los procesos estocásticos, las medidas aleatorias no necesariamente inducen un proceso de variación finita, por lo que la teoría de integrales del tipo Lebesgue-Stieltjes no son aplicables. Sin embargo, cuando $L$ es una medida aleatoria positiva, la integral de Lebesgue en el sentido usual es viable. Este es el caso de los subordinadores y del proceso de Poisson puntual.

En vista de que las funciones en cuestión son $\sigma$-aditivas, un primer enfoque para resolver el problema puede consistir en el estudio de integrales de funciones simples usando la metodología de Lebesgue para posteriormente tomar límites. Cuando el integrando es aleatorio, la teoría en $\mathcal{L}^2$ que desarrollo Itô puede ser un enfoque que nos permita medir la variabilidad que se obtiene en las sumas de Riemann inducidas por procesos simples, la cual es causada por la medida aleatoria y el proceso simultáneamente. En subsecciones posteriores presentamos ambos enfoques así como la relación que existen entre estos.

## 2.2.2. Integrandos deterministas

El propósito principal de ésta subsección consiste en definir la integral estocástica de una función medible determinista con respecto a una base de Lévy, por lo que en esta parte se estudia la convergencia de integrales estocásticas cuyo integrando es una función simple, siendo de interés la terna característica inducida por este tipo de integrales. La teoría para integrandos más generales es presentada en la siguiente subsección, así como la relación existente entre las teorías. Se recuerda que las pruebas de los resultados que se exponen pueden ser consultadas en Rajput y Rosinski (1989) y Márquez y cols. (2012).

### 2.2.2.1. Aproximando por funciones simples

Recordemos que $L$ es una base de Lévy con medida de control $\lambda$, la cual está definida en el espacio medible $(R, \sigma(\mathcal{R}))$.

**Definición 2.2.1** *Sea $f : R \to \mathbb{R}$ una función simple de la forma*

$$f(r) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{1}_{A_k}(r), \quad r \in R,$$

*donde $x_j$ es un número real y los conjuntos $A_k$'s son disjuntos y pertenecen a $\mathcal{R}$, para $k = 1, \ldots, n$. Dado $A \in \sigma(\mathcal{R})$, se define la integral estocástica de $f$ con respecto a $L$ como*

$$\int_A f(r) L(dr)(\omega) := \sum_{k=1}^{n} x_k L(A \cap A_k)(\omega), \quad \omega \in \Omega. \tag{2.2.1}$$

**Observación 2.2.1** *Es un hecho bien conocido que la suma de variables aleatorias independientes infinitamente divisibles conserva la divisibilidad infinita. Lo anterior, junto con la propiedad IS de $L$, indican que la integral de una función simple es nuevamente infinitamente divisible. Más aún, si la sucesión en (2.2.1) tiene un límite (débil, en probabilidad, en $\mathcal{L}^p$ o casi seguramente), entonces dicho límite es de igual manera infinitamente divisible (ver Sato (1999) para más detalles).*

Al ser $\int_A f(r) L(dr)$ infinitamente divisible, preguntas sobre la forma de su tripleta surgen de manera natural, así como su relación con la terna característica de $L$.

**Proposición 2.2.1** *Sea $f$ una función simple como en la Definición 2.2.1 y sea $\{L'(r), r \in R\}$ las semillas de Lévy asociadas a $L$. Entonces la función cumulante de $\int_A f(r) L(dr)$ está dada por*

$$\mathcal{C}\left(v\ddagger \int_A f(r) L(dr)\right) = \int_A \mathcal{C}(vf(r) \ddagger L'(r)) \lambda(dr), \quad v \in \mathbb{R}, A \in \sigma(\mathcal{R}). \tag{2.2.2}$$

Expandiendo la ecuación (2.2.2), se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\left(v\ddagger \int_A f(r) L(dr)\right) &= iv \int_A f(r) a(r) \lambda(dr) - \frac{1}{2} v^2 \int_A f^2(r) b(r) \lambda(dr) \\ &\quad + \int_A \int_{\mathbb{R}} \left[e^{ivf(r)y} - 1 - ivf(r) \tau(y)\right] v(dr, dy).\end{aligned}$$

Si ponemos $z = yf(r)$, la ecuación anterior toma la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\left(v\ddagger \int_A f(r) L(dr)\right) &= iv \int_A f(r) a(r) \lambda(dr) - \frac{1}{2} v^2 \int_A f^2(r) b(r) \lambda(dr) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \left[e^{ivz} - 1 - iv\tau(z)\right] v_f^A(dz) \\ &\quad + iv \int_A \int_{\mathbb{R}} \left[\tau(yf(r)) - f(r) \tau(y)\right] \rho(r, dy) \lambda(dr),\end{aligned}$$

donde

$$v_f^A(B) = v\{(r, y) \in A \times \mathbb{R} : yf(r) \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{2.2.3}$$

Definiendo

$$a_f^A := \int_A f(r) a(r) \lambda(dr) + \int_A \int_{\mathbb{R}} \left[\tau(yf(r)) - f(r) \tau(y)\right] \rho(r, dy) \lambda(dr), \tag{2.2.4}$$

y

$$b_f^A := \int_A f^2(r) b(r) \lambda(dr), \tag{2.2.5}$$

se ve que $\int_A f(r) L(dr)$ tiene tripleta $\left(a_f^A, b_f^A, v_f^A\right)$, más aún, por la Proposición 2.1.1 el mapeo $A \longmapsto \int_A f(r) L(dr)$ es nuevamente una base de levý con la terna caracteristica previamente expuesta.

Con el fin de construir una teoría de integración estocástica para integrandos más generales, necesitamos obtener condiciones necesarias y suficientes para que la sucesión $\left\{\int_A f_n(r) L(dr)\right\}_{n \geq 1}$ tenga un límite cuando $f_n \to f$. En el caso de que dicho límite exista, podemos definir la integral de $f$ como el límite en cuestión.

#### 2.2.2.2. Integral estocástica de funciones medibles y criterio de integrabilidad

En esta parte se estudia la integrabilidad de funciones medibles con respecto a una base de Lévy. Además se presenta un criterio de integrabilidad que está fuertemente ligado a la tripleta de la base. Para lograrlo, se necesita de la definición de $L$-integrabilidad de una función medible real valuada.

**Definición 2.2.2** *Sea $f : R \to \mathbb{R}$ una función $\sigma(\mathcal{R}) \backslash \mathcal{B}(\mathbb{R})$-medible. Se dice que $f$ es **$L$-integrable** si*

1. *Existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}_{n\geq 1}$,tal que $f_n \to f$, $\lambda$-casi donde sea.*
2. *La sucesión de integrales estocásticas $\left\{\int_A f_n(r) L(dr)\right\}_{n\geq 1}$ asociada a $\{f_n\}_{n\geq 1}$, converge en probabilidad, para cualquier $A \in \sigma(\mathcal{R})$.*

*En tal caso se define la **integral** de $f$ con respecto a $L$ como*

$$\int_A f(r) L(dr) := \mathbb{P} - \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(r) L(dr).$$

Por la observación 2.2.1, si $f$ es $L$-integrable, entonces $\int_A f(r) L(dr)$ es infinitamente divisible, además, la Proposición 2.2.1 y las ecuaciones (2.2.3), (2.2.4) y (2.2.4) permite inferir sobre la forma de su función cumulante y terna característica.

**Proposición 2.2.2** *Si $f$ es $L$-integrable, entonces $\int_A |\mathcal{C}(vf(r) \ddagger L'(r))| \lambda(dr) < \infty$ y*

$$\mathcal{C}\left(v \ddagger \int_A f(r) L(dr)\right) = \int_A \mathcal{C}(vf(r) \ddagger L'(r)) \lambda(dr), \quad v \in \mathbb{R}, A \in \sigma(\mathcal{R}). \tag{2.2.6}$$

**Observación 2.2.2** *Realizando un procedimiento análogo al desarrollado posteriormente a la Observación 2.2.1, se puede concluir que si $f$ es $L$-integrable, entonces el mapeo $A \longmapsto \int_A f(r) L(dr)$ es una base de Lévy con tripleta $\left(a_f^A, b_f^A, v_f^A\right)$, siendo estas cantidades las que fueron definidas en (2.2.3), (2.2.4) y (2.2.5).*

Un objetivo de mayor envergadura (no obstante relacionado con lo presentado anteriormente), consiste en obtener criterios lo suficientemente generales que nos permitan garantizar la $L$-integrabilidad de funciones medibles o, equivalentemente, hipótesis simples y universales que posibiliten la convergencia en probabilidad de la sucesión dada en la Definición 2.2.1. El resultado que se presenta a continuación (y con el cual concluimos esta parte) resuelve dicho problema, pues da condiciones necesarias y suficientes para que una función medible sea $L$-integrable. Dichas condiciones están relacionadas directamente con los elementos de la función cumulante.

**Teorema 2.2.1** *Supongamos que $f : R \to \mathbb{R}$ es una función $\sigma(\mathcal{R}) \backslash \mathcal{B}(\mathbb{R})$-medible. Entonces $f$ es L-integrable si y solamente si:*

1. $\int_R |g(f(r), r)| \lambda(dr) < \infty$;

2. $\int_R f(r)^2 b(r) \lambda(dr) < \infty$;

3. $\int_R \int_{\mathbb{R}} 1 \wedge \|yf(r)\|^2 \rho(r, dy) \lambda(dr) < \infty$.
   *Donde*
$$g(x, r) := xa(r) + \int_{\mathbb{R}} [\tau(yx) - x\tau(y)] \rho(r, dy), \qquad x \in \mathbb{R}, r \in R.$$

**Observación 2.2.3** *Sea $f : R \to \mathbb{R}$ L-integrable y $\{f_n\}_{n \geq 1}$, tal que $f_n \to f$ $\lambda$-casi donde sea. Por la relación (2.1.3) para cada $n \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathcal{R}$*

$$\begin{aligned}\int_A f_n(r) L(dr) &\overset{c.s.}{=} \int_A f_n(r) \nu_0(dr) + \int_A f_n(r) W(dr) \\ &+ \int_A \int_{\{|x|<1\}} f_n(r) x (N - \nu)(dx, dr) + \int_A \int_{\{|x| \geq 1\}} f_n(r) N(dx, dy).\end{aligned}$$

*Dado que $f$ es L-integrable, por el Teorema anterior $\int_R |g(f(r), r)| \lambda(dr) < \infty$, en particular $\int_R |g(f(r), r)| \nu_1(dr) < \infty$, de modo que $f$ es $W$-integrable. De igual manera, gracias a los puntos 2 y 3 del teorema anterior, vemos que las funciones $fx\mathbf{1}_{\{|x|<1\}}$ y $fx\mathbf{1}_{\{|x|\geq 1\}}$ son $N - \nu$ y $N$ integrables respectivamente, por lo que se tiene que*

$$\begin{aligned}\int_A f(r) L(dr) &\overset{c.s.}{=} \int_A f(r) \nu_0(dr) + \int_A f(r) W(dr) + \int_A \int_{\{|x|<1\}} f(r) x (N - \nu)(dx, dr) \\ &+ \int_A \int_{\{|x| \geq 1\}} x f(r) N(dx, dr).\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

*En el caso particular de que $L$ tenga media finita, por (2.1.4)*

$$\int_A f(r) L(dr) \overset{c.s.}{=} \int_A f(r) \nu_0'(dr) + \int_A f(r) W(dr) + \int_A \int_{\mathbb{R}} f(r) x (N - \nu)(dx, dr). \tag{2.2.8}$$

### 2.2.3. Integrandos aleatorios: El caso $\mathcal{L}^2$

Desde el punto de vista de la modelación, integrales estocásticas que incluyan integrandos aleatorios, son una gran herramienta para describir sistemas perturbados por una gran cantidad de ruido, por ejemplo, la volatilidad estocástica en la series de precios así como la intermitencia en fluidos turbulentos. Esto nos motiva a definir la integral con respecto a bases de Lévy para integrandos no deterministas, por lo que en esta sección se expone la teoría concerniente a la integración estocástica con respecto a *medidas martingala-valuadas*, siendo las bases de Lévy un caso particular de éstas. Cabe mencionar que la construcción que se presenta está fuertemente inspirada en la que Itô desarrolló originalmente. Se recuerda que las pruebas de los resultados que se presentan durante esta parte así como generalizaciones, pueden ser consultadas en Márquez y cols. (2012).

#### 2.2.3.1. Medidas martingala-valuadas

El objetivo de esta parte consiste en presentar a las *medidas martingala-valuadas* como procesos en tiempo y espacio que pueden ser considerados como integradores estocásticos. Además se definen los conceptos de $\sigma$-finitud para una clase especial de medidas aleatorias, de igual manera se expone bajo que casos la teoría de *medidas martingala-valuadas* coincide con la de bases de Lévy.

Walsh (1986) introduce una familia de procesos estocásticos indexados simultáneamente por conjuntos y por el tiempo, llamándolos *medidas martingala*. Dichos objetos están directamente relacionados con el *ruido blanco*, pues tales medidas aleatorias son expuestas como una generalización de éste.

Considérese el espacio medible $(R, \mathcal{B}_R)$, donde $R$ es un espacio polaco, es decir, un espacio métrico, completo y separable; la $\sigma$-álgebra $\mathcal{B}_R$ considerada es simplemente la de Borel en $R$.

**Definición 2.2.3** *Sea $M : \Omega \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ una medida aleatoria con signo, la cual está definida en el álgebra $\mathcal{A}$. Se dice que $M$ es* ***$\sigma$-finita*** *si existe una sucesión creciente $\{R_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{B}_R$, tal que $\cup_{n\geq 1} R_n = R$ y además*

1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_R|_{R_n} \subset \mathcal{A}$;*
2. *Dado $n$ natural,*

$$\sup_{A \in \mathcal{B}_R|_{R_n}} \mathbb{E}\left[M^2(A)\right]^{1/2} < \infty. \tag{2.2.9}$$

**Observación 2.2.4** *El adjetivo $\sigma$-finito está inspirado por la definición usual para medidas no aleatorias: Notése que si $M$ es $\sigma$-finita en el sentido de la definición anterior y no aleatoria, entonces existe una sucesión creciente $\{R_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{B}_R$, tal que su unión es el total y además*

$$\sup_{A \in \mathcal{B}_R|_{R_n}} |M(A)| < \infty, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

*de ahí que*

$$|M(R_n)| < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Algo que conviene resaltar, es la diferencia entre los dominios de una medida aleatoria $\sigma$-finita y el de una base de Lévy, por un lado, la primera tiene dominio en un álgebra, mientras que la segunda está definida sobre un $\delta$-anillo. Sin embargo, es posible hacer que el dominio de $M$ sea un $\delta$-anillo mediante un procedimiento de extensión el cual se explica a continuación: Sea $\widetilde{M}$ una medida aleatoria $\sigma$-finita y considérese el conjunto

$$\mathcal{R}^M := \left\{ A \in \mathcal{B}_R : \lim_{n\to\infty} M\left(A \cap R_n\right) \text{ existe en } \mathcal{L}^2 \right\}.$$

Entonces $\mathcal{R}^M$ es un $\delta$-anillo y además $\widetilde{M}$ puede ser extendida a una medida aleatoria $M$ en $\mathcal{R}^M$, mediante la relación

$$M(A) := \mathcal{L}^2\text{-}\lim_{n\to\infty} \widetilde{M}\left(A \cap R_n\right), \quad \forall\ A \in \mathcal{R}^M. \tag{2.2.10}$$

En efecto; es claro que $M$ definida como en (2.2.10) es $\sigma$-aditiva, por lo que basta verificar que $\mathcal{R}^M$ es en realidad un $\delta$-anillo. Gracias a que el límite en $\mathcal{L}^2$ es lineal, se obtiene que tanto $A \cup B$ y $A - B$ pertenecen a $\mathcal{R}^M$ siempre que $A$ y $B$ lo estén. Sea $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{R}^M$, luego por el Lema de Fatou, para cada $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{\left[M\left(\cap_{k\geq 1}A_k \cap R_n\right) - M\left(\cap_{k\geq 1}A_k \cap R_m\right)\right]^2\right\} &= \mathbb{E}\left\{\lim_{k\to\infty}\left[M\left(A_k \cap R_n\right) - M\left(A_k \cap R_m\right)\right]^2\right\} \\ &\leq \liminf_{k\to\infty}\mathbb{E}\left\{\left[M\left(A_k \cap R_n\right) - M\left(A_k \cap R_m\right)\right]^2\right\}.\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Además, en vista de que la sucesión $\{M\left(A_k \cap R_n\right)\}_{n\geq 1}$ converge en $\mathcal{L}^2$, se tiene que para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0(k)$ tal que dados $n, m \geq n_0(k)$, se cumple

$$\mathbb{E}\left\{\left[M\left(A_k \cap R_n\right) - M\left(A_k \cap R_m\right)\right]^2\right\} < \varepsilon. \tag{2.2.12}$$

Las ecuaciones (2.2.11) y (2.2.12) implican que el límite de la sucesión $\{M\left(\cap_{k\geq 1}A_k \cap R_n\right)\}_{n\geq 1}$ existe en $\mathcal{L}^2$, razón por la cual $\cap_{k\geq 1}A_k \in \mathcal{R}^M$, lo cual prueba que $\mathcal{R}^M$ es ciertamente un $\delta$-anillo. Las funciones conjunto obtenidas a través de este tipo de extensión son nombradas en el contexto de Walsh como una **medida $\sigma$-finita $\mathcal{L}^2$-valuada**. Estos objetos son clave en la definición de medidas martingala-valuadas o más generalmente *medidas semimartingala-valuadas*. Ver Márquez y cols. (2012) para más detalles.

Situándonos en el contexto anterior, al dotar a la medida aleatoria de la propiedad IS y permitir que su media sea cero, se puede dar explicitamente la forma de $\mathcal{R}^M$. A continuación se presenta dicho resultado y posteriormente se establece la definición de medida martingala-valuada.

**Proposición 2.2.3** *Sea $M$ una medida $\sigma$-finita $\mathcal{L}^2$-valuada con la propiedad IS y además con media cero (equivalentemente una base de Lévy con valores en $\mathcal{L}^2$ y media cero). Entonces la función conjunto*

$$\mu(A) := \mathbb{E}\left[M(A)^2\right], \quad A \in \mathcal{R}^M,$$

*es una medida en $\mathcal{R}^M$. Más aún, en este caso*

$$\mathcal{R}^M = \mathcal{B}_{\eta_b}, \tag{2.2.13}$$

*donde*

$$\mathcal{B}_{\eta_b} = \{A \in \mathcal{B}_R : \mu(A) < \infty\}.$$

**Demostración.** Para ver que $\mu$ es una medida, es suficiente con probar que es $\sigma$-aditiva. Sea $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{R}^M$ una sucesión disjunta, tal que $\cup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{R}^M$. Por la $\sigma$-aditividad de $M$ y el teorema de convergencia monótona

$$\begin{aligned}
\mu(\cup_{n\geq 1} A_n) &= \mathbb{E}\left[M\left(\cup_{k=1}^n A_n\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left\{\left[\sum_{n=1}^{\infty} M(A_n)\right]^2\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} M(A_k)\right]^2\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left\{\sum_{k=1}^{n} M^2(A_k) + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j\neq k}}^{n} M(A_j)\,M(A_k)\right\}.
\end{aligned}$$

Al poseer $M$ tanto media cero como la propiedad IS,

$$\begin{aligned}
\mu(\cup_{n\geq 1} A_n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[M^2(A_k)\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[M^2(A_n)\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),
\end{aligned}$$

justo lo que se afirmaba.

Ahora bien, sea $A \in \mathcal{B}_{\eta_b}$, entonces $|M(A \cap R_k)| < \infty$ casi seguramente para todo $k \in \mathbb{N}$, de modo que por ser $\eta$ una medida, para cada $n \geq m$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\{[M(A\cap R_n) - M(M\cap R_m)]^2\right\} &= \mathbb{E}\left\{[M(A\cap R_n) - M(A\cap R_m)]^2\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{M(A\cap R_n - A\cap R_m)^2\right\} \\
&= \mu(A\cap R_n - A\cap R_m) \to 0, \quad \text{cuando } n, m \to \infty.
\end{aligned}$$

Recíprocamente, elijamos $B \in \mathcal{R}^M$ arbitrario. En vista de que el límite en $\mathcal{L}^2$ de $\{M(A \cap R_n)\}_{n\geq 1}$ existe, es posble elegir $Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[M(A\cap R_n)^2\right] = \mathbb{E}\left[Y^2\right] < \infty,$$

pero

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[M(A\cap R_n)^2\right] &= \lim_{n\to\infty} \eta(A\cap R_n) \\ &= \eta(A), \end{aligned}$$

razón por la cual $\eta(A) < \infty$, obteniendo así que (2.2.13) es válida. ■

**Observación 2.2.5** *La proposición anterior nos está diciendo que en el caso de una base de Lévy con media cero y $\mathcal{L}^2$-valuada , los dominios entre ésta y una medida $\sigma$-finita $\mathcal{L}^2$-valuada coinciden.*

**Definición 2.2.4** *Sea $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ una filtración que cumple las condiciones usuales para $T > 0$. Se dice que un proceso $(M_t(A))_{0\leq t\leq T, A\in\mathcal{R}^M}$ es una **medida martingala-valuada** si cumple lo siguiente:*

1. *Casi seguramente $M_0(A) = 0$, para cada $A \in \mathcal{R}^M$;*
2. *Para $t > 0$, $M_t(\cdot)$ es una medida $\sigma$-finita $\mathcal{L}^2$-valuada;*
3. *Dado $A \in \mathcal{R}^M$, el proceso $(M_t(A))_{0\leq t\leq T}$ es una martingala càdlàgcon respecto a $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$.*

**Observación 2.2.6** *Es de vital importancia hacer notar que una **medida martingala-valuada,** es para cada $A \in \mathcal{R}^M$ una martingala cuadrado integrable, por lo que la teoría de integración de Itô usual es aplicable en este caso. El problema verdadero surge cuando se requiere integrar en tiempo y espacio, siendo ésta la situación de interés en este trabajo.*

Como bien señala Walsh, las medidas martingala-valuadas, si bien tienen una estructura que nos permite describir comportamientos estocásticos del tipo espacio-temporales, en general no es posible construir una integral estocástica con respecto a ellas. De hecho, él introduce una clase de medidas martingala-valuadas conocidas como *worthy*, sin embargo, existe una subclase de éstas mucho menos restrictivas, las cuales están íntimamente relacionadas al contexto de bases de Lévy.

**Definición 2.2.5** *Sea $(M_t(A))_{0\leq t\leq T, A\in\mathcal{R}}$ una medida martingala-valuada. Se dice que $M$ es **ortogonal** si para cada par $A, B \in \mathcal{R}^M$, los procesos $(M_t(A))_{0\leq t\leq T}$ y $(M_t(B))_{0\leq t\leq T}$ son independientes, siempre que $A \cap B = \emptyset$. Equivalentemente, $M$ es ortogonal si el proceso $(M_t(A)\, M_t(B))_{0\leq t\leq T}$ es una martingala, para $A \cap B = \emptyset$.*

**Observación 2.2.7** *Observe que si* $(M_t(A))_{0\le t\le T, A\in\mathcal{R}}$ *es ortogonal, el mapeo* $A \mapsto \mathbb{E}\left[M_t^2(A)\right]$ *define una medida en* $\mathcal{R}^M$ *para cualquier* $0 \le t \le T$. *Para ver esto es suficiente notar que si* $A, B \in \mathcal{R}^M$ *con* $A \cap B = \emptyset$

$$\mathbb{E}\left[M_t(A)\, M_t(B)\right] = 0,$$

*esto indica que la prueba de la Proposición 2.2.3 puede ser aplicada en este caso.*

**Proposición 2.2.4** *Sea* $M : \Omega \times \mathcal{R} \oplus \mathcal{B}([0,T]) \to \mathbb{R}$ *una medida* $\sigma$*-finita* $\mathcal{L}^2$*-valuada con la propiedad IS y además con media cero (equivalentemente una base de Lévy con valores en* $\mathcal{L}^2$ *y media cero), donde* $\mathcal{R} \oplus \mathcal{B}([0,T])$ *denota el* $\delta$*-anillo generado por los rectángulos de* $\mathcal{R}$ *y* $\mathcal{B}([0,T])$ *la* $\sigma$*-álgebra de Borel en* $[0,T]$. *Entonces el proceso*

$$M_t(A) := M\left((0,t] \times A\right), \qquad A \in \mathcal{R},\ 0 \le t \le T, \tag{2.2.14}$$

*es una medida martingala-valuada ortogonal.*

La prueba de éste resultado es una consecuencia inmediata de la propiedad IS y la Proposición 2.1.3. Concluimos esta parte mostrando al ruido blanco como un ejemplo de una base de Lévy que ésta incluida en la teoría que se expuso previamente.

**Ejemplo 2.2.1** *Un ejemplo de una base de Lévy que cumple los supuestos de la proposición anterior es el ruido blanco. Sea* $\sigma$ *una medida* $\sigma$*-finita sobre un espacio medible* $(E, \mathcal{E})$, *donde* $E$ *es un espacio Euclidiano. Consideremos el conjunto*

$$\mathcal{E}_b := \left\{A \in \mathcal{E} : \sigma(A) < \infty\right\}.$$

*Un* ***ruido blanco*** *es una función conjunto* $W : \Omega \times \mathcal{E}_b \to \mathbb{R}$ *la cual es medible, finitamente aditiva, posee la propiedad IS y es tal que para cualquier* $A \in \mathcal{E}_b$, $W(A) \sim \mathcal{N}(0, \sigma(A))$.
*Gracias a la Proposición 2.2.3,* $\mathcal{E}_b = \mathcal{R}^W$, *además si* $\{A_n\}_{n\ge1} \in \mathcal{R}^W$, *es tal que* $A_n \downarrow \emptyset$, *entonces* $\sigma(A_n) \longrightarrow 0$, *de modo que* $W(A_n) \xrightarrow{\mathcal{L}^2} 0$ *y consecuentemente* $W(A_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
*Lo anterior, junto con la aditividad finita y la propiedad IS, nos garantiza que* $W$ *es* $\sigma$*-aditiva. En efecto, sea* $\varepsilon > 0$ *y* $\{B_n\}_{n\ge1} \subset \mathcal{R}^W$ *una sucesión disjunta, entonces por lo discutido anteriormente*

$$\mathbb{P}\left(\left|W\left(\cup_{k\ge1} B_k\right) - \sum_{j=1}^{n} W(B_j)\right| \ge \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|W\left(\cup_{k\ge n+1} B_k\right)\right| \ge \varepsilon\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

*es decir, la serie* $\sum_{j=1}^{n} W(B_j)$ *converge en probabilidad a* $W(\cup_{k\ge1} B_k)$, *pero al ser una serie de variables aleatorias independientes, la convergencia en probabilidad es equivalente a la convergencia casi segura, obteniendo así lo deseado. De hecho, en general, si* $M$ *es una función conjunto que toma valores en* $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *y que en adición es finitamente aditiva, entonces* $M$ *es* $\sigma$*-aditiva si y sólo si para cualquier sucesión* $A_n \downarrow \emptyset$, $M(A_n) \xrightarrow{\mathcal{L}^2} 0$.

*Por todo lo anterior, se concluye que $W$ es una base de Lévy y además el proceso inducido por ésta mediante la relación (2.2.14), es una medida martingala-valuada ortogonal.*

#### 2.2.3.2. La medida de variación de una medida martingala-valuada

En el contexto usual de integración estocástica de Itô el proceso corchete, y más generalmente el proceso de variación cuadrática, pueden ser considerados como una medida de variación del proceso es cuestión. Su análogo natural en medidas aleatorias sería una medida del mismo tipo que capte la variabilidad estocástica de la primera. Por lo que en esta parte se construye la medida de variación para medidas martingala-valuada que son ortogonales.

Sea $(M_t(A))_{0\leq t\leq T, A\in\mathcal{R}^M}$ una medida martingala-valuada ortogonal. Considérese además a $\mathcal{A}_{\mathcal{R}^M}$ el álgebra compuesta por la unión finita de elementos de $\mathcal{R}^M$. Recuerde que cualquier elemento de $\mathcal{A}_{\mathcal{R}^M}$ puede ser escrito como unión disjunta de conjuntos qe pertenecen $\mathcal{R}^M$. Supongamos que $B\in\mathcal{A}_{\mathcal{R}^M}$ puede ser representado como

$$B=\bigcup_{j=1}^{n} B_j, \tag{2.2.15}$$

donde $\{B_j, j=1,\ldots,n\}\subset\mathcal{R}^M$ es una colleción disjunta. En este caso definimos

$$\widehat{Q}_t(B):=\sum_{j=1}^{n}\langle M(B_j)\rangle_t\,.$$

Observe que $\widehat{Q}_t$ está bien definida. Veamos que $\widehat{Q}_t$ es una medida en $\mathcal{A}_{\mathcal{R}^M}$. Es claro que $\widehat{Q}_t$ es finitamente aditiva, vale cero en $\emptyset$ y es $\sigma$-finita (pues $M$ lo es), por lo que resta verificar que $\widehat{Q}_t$ es contablemente aditiva. En virtud del Ejemplo 2.2.1, es suficiente con verificar que para cada sucesión $\{A_n\}_{n\geq 1}\subset\mathcal{A}_{\mathcal{R}^M}$ tal que $A_n\downarrow\emptyset$, se tiene que $\widehat{Q}_t(A_n)\xrightarrow{\mathbb{P}}0$. Supongamos pues que

$$A_n=\bigcup_{j=1}^{m} A_j^n, \qquad n\in\mathbb{N},$$

con $\{A_1^n,\ldots,A_m^n\}\subset\mathcal{R}^M$ una colección disjunta, de modo que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\widehat{Q}_t(A_n)\right] &= \sum_{j=1}^{m}\mathbb{E}\left[\left\langle M\left(A_j^n\right)\right\rangle_t\right]\\ &= \sum_{j=1}^{m}\mathbb{E}\left[M_t^2\left(A_j^n\right)\right].\end{aligned}$$

donde en la última ecuación se usó la isometría de Itô. Por la Observación 2.2.7, la aplicación $B \longmapsto \mathbb{E}\left[M_t^2(B)\right]$ define una medida en $\mathcal{R}^M$, de ahí que

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbb{E}\left[M_t^2\left(A_j^n\right)\right] = \mathbb{E}\left[M_t^2\left(A_n\right)\right] \to 0, \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Consecuentemente, $\widehat{Q}_t(A_n) \to 0$ en probabilidad. Lo anterior permite extender a $\widehat{Q}_t$ a una única medida $\sigma$-finita $\overline{Q}_t$ en $\sigma\left(\mathcal{R}^M\right)$ tal que

1. Para cada $A \in \mathcal{R}$, el proceso $\left(\widehat{Q}_t(A), 0 \leq t \leq T\right)$ es càdlàg y predecible;
2. Almost surely
$$\overline{Q}_t(A) = \langle M(A) \rangle_t, \quad A \in \mathcal{R}^M.$$

Ahora bien, en vista de que para cualquier $A \in \mathcal{R}^M$, el mapeo $t \longmapsto \overline{Q}_t(A)$ es càdlàg y creciente, es posible construir sobre $\mathcal{B}([0,T])$ a $\widetilde{Q}(\cdot, A)$, la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada, que en adición cumple que

$$\widetilde{Q}((0,t], A) = \overline{Q}_t(A).$$

Todo lo anterior indica que $\widetilde{Q}$ puede ser extendida a una medida $Q^M$, la cual es $\sigma$-finita (en el sentido usual) y está definida sobre $\left(\mathcal{R}^M \times [0,T], \sigma\left(\mathcal{R}^M\right) \otimes \mathcal{B}([0,T])\right)$ tal que

$$Q^M(A \times (s,t]) = \langle M(A) \rangle_t - \langle M(A) \rangle_s, \quad A \in \mathcal{R}^M, 0 \leq t \leq s \leq T, \tag{2.2.16}$$

más aún, notése que para cualquier función medible $f : \Omega \times R \times [0,T] \to \mathbb{R}$, $A \in \sigma\left(\mathcal{R}^M\right)$ y $B \in \mathcal{B}([0,T])$, esposible definir la integral

$$\int_{A \times B} f_s(r)\, Q^M(dr, ds)(\omega) := \int_{A \times B} f_s(r)(\omega)\, Q^M(\omega, dr, ds), \quad \text{para casi toda } \omega.$$

Llamaremos a $Q^M$ el **compensador** o la **medida de variación** de $(M_t(A))_{0 \leq t \leq T, A \in \mathcal{R}^M}$.

**Proposición 2.2.5** *La medida aleatoria $Q^M$ goza de las siguiente propiedades*

1. *El proceso*
$$X_t := Q^M(A \times (0,t]), \quad t \leq T,$$
*es predecible y de variación finita.*
2. *Dado $\{R_n\}_{n \geq 1}$ como en la Definición 2.2.3,*
$$\mathbb{E}\left[Q^M(R_n \times (0,T])\right] < \infty.$$

*3. En particular, si $L$ es una base de Lévy $\mathcal{L}^2$-valuada con media cero, entonces*

$$Q(B) = \int_B \left[ b(r,s) + \int_{\mathbb{R}} x^2 \rho(dx, r, s) \right] \lambda(ds, dr), \qquad B \in \sigma(\mathcal{R}) \otimes \mathcal{B}([0,T]), \tag{2.2.17}$$

*donde $\lambda$ es su medida de control, $b = \frac{d\nu_1}{d\lambda}$ y $\rho$ como en la Proposición 2.1.2. Más aún, en este caso $\lambda \approx Q$.*

**Demostración.** Tanto 1 como 2 son obvios. Sea $L$ es una base de Lévy $\mathcal{L}^2$-valuada con media cero, gracias a (2.1.4)

$$\begin{aligned} Q(A \times (s,t]) &= \nu_1(A \times (s,t]) + \int_s^t \int_A \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu(dx, dr, ds) \\ &= \int_s^t \int_A \left[ b(r,s) + \int_{\mathbb{R}} x^2 \rho(dx, r, s) \right] \lambda(ds, dr). \end{aligned}$$

Si $B \in \mathcal{A}$, $B$ puede ser escrito como en (2.2.15), de modo que al aplicar lo anterior se ve fácilmente que (2.2.17) se mantiene para los elementos de $\mathcal{A}$. La relación (2.2.17) para $B$ general se obtiene al aplicar el Lema de Dynkin, en este sentodp tal correspondencia prueba que $Q \ll \lambda$. Veamos ahora que $\lambda \ll Q$, para esto supongamos que $Q(B) = 0$; nuevamente por (2.2.17)

$$\nu_1(B) = \int_B \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu(dx, dr, ds) = 0,$$

pero en vista de que $L$ tiene media cero,

$$\lambda(ds, dr) = \nu_1(dr, ds) + \int_{\mathbb{R}} 1 \wedge |x|^2 \nu(dx, dr, ds),$$

de ahí que

$$\begin{aligned} \lambda(B) &= \int_B \int_{\mathbb{R}} 1 \wedge |x|^2 \nu(dx, dr, ds) \\ &\leq \int_B \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu(dx, dr, ds) = 0, \end{aligned}$$

justo lo que se deseaba. ∎

Una medida martingala-valuada que disfruta de las propiedades anteriores junto con la positividad, es llamada por Walsh **medidas worthy**. La medida $Q^M$ juega un papel importante en la construcción de la integral estocástica con respecto a las medidas aleatorias que presentamos previamente, de hecho su función es análoga a la del proceso corchete, pues nos permite crear un espacio de Hilbert y garantizar la existencia de la integral estocástica mediante un argumento de densidad. Este procedimiento es analizado con más detalle en la siguiente parte.

#### 2.2.3.3. La integral estocástica

En lo que resta del capitulo nos enfocaremos en la construcción de una integral estocástica con respecto a una medida martingala-valuada la cual es ortogonal y cuyos integrandos son procesos estocásticos que depende de dos índices, los cuales pueden ser interpretados como tiempo y espacio. La teoría que se expone es únicamente para el caso $\mathcal{L}^2$, sin embargo Márquez y cols. (2012) se puede encontrar una generalización para el caso de *medidas semimartingala-valuadas*. El enfoque que se muestra no es sino el que originalmente siguió Itô: Metrizar el espacio de procesos predecibles indexados por tiempo y espacio con el fin de convertirlo en uno completo y finalmente usar un argumento de densidad para garantizar que las sumas de Riemann converjan en $\mathcal{L}^2$.

Nos referiremos a funciones $\sigma : \Omega \times R \times [0,T] \to \mathbb{R}$ como *campos aleatorios o estocásticos*, si para cada $r \in R, 0 \leq s \leq T$, $\sigma_r(s)$ es $\mathcal{F}$-medible.

**Definición 2.2.6** *Se dice que un campo aleatorio* $\sigma = (\sigma_t(r))_{0\leq t\leq T, r\in R}$ *es* ***elemental*** *si es de la forma*

$$\sigma_t(r) = X\mathbf{1}_{(a,b]}(t)\,\mathbf{1}_A(r), \qquad 0 \leq t \leq T, r \in R,$$

*donde* $0 \leq a < b \leq T$, $A \in \sigma(\mathcal{R})$ *y* $X$ *es acotada y* $\mathcal{F}_a$*-medible. En este sentido,* $\sigma$ *es llamado un campo* ***simple*** *si es una combinación lineal de campos elementales.*

Definamos

$$\mathcal{T} = \{\sigma : \sigma \text{ es un campo simple}\},$$

es decir, el conjunto conformado por todos los campos simples.

**Definición 2.2.7** *Sean* $(M_t(A))_{0\leq t\leq T, A\in\mathcal{R}^M}$ *una medida martingala-valuada ortogonal y* $\sigma \in \mathcal{T}$ *con representación*

$$\sigma_t(r) = \sum_{j=1}^{n} X_j \mathbf{1}_{(a_j,b_j]}(t)\,\mathbf{1}_{A_j}(r), \qquad 0 \leq t \leq T, r \in R,$$

*donde* $X_j$, $a_j$, $b_j$ *y* $A_j$ *cumplen los requerimientos dados en la Definición 2.2.6. Se define y se denota la* ***integral*** *de* $\sigma$ *con respecto* $M$ *como*

$$\begin{aligned} \sigma \diamond M_t(A) \ &:= \int_0^t \int_A \sigma_s(r)\, M(dr, ds) \\ &:= \sum_{j=1}^{n} X_j \left[M_{t\wedge b}(A_j \cap A) - M_{t\wedge a}(A_j \cap A)\right], \qquad 0 \leq t \leq T, A \in \sigma(\mathcal{R}) \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Es claro que por ser el espacio de medidas martingala-valuadas lineal, el proceso $\{\sigma \diamond M_t(A)\}_{0\leq t\leq T, A\in\mathcal{R}^M}$ es del mismo tipo. Veamos ahora la forma del compensador de $\sigma \diamond M$;

por la biaditividad del proceso corchete

$$\begin{aligned} Q^{\sigma\diamond M}(A\times(0,t]) &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} X_j\left[M_{\cdot\wedge b}(A_j\cap A)-M_{\cdot\wedge a}(A_j\cap A)\right]\right\rangle_t \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_jX_k\left\{\langle M_{\cdot\wedge b}(A_j\cap A)-M_{\cdot\wedge a}(A_j\cap A)\right. \\ &\quad \left., M_{\cdot\wedge b}(A_k\cap A)-M_{\cdot\wedge a}(A_K\cap A)\rangle_t\right\}, \quad 0\le t\le T, A\in\sigma(\mathcal{R}). \end{aligned}$$

En vista de que podemos elegir los $A_j$'s disjuntos, la ecuación anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned} Q^{\sigma\diamond M}(A\times(0,t]) &= \sum_{k=1}^{n} X_j^2\langle M_{\cdot\wedge b}(A_j\cap A)-M_{\cdot\wedge a}(A_j\cap A)\rangle_t \\ &= \int_0^t\int_A \sigma_s^2(r)\,Q^M(dr,ds), \quad 0\le t\le T, A\in\sigma(\mathcal{R}). \end{aligned}$$

Debido a la ecuación (2.2.16), podemos aplicar el Lema de Dynkin sólo a los conjuntos de la forma $A\times(s,t]$, con el fin de obtener que

$$Q^{\sigma\diamond M}(dr,ds)=\sigma_s^2(r)\,Q^M(dr,ds), \quad c.s., \tag{2.2.19}$$

y en consecuentemente

$$\mathbb{E}\left[\sigma\diamond M_t(A)^2\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^t\int_A \sigma_s^2(r)\,Q^M(dr,ds)\right], \quad 0\le t\le T, A\in\sigma(\mathcal{R}), \tag{2.2.20}$$

es decir, la isometría de Itô en este caso se mantiene.

**Observación 2.2.8** *De igual manera que en la teoría con integrandos no aleatorios, el problema principal consiste en garantizar la convergencia de las sumas de Riemann dadas por (2.2.18) para integrandos lo suficientemente generales, es decir, si* $\sigma$ *es un campo aleatorio y* $\{\sigma_n\}_{n\ge1}$ *es una sucesión de campos simples tales que* $\sigma_n\to\sigma$, *¿Bajo que condiciones, la sucesión de medidas martingala-valuadas* $\{\sigma_n\diamond M_t(A)\}_{0\le t\le T, A\in\mathcal{R}}$ *tiene un límite?.*

**Definición 2.2.8** *Se denotará por* $\mathcal{P}$ *la* $\sigma$*-álgebra generada por* $\mathcal{T}$ *y a la cual llamaremos* ***$\sigma$-álgebra progresiva****. En este contexto, un campo estocástico* $\sigma=(\sigma_t(r))_{0\le t\le T, r\in R}$ *es* ***predecible****, si es* $\mathcal{P}$*-medible.*

Es crucial notar que el espacio

$$\mathcal{MMV}_M := \mathcal{L}^2\left(\Omega\times R\times[0,T], \mathcal{P}, Q^M(\omega,dr,ds)\times d\mathbb{P}(\omega)\right),$$

es de Hilbert con producto interior dado por

$$(f,g)_{\mathcal{MMV}_M} := \mathbb{E}\left(\int_{R\times[0,T]} f_s(r)\, g_s(r)\, Q^M(dr,ds)\right),$$

donde $f$ y $g$ son campos predecibles. La norma inducida es simplemente

$$\|f\|_{\mathcal{MMV}_M} = (f,f)^{1/2}_{\mathcal{MMV}_M}.$$

De hecho, podemos decir más:

**Lema 2.2.1** *El conjunto $\mathcal{T}$ es denso en $\mathcal{MMV}_M$.*

Ahora bien, por la ecuación (2.2.20) para cualquier $\sigma \in \mathcal{T}$

$$\mathbb{E}\left[\sigma \diamond M_T(R)^2\right] = \|\sigma\|^2_{\mathcal{MMV}_M},$$

obteniendo así

$$\mathbb{E}\left[\sigma \diamond M_t(A)^2\right] \leq \|\sigma\|^2_{\mathcal{MMV}_M}, \quad 0 \leq t \leq T, A \in \sigma(\mathcal{R}). \tag{2.2.21}$$

El lema anterior nos permite elegir para cada $\sigma \in \mathcal{MMV}_M$, una colección $\{\sigma_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{T}$, tal que $\sigma_n \to \sigma$ bajo $\|\cdot\|_{\mathcal{MMV}_M}$. Usando esto y la ecuación anterior, se puede ver que para cada $n,m \in \mathbb{N}$, $0 \leq t \leq T$ y $A \in \sigma(\mathcal{R})$

$$\mathbb{E}\left\{\left[\sigma_n \diamond M_t(A) - \sigma_m \diamond M_t(A)\right]^2\right\} \leq \|\sigma_n - \sigma_m\|^2_{\mathcal{MMV}_M} \to 0, \quad \text{cuando } n,m \to \infty.$$

Esto indica que la sucesión $\{\sigma_n \diamond M_t(A)\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy en $\mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, de ahí que existe un elemento en dicho espacio, al cual vamos a denotar por $\sigma \diamond M_t(A)$, tal que $\sigma_n \diamond M_t(A) \xrightarrow{\mathcal{L}^2} \sigma \diamond M_t(A)$. Como es de esperarse, el proceso$\{\sigma \diamond M_t(A)\}_{0\leq t\leq T, A\in\mathcal{R}}$ construido de ésta manera es la **integral estocástica en tiempo y espacio** de $\sigma$ con respecto a $M$.

**Teorema 2.2.2** *El mapeo $\sigma \longmapsto \sigma \diamond M$ es una contracción lineal de $\mathcal{MMV}_M$ en $\mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Además, $\sigma \diamond M$ es una medida martingala-valuada ortogonal cuyo compensador está dado por (2.2.19).*

**Demostración.** La relación (2.2.21) muestra trivialmente que el mapeo en cuestión es una contracción, la linealidad del mapeo es una consecuencia de la misma linealidad del límite en $\mathcal{L}^2$. Ahora bien, considérese $\sigma \in \mathcal{MMV}_M$ y $\{\sigma_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{T}$, tal que $\sigma_n \to \sigma$ bajo $\|\cdot\|_{\mathcal{MMV}_M}$, por lo discutido anteriormente, $\{\sigma_n \diamond M_t(A)\}_{0\leq t\leq T, A\in\mathcal{R}}$ es una medida martingala-valuada. Fijemos $A \in \mathcal{R}$ y verifiquemos que $\{\sigma \diamond M_t(A)\}_{0\leq t\leq T}$ es una martingala. Para lograr esto, vamos a probar que $\{\sigma_n \diamond M_t(A)\}_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}^2} \mathbb{E}\left[\sigma \diamond M_T(A)\,|\mathcal{F}_t\right]$ para cada $t \geq 0$, pues en tal caso

$$\sigma \diamond M_t(A) = \mathbb{E}\left[\sigma \diamond M_T(A)\,|\mathcal{F}_t\right].$$

por unicidad del límite, concluyendo de esto que $\sigma_n \diamond M_{\cdot}(A)$ es una martingala. Con la ayuda del hecho de que $\{\sigma_n \diamond M_t(A)\}_{0\leq t\leq T}$ es una martingala cuadrado integrable y la desigualdad de Jensen, vemos que cuando $n \to \infty$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(\sigma_n \diamond M_t(A) - \mathbb{E}[\sigma \diamond M_T(A)|\mathcal{F}_t])^2\right] &= \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[\sigma_n \diamond M_T(A)|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[\sigma \diamond M_T(A)|\mathcal{F}_t])^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[\sigma_n \diamond M_T(A) - \sigma \diamond M_T(A)|\mathcal{F}_t])^2\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[(\sigma_n \diamond M_T(A) - \sigma \diamond M_T(A))^2\right] \to 0 \qquad (2.2.22)
\end{aligned}$$

justo lo que se quería probar.

Ahora bien, si $A, B \in \mathcal{R}$ y $A\cap B = \emptyset$, debido a que $\sigma_n \diamond M$ es una medida martingala-valuada, para cada $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\sigma \diamond M_t(A\cup B) &= \mathcal{L}^2\text{-}\lim_n \sigma_n \diamond M_t(A\cup B) \\
&= \mathcal{L}^2\text{-}\lim_n [\sigma_n \diamond M_t(A) + \sigma_n \diamond M_t(B)] \\
&= \sigma \diamond M_t(A) + \sigma \diamond M_t(B),
\end{aligned}$$

en otras palabras $\sigma \diamond M_t(\cdot)$ es aditiva. Haciendo uso de lo anterior y suponiendo que (2.2.19) es cierta, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\langle \sigma \diamond M_{\cdot}(A), \sigma \diamond M_{\cdot}(B)\rangle_t &= \frac{1}{2}\{\langle \sigma \diamond M_{\cdot}(A) + \sigma \diamond M_{\cdot}(B)\rangle_t - \langle \sigma \diamond M_{\cdot}(A)\rangle_t - \langle \sigma \diamond M_{\cdot}(B)\rangle_t\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\langle \sigma \diamond M_{\cdot}(A\cup B)\rangle_t - \int_0^t \int_A \sigma_s^2(r)\, Q^M(dr, ds)\right. \\
&\quad \left. - \int_0^t \int_B \sigma_s^2(r)\, Q^M(dr, ds)\right\} = 0, \quad c.s.,
\end{aligned}$$

así pues $\sigma \diamond M_{\cdot}(A)\, \sigma \diamond M_{\cdot}(B)$ es una martingala, razón por la cual $\sigma \diamond M$ es ortogonal. Para constatar que $\sigma \diamond M$ es realmente una medida martingala-valuada ortogonal, hace faltar verificar que $\sigma \diamond M_t(\cdot)$ es $\sigma$-aditiva. Gracias al Ejemplo (2.2.1), es suficiente con probar que si $A_n \downarrow \emptyset$, entonces $\sigma \diamond M_t(A_n) \xrightarrow{\mathcal{L}^2} 0$. Teniendo en cuenta (2.2.20) y el Teorema de Convergencia Monótona

$$\mathbb{E}\left(\sigma \diamond M_t(A_n)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \int_{A_n} \sigma_s^2(r)\, Q^M(dr, ds)\right) \to 0, \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

precisamente lo que se buscaba.

Para finalizar la prueba se tiene que constatar que (2.2.19) es válida en este caso, para ello se demuestra que para cada $A \in \mathcal{R}$ y $t \geq 0$

$$\sigma_n^2 \diamond M_t(A) - \int_0^t \int_A \sigma_n^2(s, r)\, Q^M(dr, ds) \xrightarrow{\mathcal{L}^1} \sigma^2 \diamond M_t(A) - \int_0^t \int_A \sigma_s^2(r)\, Q^M(dr, ds), \quad (2.2.23)$$

de donde se conluye. Notése primero que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t\int_A\left(\sigma_n^2(s,r)-\sigma_s^2(r)\right)Q^M(dr,ds)\right|\right] &\leq \mathbb{E}\left[\left|\int_0^T\int_R\left(\sigma_n^2(s,r)-\sigma_s^2(r)\right)Q^M(dr,ds)\right|\right]\\ &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^T\int_R|\sigma_n(s,r)|\,|\sigma_n(s,r)-\sigma_s(r)|\,Q^M(dr,ds)\right]\\ &\quad+\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_R|\sigma(s,r)|\,|\sigma_n(s,r)-\sigma_s(r)|\,Q^M(dr,ds)\right],\end{aligned}$$

pero por la desigualdad de Schwartz

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_R|\sigma_n(s,r)|\,|\sigma_n(s,r)-\sigma_s(r)|\,Q^M(dr,ds)\right] &= \left(|\sigma_n|,|\sigma_n-\sigma|\right)_{\mathcal{MMV}_M}\\ &\leq \|\sigma_n\|_{\mathcal{MMV}_M}\|\sigma_n-\sigma\|_{\mathcal{MMV}_M},\end{aligned}$$

y de igual manera

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_R|\sigma(s,r)|\,|\sigma_n(s,r)-\sigma_s(r)|\,Q^M(dr,ds)\right]\leq\|\sigma\|_{\mathcal{MMV}_M}\|\sigma_n-\sigma\|_{\mathcal{MMV}_M},$$

de modo que cuando $n\to\infty$

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t\int_A\left(\sigma_n^2(s,r)-\sigma_s^2(r)\right)Q^M(dr,ds)\right|\right]\leq\left(\|\sigma_n\|_{\mathcal{MMV}_M}+\|\sigma\|_{\mathcal{MMV}_M}\right)\|\sigma_n-\sigma\|_{\mathcal{MMV}_M}\to 0,$$

garantizando así que (2.2.23) es en efecto cierta. Un argumento análogo a (2.2.22) permite concluir que el proceso $\sigma^2\diamond M_t(A)-\int_0^t\int_A\sigma_s^2(r)\,Q^M(dr,ds)$ es una martingala, de ahí que c.s.

$$\begin{aligned}Q^{\sigma\diamond M}(A\times(0,t]) &= \left\langle\sigma^2\diamond M_\cdot(A)\right\rangle_t\\ &= \int_0^t\int_A\sigma_s^2(r)\,Q^M(dr,ds).\end{aligned}$$

Una simple aplicación del Lema de Dynkin, concluye la prueba. ■

**Observación 2.2.9** *Veamos que la integrabilidad en el sentido de Walsh implica integrabilidad en el sentido de Rajput y Rosinski. Sean $L$ una base de Lévy $\mathcal{L}^2$-valuada con media cero y $f\in\mathcal{MMV}_L$. Sabemos que $f\longmapsto f\diamond M$ es una contracción lineal de $\mathcal{MMV}_L$ en $\mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, por lo que si $\{f_n\}_{n\geq1}\subset\mathcal{T}$ es tal que $f_n\longrightarrow f$ bajo $\|\cdot\|_{\mathcal{MMV}_M}$, entonces*

$$\int_0^T\int_R|f_n(s,r)-f_m(r,s)|^2\,Q^L(dr,ds)\xrightarrow{\mathbb{P}}0,\qquad\textit{cuando } n,m\to\infty,$$

*de modo que*

$$\int_0^T \int_R |f_n(s,r) - f_m(r,s)| L(dr,ds) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \qquad \textit{cuando } n,m \to \infty,$$

*por lo que existe una subsucesión* $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1} \subset \{f_n\}_{n\geq 1}$*, tal que la convergencia anterior se da casi seguramente. Sea* $\widetilde{\Omega}$ *el conjunto de probabilidad* 1 *donde la convergencia anterior se da, luego para cada* $\omega \in \widetilde{\Omega}$

$$\int_0^T \int_R |f_{n_k}(\omega,s,r) - f(\omega,r,s)|^2 Q^L(\omega,dr,ds) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

*de modo que* $f_{n_k}(s,r) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f_s(r)$ $Q^L$*-casi donde sea, pero por la Proposición 2.2.5* $f_{n_k}(\omega,s,r)$ *converge a* $f(\omega,r,s)$ $\lambda$*-casi donde sea, de modo que casi seguramente* $f$ *es* $L$*-integrable en el sentido de Rajput y Rosinski. Lo anterior junto con el Teorema 2.2.1 nos permite garantizar que casi seguramente*

1. $\int_{R\times[0,T]} \int_{\mathbb{R}} \left| a(r,s) f(s,r) + \int_{\mathbb{R}} \tau(xf(s,r)) - f(s,r)\tau(x)\rho(s,r,dx) \right| \lambda(dr,ds) < \infty;$

2. $\int_{R\times[0,T]} f^2(s,r) b(r) \lambda(dr) < \infty;$

3. $\int_{R\times[0,T]} \int_{\mathbb{R}} 1 \wedge \|yf(s,r)\|^2 \rho(r,s,dy)\lambda(dr,ds) < \infty.$

**Observación 2.2.10** *Obsérvese que para el espacio* $\Omega \times R \times \mathbb{R}$*,* $Q^M$ *puede ser construida de igual manera que en (2.2.16), garantizando por supuesto que* $(M_t(A))_{t\in\mathbb{R}}$ *sea una martingala acotada en* $\mathcal{L}^2$ *con respecto a una filtración* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$*, la cual cumple las condiciones habituales. De hecho podemos debilitar está condición (ver el trabajo de Basse-O'Connor, Graversen y Pedersen (2010)) suponiendo que* $(M_t(A))_{t\in\mathbb{R}}$ *es una* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$*-**incremento martingala** la cual está acotada en* $\mathcal{L}^2$*, esto es, para cada* $s \in \mathbb{R}$ *el proceso* $(M_t(A) - M_{t\wedge s}(A))_{t\in\mathbb{R}}$ *es una* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$*-martingala. Así pues, al considerar el espacio de Hilbert* $\mathcal{L}^2\left(\Omega \times R \times \mathbb{R}, \mathcal{P}, Q^M(\omega,dr,ds) \times d\mathbb{P}(\omega)\right)$*, la consecuencia del Lema 2.2.1 se mantiene al igual que lo desarrollado posteriormente, incluida la integral estocástica.*

Finalizamos la sección con una propuesta (propia del presente trabajo de tesis) al problema relacionado a la teoría de integración con respecto a bases de Lévy homogéneas. Sea $L$ una base de Lévy homogénea en $R \times \mathbb{R}$ con terna característica $(a, b, \eta \times leb)$. Es claro que en éste caso, para cualquier $A \in \sigma(A)$ y $t \in \mathbb{R}$, los conjuntos de la forma $A \times (-\infty, t]$ no pertenecen a $\mathcal{R}^L$, pues al ser la medida de control la de Lebesgue, el conjunto expuesto previamente tiene medida infinita. Esto impide la aplicación directa de la teoría de Walsh, pues el proceso corchete de $(L(A \times (-\infty,t]))_{t\in\mathbb{R}}$ no existe. Para abordar dicho problema haremos una combinación de la construcción de Walsh y de la de Rajput y la Rosinski: Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos la base de Lévy dada por

$$L^n(B) := L(B \cap R_n), \quad B \in \mathcal{R}^L, \tag{2.2.24}$$

y consideremos al proceso $\{L_t^n(A)\}_{t\in\mathbb{R},A\in\mathcal{R}}$ inducido por medio de (2.1.9). Es claro que dado $n \in \mathbb{N}$, $\{L_t^n(A)\}_{t\in\mathbb{R},A\in\mathcal{R}}$ es una medida martingala-valuada ortogonal, de ahí que si $\sigma \in \mathcal{MMV}_{L^n}$, entonces por la Observación 2.2.10, la integral $\int_{-\infty}^t \int_A \sigma_s^2(r) L^n(ds, dr)$ existe en el sentido de Walsh, de modo que por la Observación 2.2.9, para casi todo $\omega \in \Omega$

1. $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| a^n(r,s)\sigma_s(r) + \int_{\mathbb{R}} \tau(x\sigma_s(r)) - \sigma_s(r)\tau(x)\eta(dx)\right| \lambda^n(dr, ds) < \infty$;

2. $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} b^n(r,s)\sigma_s^2(r)\lambda^n(dr, ds) < \infty$;

3. $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1 \wedge [x^2\sigma_s^2(r)]\rho^n(s, r, dx)\lambda^n(dr, ds) < \infty$,

donde $(a^n, b^n, \rho^n)$, es la terna de $L^n$ y $\lambda^n$ su medida de control. Por la unicidad de la representación de Lévy-Kintchine, se puede ver que

$$a^n = a\mathbf{1}_{R_n}; \quad b^n = b\mathbf{1}_{R_n}; \quad \rho^n(s, r, dx) = \eta(dx)\mathbf{1}_{R_n}; \quad \lambda^n(dr, ds) = \mathbf{1}_{R_n} dr ds.$$

Supongamos ahora que casi seguramente

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\sigma_s(r)| \, dr ds < \infty \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sigma_s^2(r) \, dr ds < \infty. \tag{2.2.25}$$

En vista de que para cualquier $d > 0$ y $c \neq 0$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\tau(c\sigma_s(r)x) - c\tau(x\sigma_s(r))| \eta(dx) &= \int_{\left\{\|x\sigma_s(r)\| > 1\wedge|c|^{-1}\right\}} |\tau(cx\sigma_s(r)) - c\tau(x\sigma_s(r))| \eta(dx) \\
&\quad + \int_{\left\{\|xy\| \leq 1\wedge|c|^{-1}\right\}} |\tau(cx\sigma_s(r)) - c\tau(x\sigma_s(r))| \eta(dx) \\
&= \int_{\left\{\|xy\| > 1\wedge|c|^{-1}\right\}} |\tau(cx\sigma_s(r)) - c\tau(x\sigma_s(r))| \rho(r, dy),
\end{aligned}$$

y sobre $\left\{\|xy\| > 1 \wedge |c|^{-1}\right\}$, $|\tau(ycx) - c\tau(xy)| \leq 1 + d$ para todo $d > 0$, se concluye que

$$\int_{\mathbb{R}} |\tau(x\sigma_s(r)) - \sigma_s(r)\tau(x)| \eta(dx) \leq (1+d)\frac{1}{1 \wedge |c|^{-2}} \int_{\mathbb{R}} 1 \wedge \|\sigma_s(r)y\|^2 \eta(dx),$$

por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{R_n} \left| a\sigma_s(r) + \int_{\mathbb{R}} \tau(x\sigma_s(r)) - \sigma_s(r)\tau(x)\eta(dx) \right| &\leq \int_{\mathbb{R}} |\tau(x\sigma_s(r)) - \sigma_s(r)\tau(x)|\eta(dx) \\ &\quad + a|\sigma_s(r)| \\ &\leq (1+d)\frac{1}{1 \wedge |c|^{-2}} \int_{\mathbb{R}} 1 \wedge \|\sigma_s(r)y\|^2 \eta(dx) \\ &\quad + a|\sigma_s(r)|.\end{aligned}$$

Por (2.2.25) y el hecho de que $L$ tiene segundo momento, la función del lado derecho de la desigualdad anterior es integrable, lo cual junto con el Teorema de Convergencia Dominada nos permite concluir que casi seguramente

1. $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| af(s,r) + \int_{\mathbb{R}} \tau(xf(s,r)) - f(s,r)\tau(x)\eta(dx) \right| drds < \infty$;
2. $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} bf^2(s,r)\, drds < \infty$;
3. $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1 \wedge \|yf(s,r)\|^2 \eta(dx)\, drds < \infty$.

Sea $\Omega_0$ el conjunto con probabilidad 1 donde lo anterior se cumple, entonces por lo desarrollado previamente se tiene que para cada $\omega \in \Omega_0$ $f(\omega, \cdot)$ es $L$-integrable en el sentido de Rajput y Rosinski, es por esto por lo que definimos la integral de $f$ con respecto a $L$ para $\omega \in \Omega_0$. como el operador obtenido en la construcción de Rajput y Rosinski y cero en otro caso.

# Capítulo 3

# El modelo

El objetivo de este capítulo es exponer un enfoque reciente de modelación para el precio forward cuyo activo subyacente padece de falta de almacenamiento. Se estudian a los procesos y campos ambit, usando las herramientas presentadas en Capítulo 2. A partir de estos se presenta una dinámica para el precio de interés y bajo la ecuación (1.3.8) se obtiene el precio spot. Además, con el fin de justificar el enfoque de modelación se presenta a groso modo, algunos modelos formulados para describir tanto el precio forward como el spot. Finalmente se exponen la propiedades financieras que posee el modelo, entre ellas volatilidad estocástica, capacidad para la valuación de derivados, efecto Samuelson y convergencia al spot.

Por lo que respecta a la parte de la modelación, el capítulo se basa principalmente en Barndorff-Nielsen y cols. (2010b, 2010c), Benth y Koekebakker (2008) y Benth y cols. (2008). El contenido técnico acerca de los procesos y campos ambit aparece escensialmente en los trabajos de Barndorff-Nielsen, Benth y Veraart (2010a), Barndorff-Nielsen y Schmiegel (2003, 2007, 2009) y Basse-O'Connor, Graversen y Pedersen (2012).

## 3.1. Procesos y campos ambit

Como una posible respuesta al problema de modelación del precio forward referenciado al valor de algún energético no almacenable (por ejemplo la electricidad), durante esta sección se introduce una clase de procesos espacio-temporales llamados *campos ambit* así como los procesos de *Lévy semi-estacionarios,* los cuales pueden ser vistos como *campos ambit* con coordenada espacial nula. Tales procesos son presentados como una analogía a las semimartingalas obtenidas por medio de integrales estocásticas con respecto a procesos de la misma especie.

Los *procesos ambit* fueron introducidos originalmente por Barndorff-Nielsen y Schmiegel (2003) como modelos espacio-temporales para la variabilidad estocástica existente en los campos de velocidad de fluidos turbulentos, tal incertidumbre es conocida en física como *intermitencia*. Estos procesos han mostrado además, ser lo suficientemente flexibles para captar de manera conjunta los factores de ruido no controlables, llegando incluso a ser considerados como modelos para el crecimiento de tumores cancerígenos (ver el trabajo de Barndorff-Nielsen y Schmiegel (2007) para más detalles). Para lograr tal propiedad, estos hacen uso de integrales estocásticas las cuales les permiten compactar la información de un sistema perturbado. Desde el punto de vista financiero, la volatilidad es entendida como la variación que se produce en las alzas y bajas de los precios, por lo que el término intermitencia parece ser análogo a ésta, de hecho varios enfoques de modelación en finanzas han sido de utilidad en turbulencia y viceversa.

Los procesos ambit tienen tres conceptos principales dentro de su mecanismo: una base de Lévy, un *conjunto ambit* y una función *kernel*, los cuales se presentan a continuación. Fijemos un espacio de probabilidad filtrado $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}\right)$, donde la filtración cumple las condiciones habituales.

**Definición 3.1.1** *Para cada* $(x,t) \in R \times \mathbb{R}$ *sea* $A_t(x) \subset R \times \mathbb{R}$. *Se dice que* $A_t(x)$ *es un* ***conjunto ambit*** *si* $A_t(x) \subset R \times (-\infty, t]$.

**Definición 3.1.2** *Un campo estocástico* $(Y_t(x))_{t\in\mathbb{R},x\in R}$ *es llamado un* ***campo ambit*** *si tiene la forma*

$$Y_t(x) = \mu + \int_{A_t(x)} g(r,s,x,t)\,\sigma_s(r)\,L(dr,ds) + \int_{D_t(x)} q(r,s,x,t)\,m_s(r)\,drds, \qquad x \in R, t \in \mathbb{R}, \tag{3.1.1}$$

*donde* $L$ *es una base de Lévy,* $\mu \in \mathbb{R}$, $A_t(x)$ *y* $D_t(x)$ *son conjuntos ambit,* $q$ *y* $g$ *son funciones deterministas y tanto* $\sigma$ *como* $m$ *son campos estocásticos càdlàg, siendo el primero no negativo. Se referirá a* $g$ *como el* ***kernel*** *de* $Y$.

**Definición 3.1.3** *Sean* $(Y_t(x))_{t\in\mathbb{R},x\in R}$ *un campo ambit y* $C = \{(x(u), t(u)) : u \in \mathbb{R}\}$ *una curva suave en* $R \times \mathbb{R}$. *Se define el* ***proceso ambit*** *asociado a* $Y$ *mediante la curva* $C$ *por*

$$X_u := Y_{t(u)}(x(u)), \qquad u \in \mathbb{R}.$$

**Observación 3.1.1** *Por lo desarrollado previamente, para que (3.1.1) tenga sentido se debe garantizar que* $L$ *tenga segundo momento, con el primero igual a cero y que para cada* $x \in R, t \in \mathbb{R}$

$$\left\{\mathbf{1}_{A_t(x)} g(r,s,x,t)\,\sigma_s(r)\right\}_{s\in\mathbb{R},r\in R} \in \mathcal{MMV}_L,$$

*o en el caso homogéneo*

$$\left\{\mathbf{1}_{A_t(x)} g(r,s,x,t)\,\sigma_s(r)\right\}_{s\in\mathbb{R},r\in R} \in \mathcal{MMV}_{L^n}, \qquad n \in \mathbb{R},$$

*con* $L^n$ *como en (2.2.24) y casi seguramente*

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |\sigma_s(r)|\,drds < \infty \qquad y \qquad \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \sigma_s^2(r)\,drds < \infty.$$

*No obstante, como se ha venido comentando, las restricciones sobre la base pueden ser debilitadas al considerar que el proceso inducido por L vía (2.2.14) es una medida semimartingala-valuada (ver Márquez y cols. (2012)), de este modo, la condición de media cero y la existencia del segundo momento son superfluas.*

Supongamos que $L$ es una base de Lévy con tripleta $(\nu_0,\nu_1,\nu)$ e independiente de $\sigma$. Entonces, dado $(x,t)\in R\times\mathbb{R}$, la variable aleatoria $Y_t(x)\,|\,\{\sigma,a\}$ es infinitamente divisible y además por la Proposición 2.2.2

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\left(v\ddagger Y_t(x)\,|\sigma\right) &= \mu+\log\mathbb{E}\left[e^{iv\int_{D_t(x)}q(r,s,x,t)m_s(r)drds}\middle|\,\sigma\right]\\ &\quad+\int_{A_t(x)}\mathcal{C}\left(vg(r,s,x,t)\,\sigma_s(r)\ddagger L'(r)\right)\lambda(dr)\,. \qquad (3.1.2)\end{aligned}$$

Notemos también que en el caso de que $\mathbb{E}\left(Y_t(x)\right)<\infty$,

$$\mathbb{E}\left(Y_t(x)\,|\sigma\right)=\mu+\mathbb{E}\left(\int_{A_t(x)}g(r,s,x,t)\,\sigma_s(r)\,L(dr,ds)\,|\sigma\right)+\int_{D_t(x)}q(r,s,x,t)\,\mathbb{E}\left(m_s(r)\,|\sigma\right)drds,$$

pero por (2.2.8)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\int_{A_t(x)}g(r,s,x,t)\,\sigma_s(r)\,L(dr,ds)\,|\sigma\right) &= \int_{A_t(x)}g(r,s,x,t)\,\sigma_s(r)\,\nu_0'(dr,ds)\\ &\quad+\int_{A_t(x)}\int_{\mathbb{R}}yg(r,s,x,t)\,\sigma_s(r)\,\nu(dr,ds,dy)\,,\end{aligned}$$

de ahí que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(Y_t(x)\right) &= \mu+\int_{D_t(x)}q(r,s,x,t)\,\mathbb{E}\left[m_s(r)\right]drds+\int_{A_t(x)}g(r,s,x,t)\,\mathbb{E}\left[\sigma_s(r)\right]\nu_0'(dr,ds)\\ &\quad+\int_{A_t(x)}\int_{\mathbb{R}}yg(r,s,x,t)\,\mathbb{E}\left[\sigma_s(r)\right]\nu(dr,ds,dy)\,. \qquad (3.1.3)\end{aligned}$$

En particular, cuando $L$ es homogénea

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(Y_t(x)\right) &= \mu+\int_{D_t(x)}q(r,s,x,t)\,\mathbb{E}\left[m_s(r)\right]drds+a\int_{A_t(x)}g(r,s,x,t)\,\mathbb{E}\left[\sigma_s(r)\right]drds\\ &\quad+\int_{A_t(x)}\int_{\mathbb{R}}yg(r,s,x,t)\,\mathbb{E}\left[\sigma_s(r)\right]\eta(dy)\,drds. \qquad (3.1.4)\end{aligned}$$

Durante lo que resta de la presente tesis, nos enfocaremos al caso cuando los conjuntos ambit son *homogéneos* y *no anticipantes* y el proceso es *semi-estacionario*, de manera precisa, vamos a considerar a campos de la forma

$$Y_t(x) = \mu + \int_{A_t(x)} k(r, t-s, x)\, \sigma_s(r)\, L(dr, ds) + \int_{D_t(x)} h(r, t-s, x)\, m_s(r)\, dr ds, \qquad x \in R, t \in \mathbb{R}.$$

donde los conjuntos ambit están dados por

$$A_t(x) = A + (x, t), \quad \text{con } A \subset R \times (-\infty, 0], \tag{3.1.5}$$

y tanto el kernel como $h$ cumplen que

$$k(r, s, x) = h(r, s, x) = 0, \quad \forall\ s < 0.$$

El nombre de semi-estacionario está inspirado en el siguiente caso particular: Supongamos que $L$ es homogénea e independiente de $L$, los conjuntos ambit son de la forma

$$\begin{aligned} A_t(x) &= D_t(x) \\ &= A \times (-\infty, t], \qquad A \in \sigma(R), t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

los campos $a$ y $\sigma$ son procesos estacionarios de segundo orden sobre el tiempo con media cero y que además el kernel admite la representación

$$k(r, t-s, x) = \phi(t-s)\, \psi(r, x), \quad x, r \in R \text{ y } s, t \in \mathbb{R}, \tag{3.1.6}$$

de tal manera que $\phi\psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), leb)$ con $\phi$ continua sobre su segundo parámetro al igual que $h$. Si en adición para cada $r \in R$, $s, t \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\left\{[m_{t+s}(r) - \mathbb{E}(m_{t+s}(r) | \sigma(m_u(r), u \leq s))]^2\right\} = 0, \tag{3.1.7}$$

entonces en este caso, para $x$ fijo, el proceso $(Y_t(x))_{t \in \mathbb{R}}$ es estacionario de segundo orden. Para ver esto vamos a hacer uso del resultado presentado por Doob (1990, Capítulo XII, Teorema 5.3), el cual nos garantiza que cualquier proceso $X$, continuo en media cuadrática y estacionario de segundo orden regular, puede ser escrito como

$$X_t = \int_{-\infty}^{t} \widetilde{\phi}(t-s)\, d\widetilde{Z}_s + \widetilde{V}_t, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.1.8}$$

donde $\widetilde{Z}$ es un proceso estacionario de segundo orden con incrementos independientes tal que

$$\mathbb{E}\left[\left(\widetilde{Z}_t - \widetilde{Z}_s\right)^2\right] = c\,|t-s| \quad \forall\ t, s \in \mathbb{R}, \tag{3.1.9}$$

para alguna constante $c$ y el proceso $\widetilde{V}$ es igualmente estacionario de segundo orden salvo que es no regular, esto es,

$$\mathbb{E}\left\{\left[\widetilde{V}_{t_1+t_2}-\mathbb{E}\left(\widetilde{V}_{t_1+t_2}|\sigma\left(\widetilde{V}_u,u\leq t_1\right)\right)\right]^2\right\}=0,\quad \forall\ t_2,t_1\in\mathbb{R}. \tag{3.1.10}$$

Pongamos

$$dZ_s:=\int_A\psi\left(r,x\right)\sigma_s\left(r\right)L\left(dr,ds\right),\qquad t\in\mathbb{R}, \tag{3.1.11}$$

y

$$V_t:=\mu+\int_{-\infty}^t\int_A h\left(r,t-s,x\right)m_s\left(r\right)drds,\qquad t\in\mathbb{R}. \tag{3.1.12}$$

Gracias a la isometría de la integral estocástica en este caso $Y$ es continuo en media cuadrática sobre la coordenada temporal, de modo que si $Z$ y $V$ cumplen las mismas condiciones que $\widetilde{Z}$ y $\widetilde{V}$, se obtiene el resultado deseado. Claramente $\widetilde{Z}$ tiene incrementos independientes pues $L$ posee la propiedad IS. Ahora bien, si $L$ tiene segundo momento finito, por la descomposición dada en (2.2.8), para cualquier $t_2\geq t_1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(Z_{t_2}-Z_{t_1}\right)^2|\sigma\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_A\psi\left(r,x\right)\sigma_s\left(r\right)L\left(dr,ds\right)\right)^2|\sigma\right]\\ &= b\int_{t_1}^{t_2}\int_A\psi^2\left(r,x\right)\sigma_s^2\left(r\right)drds+\int_{t_1}^{t_2}\int_A\int_{\mathbb{R}}y^2\psi^2\left(r,x\right)\sigma_s^2\left(r\right)\eta\left(dy\right)drds\end{aligned}$$

de ahí que

$$\mathbb{E}\left[\left(Z_{t_2}-Z_{t_1}\right)^2\right]=b\int_{t_1}^{t_2}\int_A\psi^2\left(r,x\right)\mathbb{E}\left[\sigma_s^2\left(r\right)\right]drds+\int_{t_1}^{t_2}\int_A\int_{\mathbb{R}}y\psi^2\left(r,x\right)\mathbb{E}\left[\sigma_s^2\left(r\right)\right]\eta\left(dy\right)drds,$$

pero por ser $\sigma$ estacionario, su segundo momento no depende de $s$, así

$$\mathbb{E}\left[\left(Z_{t_2}-Z_{t_1}\right)^2\right]=C\left(t_2-t_1\right),$$

donde

$$C=b\int_A\psi^2\left(r,x\right)\mathbb{E}\left[\sigma_s^2\left(r\right)\right]dr+\int_A\int_{\mathbb{R}}y\psi^2\left(r,x\right)\mathbb{E}\left[\sigma_s^2\left(r\right)\right]\eta\left(dy\right)dr,$$

el cual, por lo mencionado anteriormente, no depende de $t_2$ o $t_1$, consecuentemente $Z$ cumple (3.1.9).

Para finalizar el argumento, veamos que $V$ es no singular. Sean $t_2,t_1\in\mathbb{R}$, luego

$$\mathbb{E}\left[V_{t_1}V_{t_1+t_2}\right]=\int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_1+t_2}\int_A\int_A h\left(r,t_1-s,x\right)h\left(y,t_1+t_2-u,x\right)\mathbb{E}\left[m_s\left(r\right)m_u\left(y\right)\right]drdyduds.$$

Nuevamente, por ser $a$ estacionario existe una función $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, de tal manera que $\mathbb{E}\left[m_s(r)\,m_u(y)\right]=g\left(|s-u|,r,y\right)$, de modo que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[V_{t_1}V_{t_1+t_2}\right] &= \int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_1+t_2}\int_A\int_A h\left(r,t_1-s,x\right)h\left(y,t_1+t_2-u,x\right)g\left(|s-u|,r,y\right)drdyduds \\ &= \int_0^{\infty}\int_0^{t_2}\int_A\int_A h\left(r,s,x\right)h\left(y,u+t_2,x\right)g\left(|s-u|,r,y\right)drdyduds,\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se realizó el cambio de variable $z=t_1-s$. La ecuación anterior permite garantizar que $V$ es estacionario, por lo que resta verificar que éste cumple (3.1.10). Por la ecuación (3.1.7), para cada $r\in R$

$$m_{t+s}(r)=\mathbb{E}\left(m_{t+s}(r)\,|\sigma\left(m_u(r),u\leq s\right)\right),\qquad \text{c.s.},$$

esto implica que dados $t_2,t_1\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{\left[V_{t_1+t_2}-\mathbb{E}\left(V_{t_1+t_2}|\sigma\left(a_u(r),u\leq t_1\right)\right)\right]^2\right\} &= \mathbb{E}\left\{\left\{\int_{t_1}^{t_1+t_2}\int_A h\left(y,t_1+t_2-s,x\right)\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\times\left[m_s(r)-\mathbb{E}\left(m_s(r)\,|\sigma\left(m_u(r),u\leq t_1\right)\right)\right]drds\right\}^2\right\} \\ &= 0,\end{aligned}$$

justo lo que se deseaba.

**Observación 3.1.2** *Por lo desarrollado anteriormente, si $h$ admite una factorización del tipo de (3.1.6), $\sigma$ es estacionario y $a$ singular, entonces cuando $L$ es una base de Lévy homogénea e independiente de $\sigma$, el campo ambit $\left(Y_t(x)\right)_{t\in\mathbb{R},x\in R}$ sobre los conjuntos ambit de la forma $A\times(-\infty,t]$, es un proceso estacionario de segundo orden. Ahora bien, por linealidad de la integral, para cualquier unión finita de rectángulos medibles en $R\times(-\infty,t]$, el resultado se mantiene, por lo que al aplicar el Lema de Dynkin, la propiedad se preserva para cualquier elemento de $\sigma(R)\otimes\mathcal{B}\left((-\infty,t]\right)$, en particular, si $A\in\sigma(R)\otimes\mathcal{B}\left((-\infty,0]\right)$, entonces para cualquier conjunto ambit inducido por $A$, a través de la relación (3.1.5), el campo ambit sobre éste es igualmente estacionario de segundo orden.*

Como punto final de esta sección, se explican algunas propiedades interesantes que poseen los campos y procesos ambit. Por un lado, cuando $L$ es homogénea, el proceso $Z$ dado por (3.1.11) es un proceso de Lévy en $\mathbb{R}$, es decir, un proceso càdlàg con incrementos independientes y estacionarios. Algo que es de vital importancia resaltar, es el hecho de que un proceso ambit no es en general una semimartingala, pues el kernel depende simultáneamente del índice $t$, lo cual nos lleva a tratar con procesos análogos al movimiento browniano fraccionario, el cual, como es bien sabido, no es en general una semimartingala.

### 3.1.1. Procesos de Lévy semi-estacionarios

En esta subsección se presenta a los procesos de Lévy semi-estacionarios como procesos estocásticos indexados por la recta real, los cuales pueden ser representados por medio de integrales estocásticas con respecto a procesos de Lévy en la recta. Se muestra además su relación con lo campos ambit y se exponen condiciones necesarias para que los procesos en cuestión sean semimartingalas, calculando su variación cuadrática en este caso. Lo que se presenta a continuación está basado en el trabajo de Basse-O'Connor y cols. (2012) y Barndorff-Nielsen y cols. (2010c).

**Definición 3.1.4** *Sea $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un proceso $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$-adaptado. Se dice que $Y$ es un **proceso de Lévy semi-estacionario**(LSS), si es de la forma*

$$Y_t = \mu + \int_{-\infty}^{t} g\,(t-s)\,\sigma_{s-} dL_s + \int_{-\infty}^{t} q\,(t-s)\,m_s ds, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.1.13}$$

*donde $\sigma$ y $m$ son procesos càdlàg, $\mu \in \mathbb{R}$, $q$ y $g$ son funciones deterministas no negativas, tales que $q\,(r) = g\,(r) = 0$ para cualquier $r \le 0$. El proceso $(L_t)_{t\in\mathbb{R}}$ es un proceso de Lévy indexado por la recta, esto es, $L$ es un proceso càdlàg con incrementos independientes y estacionarios.*

**Observación 3.1.3** *La integral estocástica en la cual se basa un proceso LSS se entiende como una integral con respecto a una base de Lévy en $\mathbb{R}$ la cual es homogénea. Ver Basse-O'Connor y cols. (2012, Corolario 4.1) para más detalles.*

Veamos que un proceso LSS es realmente un proceso ambit con coordenada espacial nula. Sean $\widetilde{L}$ una base de Lévy homogénea y $(\sigma_t\,(x))_{x,t\in\mathbb{R}}$ $(m_t\,(x))_{x,t\in\mathbb{R}}$ dos procesos càdlàg en tiempo y espacio. Consideremos el campo ambit de la forma

$$\begin{aligned}\widetilde{Y}_t\,(x) &= \mu + \int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}} \phi\,(t-s)\,\psi\,(t-r,s)\,\widetilde{\sigma}_{s-}\widetilde{L}\,(dr,ds) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}} \gamma\,(t-s)\,\varphi\,(r,s)\,\widetilde{m}_s\,(r)\,drds, \quad x \in R, t \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

donde $\phi$ y $\gamma$ son no negativas y tales que $\phi\,(y) = \gamma\,(y) = 0$, para $y < 0$ y tanto $\psi$ como $\varphi$ son deterministas no negativas y continuas y continuas, siendo la primera $\widetilde{L}$-integrable. Se probará que el proceso anterior $\widetilde{Y}$ puede ser expresado como en (3.1.13). Es evidente que $\widetilde{Y}$ no depende de $x$ y que el proceso definido por

$$m_s := \int_{\mathbb{R}} \widetilde{m}_s\,(r)\,dr, \quad s \in \mathbb{R},$$

es càdlàg, por lo que nos resta ver que

$$L_t := \int_{-\infty}^{t} \int_{\mathbb{R}} \psi\left(t-r,s\right) \widetilde{L}\left(dr,ds\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

es un proceso de Lévy. Puesto que $\psi$ es continua y $\widetilde{L}$-integrable, $L$ es continuo en media cuadrática y consecuentemente estocásticamente continuo, por lo que se puede suponer que se está trabajando con su versión càdlàg. Ahora bien, la propiedad IS de la base $\widetilde{L}$ dota al proceso $L$ de incrementos independientes, más aún, en vista de que para cualquier $s,t,u,v \in \mathbb{R}$, con $t \geq u$, $v \geq w$ y $t-u = v-w$, se tiene

$$L_t - L_u = \int_{-\infty}^{u} \int_{\mathbb{R}} \left[\psi\left(t-r,s\right) - \psi\left(u-r,s\right)\right] \widetilde{L}\left(dr,ds\right) + \int_{u}^{t} \int_{\mathbb{R}} \psi\left(t-r,s\right) \widetilde{L}\left(dr,ds\right),$$

y

$$L_v - L_w = \int_{-\infty}^{w} \int_{\mathbb{R}} \left[\psi\left(v-r,s\right) - \psi\left(w-r,s\right)\right] \widetilde{L}\left(dr,ds\right) + \int_{w}^{v} \int_{\mathbb{R}} \psi\left(v-r,s\right) \widetilde{L}\left(dr,ds\right),$$

es fácil ver (con ayuda de la ecuación (2.2.2), la homogeneidad y la propiedad IS de $\widetilde{L}$) que

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\left(z \ddagger L_t - L_u\right) &= \int_{-\infty}^{u} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\left(w\left[\psi\left(t-r,s\right) - \psi\left(u-r,s\right)\right] \ddagger \widetilde{L}'\right) dsdr \\
&\quad + \int_{u}^{t} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\left(w\psi\left(t-r,s\right) \ddagger \widetilde{L}'\left(r,s\right)\right) dsdr \\
&= \int_{t-u}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\left(w\left[\psi\left(z,s\right) - \psi\left(z-\left(t-u\right),s\right)\right] \ddagger \widetilde{L}'\right) dsdz \\
&\quad + \int_{0}^{t-u} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\left(w\psi\left(z,s\right) \ddagger \widetilde{L}'\left(r,s\right)\right) dsdz \\
&= \int_{v-w}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\left(w\left[\psi\left(z,s\right) - \psi\left(z-\left(v-w\right),s\right)\right] \ddagger \widetilde{L}'\right) dsdz \\
&\quad + \int_{0}^{v-w} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\left(w\psi\left(z,s\right) \ddagger \widetilde{L}'\right) dsdz \\
&= \mathcal{C}\left(z \ddagger L_v - L_w,\right)
\end{aligned}$$

donde $\widetilde{L}'$ es la semilla de $\widetilde{L}$. Lo anterior indica que $L_t - L_u \stackrel{d}{=} L_v - L_w$, es decir, $L$ tiene incrementos estacionarios. Esto último prueba que $L$ es un proceso de Lévy y consecuentemente $\widetilde{Y}$ es Lévy semi-estacionario.

**Observación 3.1.4** *Al igual que para los campos ambit, el adjetivo de semi-estacionarios se refiere al caso cuando $\sigma$ y $m$ son estacionarios de segundo orden, siendo el segundo no regular. Para ver esto, es suficiente con observar que cualquier proceso LSS puede ser escrito como en*

*(3.1.8), con*

$$d\widetilde{Z}_s = \sigma_{s-} dL_s \qquad y \qquad \widetilde{V}_t = \mu + \int_{-\infty}^{t} q\,(t-s)\, m_s ds.$$

Nótese que la clase de semimartingalas inducida por los procesos de la forma

$$X_t = \int_0^t \sigma_s dL_s + \int_0^t m_s ds, \qquad t \geq 0,$$

donde $L$ es un proceso de Lévy usual, está contenida en la clase de LSS. Una pregunta natural que surge a partir de este hecho, es la relación de dichos procesos con tal estructura, es decir, bajo que condiciones un proceso LSS es una semimartingala.

**Teorema 3.1.1** *Sea $Y$ un proceso LSS como en (3.1.13). Entonces $Y$ es una semimartingala (en su filtración natural) con variación cuadrática*

$$[Y]_t = g\,(0+)^2 \int_0^t \sigma_{s-}^2 d\,[L]_s\,, \qquad t \in \mathbb{R},$$

*siempre que las siguientes condiciones se cumplan*

1. *Tanto $g\,(0+)$ y $q\,(0+)$ existen y son finitos;*
2. *La función $g$ es absolutamente continua y con primera derivada Lebesgue-integrable;*
3. *Para $t \in \mathbb{R}$ arbitrario, los procesos $\left(g'\,(t-s)\,\sigma_{s-}\right)_{s\in\mathbb{R}}$ y $\left(q'\,(t-s)\,\sigma_{s-}\right)_{s\in\mathbb{R}}$ son cuadrado integrable e integrable respectivamente;*

**Demostración.** Las condiciones $1-3$ garantizan que para cualquier $t \geq 0$ el proceso

$$X_t := Y_0 + g\,(0+) \int_0^t \sigma_{s-} dL_s + \int_0^t A_s ds,$$

donde

$$A_s := \int_{-\infty}^{s} g'\,(s-u)\,\sigma_{u-} dLu + q\,(0+)\, m_s + \int_{-\infty}^{s} q'\,(s-u)\, m_u du.$$

está bien definido y además es una semimartingala. Usando el hecho de que

$$d \int_{-\infty}^{t} g\,(t-s)\,\sigma_{s-} dL_s = g\,(0+)\,\sigma_{t-} dL_t + \int_{-\infty}^{t} g'\,(s-u)\,\sigma_{u-} dL_u dt,$$

vemos que

$$\int_0^t g\,(t-s)\,\sigma_{s-} dL_s = g\,(0+) \int_0^t \sigma_{s-} dL_s + \int_0^t \int_{-\infty}^{s} g'\,(s-u)\,\sigma_{u-} dL_u ds.$$

De manera análoga a lo hecho previamente, se puede ver que

$$\int_0^t q(t-s)\, m_{s-} ds = q(0+) \int_0^t m_s ds + \int_0^t \int_{-\infty}^s q'(s-u)\, m_u du ds.$$

Las dos ultimas ecuaciones permiten concluir

$$\begin{aligned} X_t &= Y_0 + \int_0^t g(t-s)\, \sigma_{s-} dL_s + \int_0^t q(t-s)\, m_s ds \\ &= Y_t, \end{aligned}$$

es decir, $Y$ es una semimartingala. Finalmente por las propiedades de la variación cuadrática y la igualdad anterior se obtiene que

$$\begin{aligned} [Y]_t &= \left[ Y_0 + g(0+) \int_0^{\cdot} \sigma_{s-} dL_s + \int_0^{\cdot} A_s ds \right]_t \\ &= g^2(0+) \int_0^t \sigma_{s-} d[L]_s . \end{aligned}$$

■

Los campos ambit así como los LSS, juegan un papel fundamental en el modelo para el precio forward que se presenta en la siguiente sección.

## 3.2. Campos ambit como modelos para el precio forward

En esta sección se presenta una alternativa de modelación basada en campos ambit, la cual permite describir el precio forward referente a un activo no almacenable (electricidad, gas, temperatura, entre otros). A partir del precio forward se encuentra la dinámica del precio spot y se muestra que en algunos casos tal proceso es de la clase LSS. Además, con el fin de justificar el enfoque de modelación tanto de manera financiera como matemática, se exponen algunos modelos basados en la metodología de HJM.

### 3.2.1. Algunas dinámicas propuestas

A continuación se formulan de manera introductoria algunas dinámicas que pretenden, en general, modelar el precio de un contrato forward. Si bien algunas de éstas no fueron inicialmente pensadas para el ámbito energético, sino más bien para mercados de tasas de interés, la similitud entre sus activos principales hace viable dicho enfoque. Se hace notar que lo que se expone a continuación está basado principalmente en libro de Benth y cols. (2008, Capítulo 6).

### El modelo de Heat-Jarrow-Morton

Originalmente Heat, Jarrow y Morton introdujeron una dinámica para la tasa forward (precio forward) la cual está basada en integrales estocásticas, esto con el fin de conseguir una dinámica para la tasa de interés así como para el bono asociado a ésta por medio de la relación (1.3.8). Los autores antes mencionados, proponen que bajo una medida de riesgo neutro, el precio forward con fecha de expiración $T$ está dado por

$$dF(t,T) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(t,T)\, dW_s^i, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.2.1}$$

donde, para $i = 1, \ldots, n$, los procesos $\sigma^i$ son predecibles e integrables con respecto a $W^i$, siendo estos últimos movimientos brownianos independientes. Notemos que el factor de ruido está modelado por $n$ movimientos brownianos, los cuales son entendidos como los componentes que influyen de manera directa en el precio; modelos de esta índole son conocidos como **modelos de multifactores**. Haciendo el cambio de variable $x = T - t$ , se puede ver que

$$\begin{aligned} f(t,x) \quad &: \quad = F(t, t+x) \\ &= \quad F(0,x) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \sigma_i(s, s+x)\, dW_s^i, \quad 0 \leq t \leq T, x \geq 0, \end{aligned}$$

es decir, el precio forward puede ser tratado como un campo estocástico en tiempo y espacio. Esta transformación es conocida como la parametrización de Musiela (ver Brace y Musiela (1994)), aquí $x$ representa el tiempo que le falta al contrato para madurar. Nétese que en este caso el campo $f$ es una suma de campos ambit con $A_t^i(x) = [0,t] \times \{x\}$ , el kernel exactamente igual a 1 y $W^i$ una base gaussiana con terna de medidas $(0, leb \otimes \#, 0)$, donde $\#$ representa la medida de contar. Algo que conviene resaltar del modelo es que puede permitir precios negativos, no obstante, si se considera a $f$ como el rendimiento logarítmico tal problema desaparece. A los modelos con una estructura análoga a (3.2.1) son conocidos en la literatura como **modelos aritméticos**, en este mismo sentido, vamos a decir que son del tipo **geométrico** si lo que se modela es el rendimiento logarítmico. Obsérvese que para el caso geométrico

$$f(t,x) = f(0,x) \exp\left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[ \int_0^t \sigma_i(s,s+x)\, dW_s^i - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_i^2(s,s+x)\, ds \right] \right\}, \quad 0 \leq t \leq T, x \geq 0, \tag{3.2.2}$$

y consecuentemente

$$S_t = f(0,0) \exp\left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[ \int_0^t \sigma_i(s,s)\, dW_s^i - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_i^2(s,s)\, ds \right] \right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Percatémonos de que el precio no permite saltos, por lo que no puede describir de manera adecuada las series de datos del spot energético.

### El modelo de Benth y Koekebakker

Inspirado por el modelo aritmético de HJM, Benth y Koekebakker (2008)introducen una dinámica de evolución la cual incluye saltos, siendo estos modelados por una medida de Poisson puntual, de manera precisa, en un mundo de riesgo neutro

$$dF\left(t,T\right)=\sigma\left(t,T\right)dW_t+\int_{\mathbb{R}}K\left(t,T,y\right)\left(N-\nu\right)\left(dy,dt\right),\quad 0\leq t\leq T,$$

donde $W$ es un movimiento browniano independiente de $N$, el cual es una medida de Poisson puntual con intensidad $\nu=\eta\otimes leb$, con $\eta$ una medida de Lévy en $\mathbb{R}$; aquí $\sigma$ es un proceso predecible $W$-integrable y $K$ es un campo estocástico $N$-integrable. Bajo la parametrización de Musiela, el precio forward sigue la ecuación de evolución

$$df\left(t,x\right)=\sigma\left(t,t+x\right)dW_t+\int_{\mathbb{R}}K\left(t,t+x,y\right)\left(N-\nu\right)\left(dy,dt\right),\quad 0\leq t\leq T,x\geq 0.$$

Haciendo uso de (1.3.6), en este mismo trabajo se muestra de forma explicita la dinámica del precio de un swap cuyo período de flujo de capital se desarrolla en el intervalo $[T_1,T_2]$ :

$$dF\left(t,T_1,T_2\right)=\Sigma\left(t,T_1,T_2\right)dW_t+\int_{\mathbb{R}}\widetilde{K}\left(t,T_1,T_2,y\right)\left(N-\nu\right)\left(dy,dt\right),\tag{3.2.3}$$

donde $W$, $N$ y $\nu$ son como antes; los campos $\Sigma$ y $\widetilde{K}$ están dados por

$$\Sigma\left(t,T_1,T_2\right)=\int_{T_1}^{T_2}\widehat{w}\left(u,T_1,T_2\right)\sigma\left(t,u\right)du,\tag{3.2.4}$$

y

$$\widetilde{K}\left(t,T_1,T_2,y\right)=\int_{T_1}^{T_2}\widehat{w}\left(u,T_1,T_2\right)K\left(t,u,y\right)du,$$

con $\widehat{w}$ igual que en (1.3.7).

Al igual que en el modelo HJM, se puede observar que el precio forward es un campo ambit sin deriva con base de Lévy $W+(N-\nu)$ sobre el conjunto ambit $[0,t]\times\{x\}$.

### El modelo de Benth, Benth y Koekebakker

Como una analogía a (3.2.2), Benth, Benth y Koekebakker introducen una dinámica con saltos del tipo geométrica : Para cualquier $0\leq t\leq T$

$$F\left(t,T\right)=F\left(0,T\right)\exp\left\{\int_0^t\alpha\left(u,T\right)du+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\sigma_i\left(s,T\right)dW_s^i+\sum_{j=1}^{m}\int_0^t\beta_j\left(s,T\right)dX_s^j\right\},\tag{3.2.5}$$

donde $W^1, \ldots, W^n$ son movimientos brownianos independientes de $X^j$, siendo este último un un proceso con incrementos independientes con la familia de ternas características $\left(a_t^j, b_t^j, \nu_t^j\right)$, con $a_t^j$ una función de variación acotada (consecuentemente $X^j$ es una semimartingala) para $j = 1, \ldots, n$, se asume además que $X^1, \ldots, X^n$ son independientes; asimismo $a$ es una función determinista y los procesos $\sigma_i$ y $\beta_j$ son predecibles e integrables con respecto a $W^i$ y $X^j$, respectivamente. Bajo el supuesto de no arbitraje, $F$ sigue la ecuación de evolución

$$\frac{dF(t,T)}{F(t,T)} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(t,T)\, dW_t^i + \sum_{j=1}^{m} \int_{\mathbb{R}} \left[e^{\beta_j(t,T)x} - 1\right] \left(M^j - \nu^j\right)(dx, dt),$$

con $M^j$ una medida de Poisson puntual con intensidad $\nu^j(dx, dt) := \nu_{dt}^j(dx)$.

Algo que conviene resaltar, es el hecho de que bajo (3.2.5) es posible obtener una forma cerrada del precio swap:

$$dF(t, T_1, T_2) = \sum_{i=1}^{n} \Sigma^i(t, T_1, T_2)\, dW_t^i + \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\beta}(T_1, T_2, t, x) \left(M^j - \nu^j\right)(dx, dt),$$

donde

$$\Sigma^i(t, T_1, T_2) = \int_{T_1}^{T_2} \widehat{w}(u, T_1, T_2)\, \sigma(t, u)\, F(t, u)\, du,$$

y

$$\widetilde{\beta}(T_1, T_2, t, x) = \int_{T_1}^{T_2} \left[e^{\beta_j(t,T)x} - 1\right] \widehat{w}(u, T_1, T_2)\, du,$$

la cual es análoga a (3.2.3).

### 3.2.2. El modelo para el precio forward

Haciendo uso de los campos ambit y procesos del tipo LSS, durante está parte se presenta una nueva dinámica para el precio forward en mercados de electricidad (mercados de bienes no almacenables). Con la ayuda de las dinámicas previamente expuestas, se da una motivación para usar el enfoque ambit. Nótese que el modelo que se plantea a continuación fue introducido originalmente por Barndorff-Nielsen y cols. (2010b).

Koekebakker y Ollmar (2005), auxiliándose de las dinámicas (3.2.1) y (3.2.2), realizan un análisis de componentes principales con el fin de obtener una estimación sobre el número de factores que impactan directamente en el precio del forward. En este estudio se consigue mostrar que el número de elementos aleatorios necesarios para explicar la serie de datos con un 95 % de confianza es de 10, lo cual provoca irremediablemente una falta de interpretabilidad y de simplicidad en el modelo, de modo que un enfoque del tipo multifactor puede no ser lo suficientemente parsimonioso.

Supongamos que $L$ es una base de Lévy definida en $\left(\Omega, \mathcal{F}, \widetilde{\mathbb{P}}\right)$ y que además es de la forma $L(dr, ds) = \#(dr)\, W(r, ds)$, donde $W(r, ds)$ es una colección independiente de bases de Lévy con ternas $(0, leb, 0)$ y $\#$ la medida de contar en $\mathbb{R}^+$. Consideremos además los campos estocásticos $\left\{\widetilde{\sigma}^i(x,t), i = 1, \ldots, n\right\}_{t,x\geq 0}$ integrables con respecto a $W$ y definamos

$$\sigma(r,s,x) := \begin{cases} \widetilde{\sigma}^i(s,x) & \text{si } i = r,\ i = 1, \ldots, n; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^+} \sigma(r,s,x)\, L(dr,ds) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^+} \sigma(r,s,x)\, \#(dr)\, W(r,ds) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^t \widetilde{\sigma}^i(s,x)\, W(\{i\}, ds), \end{aligned}$$

pero por (2.1.9), $W(\{i\}, ds)$ induce un movimiento browniano, de ahí que

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^+} \sigma(r,s,x)\, L(dr,ds) = \sum_{i=1}^n \int_0^t \widetilde{\sigma}^i(s,x)\, dW_s^i,$$

por lo tanto el modelo de HJM puede ser escrito como un campo ambit de la forma

$$f(t,x) = f(0,x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^+} \sigma(r,s,x)\, L(dr,ds), \quad 0 \leq t \leq T, x \geq 0.$$

Es conveniente notar que la base es realmente gaussiana y el modelo sigue siendo del tipo multifactor, para lidiar con esto vamos a trabajar con un modelo del tipo **infinitos factores** que en adición permita saltos en el precio, es decir, vamos a suponer que bajo una medida neutral al riesgo

$$f(t,x) = f(0,x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^+} g(r,s,x,t)\, \sigma_s(r)\, L(dr,ds), \quad t \geq 0.$$

Además, puesto que tomar una posición en un contrato forward no tiene costo alguno

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}[f(t,x)] \\ &= f(0,x), \quad 0 \leq t \leq T, x \geq 0, \end{aligned}$$

por lo que se puede suponer que

$$f(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^+} g(r,s,x,t)\, \sigma_s(r)\, L(dr,ds), \quad t \geq 0.$$

Otro punto a tratar es la estacionalidad que ha sido encontrada de manera empírica en el proceso de precios de la electricidad (ver Meyer-Brandis y Tankov (2008) para más detalles), por lo que un campo ambit estacionario parece acorde a la situación.

Todo lo anterior nos permite plantear el modelo de manera rigurosa: Sea $\left(\Omega, \mathcal{F}, \widetilde{\mathbb{P}}\right)$ un espacio de probabilidad con $\widetilde{\mathbb{P}}$ una medida neutral al riesgo para el precio del activo no almacenable. Tomemos a $L$ una base de Lévy sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $\mathcal{L}^2$-valuada con media cero y la filtración

$$\mathcal{F}_t := \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}^0_{t+1/n}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.2.6}$$

en donde

$$\mathcal{F}^0_t := \sigma \left\{ L \left( A \times (-\infty, s] \right) : A \in \mathcal{B}_b \left( \mathbb{R}^+ \right), s \leq t \right\} \vee \mathcal{N}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.2.7}$$

con $\mathcal{N}$ los conjuntos $\widetilde{\mathbb{P}}$-nulos. Bajo $\widetilde{\mathbb{P}}$ el precio forward bajo la parametrización de Musiela sigue la dinámica

$$f(t, x) = \int_{-\infty}^{t} \int_{\mathbb{R}^+} k(r, t-s, x) \, \sigma_s(r) \, L(dr, ds), \quad t \in \mathbb{R}, x \geq 0, \tag{3.2.8}$$

cuyos componentes se describen a continuación:

1. El campo $\sigma$ es no negativo, estacionario de segundo orden sobre su parámetro temporal, así como $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$-adaptado;
2. El kernel es no negativo y tal que $k(r, u, x) = 0$ para $u < 0$;
3. $\left\{ \mathbf{1}_{(-\infty, t] \times \mathbb{R}} g(r, s, x, t) \, \sigma_s(r) \right\}_{s \in \mathbb{R}, r \in R} \in \mathcal{MMV}_L$;
4. $\sigma$ y $L$ son independientes.

Notemos que la dinámica propuesta no es en general una semimartingala, pues intenta captar la problemática que la falta de almacenamiento crea en el bien subyacente. Obsérvese además que estamos considerando un proceso indexado sobre la recta real solamente con el fin de obtener un proceso estacionario de segundo orden, sin embargo sólo estamos interesados en tiempos no negativos. En la siguiente sección se describen las propiedades que posee la dinámica propuesta para el precio forward.

## 3.3. Propiedades

Para concluir el capítulo, se presentan las propiedades más relevantes del modelo construido en la sección anterior, entre las cuales se pueden mencionar volatilidad estocástica, captabilidad del spot y ausencia de arbitraje en el sentido clásico. Se muestra además que bajo la condición

(3.2.8), el precio forward converge al spot cuando la fecha de maduración está por llegar; se explora de igual manera la estructura estacionaria que posee, se exhibe además la valuación de activos contingentes, el efecto Samuelson presente en la serie de datos así como una forma de obtener un cambio de medida que permita describir el precio forward o spot en el mundo real. Se finaliza dando algunos ejemplos en los componentes y se discute el problema de calibración, el cual sigue estando abierto.

### 3.3.1. Ausencia de arbitraje y valuación

En esta parte se presentan condiciones necesarias y suficientes para que el proceso del precio forward sea una martingala (local) bajo $\widetilde{\mathbb{P}}$, y en tal circunstancia se calcula el precio de un activo contingente del tipo europeo cuyo beneficio depende del forward, para esto nos valemos del TFVA.

Como se menciono anteriormente, la falta de almacenamiento provoca que el enfoque de semimartingalas para la modelación del precio spot y del forward sea superfluo, no obstante, dentro de este contexto es posible hacer uso del TFVA para obtener métodos de valuación. Puesto que la estructura adoptada en el modelo introducido previamente, es sólo con el fin de mostrar el tipo de tratamiento que se debe considerar en esta metodología, vamos a suponer que el valor del dinero no fluctúa en el tiempo, es decir, la tasa libre de riesgo es igual a cero

**Teorema 3.3.1** *Sea* $(Y_t(x))_{t\in\mathbb{R},x\geq 0}$ *un campo ambit sin deriva sobre el conjunto ambit* $A_t = (-\infty,t]\times\mathbb{R}^+$. *Para* $T>0$ *definamos el proceso*

$$X_t := Y_t(T-t), \qquad t\leq T. \tag{3.3.1}$$

*Entonces* $(X_t)_{t\leq T}$ *es una* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$*-martingala si y solamente si existe una función* $\widetilde{g}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ *tal que*

$$\widetilde{g}(r,s,T) = g(r,s,T-t,t), \qquad \forall\ s\leq t\leq T, r\geq 0. \tag{3.3.2}$$

**Demostración.** Sean $t_2\leq t_1\leq T$. Por la propiedad IS, las ecuaciones (3.2.6) y (3.2.7) y la adaptabilidad de $\sigma$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(X_{t_1}|\mathcal{F}_{t_2}) &= \mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\int_{A_{t_1}} g(r,s,T-t_1,t_1)\,\sigma_s(r)\,L(dr,ds)\,|\mathcal{F}_{t_2}\right)\\
&= \mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\int_{A_{t_2}} g(r,s,T-t_1,t_1)\,\sigma_s(r)\,L(dr,ds)\right.\\
&\qquad \left.+\int_{A_{t_2}\setminus A_{t_2}} g(r,s,T-t_1,t_1)\,\sigma_s(r)\,L(dr,ds)\right|\mathcal{F}_{t_2}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\int_{A_{t_2}} g\left(r,s,T-t_1,t_1\right)\sigma_s\left(r\right)L\left(dr,ds\right)\middle|\mathcal{F}_{t_2}\right) \\
&= X_{t_2} + \int_{A_{t_2}} \left[g\left(r,s,T-t_1,t_1\right) - g\left(r,s,T-t_2,t_2\right)\right]\sigma_s\left(r\right)L\left(dr,ds\right).
\end{aligned}
$$

Así pues, si (3.3.2) se mantiene

$$
g\left(r,s,T-t_1,t_1\right) - g\left(r,s,T-t_2,t_2\right) = 0,
$$

es por esto por lo que $X$ es una martingala.

Recíprocamente, si $X$ es una martingala, entonces $\widetilde{\mathbb{P}}$- casi seguramente

$$
\int_{A_{t_2}} \left[g\left(r,s,T-t_1,t_1\right) - g\left(r,s,T-t_2,t_2\right)\right]\sigma_s\left(r\right)L\left(dr,ds\right) = 0, \qquad t_2 \leq t_1 \leq T,
$$

consecuentemente

$$
\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left\{\left\{\int_{A_{t_2}} \left[g\left(r,s,T-t_1,t_1\right) - g\left(r,s,T-t_2,t_2\right)\right]\sigma_s\left(r\right)L\left(dr,ds\right)\right\}^2\right\} = 0,
$$

pero por la isometría de la integral estocástica, lo anterior se cumple si y sólo si

$$
\int_{A_{t_2}} \left[g\left(r,s,T-t_1,t_1\right) - g\left(r,s,T-t_2,t_2\right)\right]^2 \mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\sigma_s^2\left(r\right)\right) Q\left(dr,ds\right) = 0,
$$

de ahí que

$$
g\left(r,s,T-t_1,t_1\right) = g\left(r,s,T-t_2,t_2\right), \qquad t_2 \leq t_1 \leq T,
$$

lo cual es válido solamente si (3.3.2) se mantiene. ■

**Corolario 3.3.1** *Consideremos un contrato forward que expira al tiempo $T$, con proceso de precios $\left(f\left(t,T-t\right)\right)_{t\leq T}$ donde $f$ está dado como en (3.2.8). Entonces $\left(f\left(t,T-t\right)\right)_{t\leq T}$ es una martingala si y solamente si existe una función $\widetilde{k}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ tal que*

$$
\widetilde{k}\left(r,T-s\right) = k\left(r,t-s,T-t\right), \qquad \forall\ s\leq t\leq T, r\geq 0. \tag{3.3.3}
$$

El corolario anterior implica que un mercado cuyo activo principal sea el contrato forward, es libre de arbitraje si y solamente si el kernel cumple (3.3.3), por consiguiente, derivados basados en el precio de tal instrumento pueden ser valuados: Sea $\left(f\left(t,T-t\right)\right)_{t\leq T}$ el proceso de precios en un contrato forward cuya fecha de expiración es $T$. Considérese además a un activo contingente del tipo europeo referente a tal precio, el cual madura al tiempo $T'\leq T$ y su función de pago está dada por la cantidad $G\left(f\left(T',T-T'\right)\right)$. Entonces, bajo el supuesto de no arbitraje, el precio de dicho contrato es

$$\mathbf{P}\left(t\right)=\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(G\left(f\left(T',T-T'\right)\right)|\mathcal{F}_t\right),\quad t\leq T', \tag{3.3.4}$$

suponiendo, claro está, que $G\left(f\left(T',T-T'\right)\right)$ sea integrable. Si en adición, tanto $G$ como su transformada de Fourier $\widehat{G}$ son integrables con respecto a la medida de Lebesgue, la ecuación (3.3.4) toma la forma

$$\mathbf{P}\left(t\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\widehat{G}\left(y\right)\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(e^{iyf(T',T-T')}|\mathcal{F}_t\right)dy,\quad t\leq T'.$$

Desafortunadamente existen algunos derivados importantes, cuya función de pago no son integrables con respecto a la medida de Lebesgue, este es el caso de una opción tipo call.

### 3.3.2. El precio spot, el efecto Samuelson y estructura de segundo orden

Bajo el supuesto de no arbitraje, en esta subsección se construye una dinámica para el precio spot bajo la relación (1.3.8) y se muestra su relación con los procesos LSS. Se discute finalmente el efecto Samuelson, el cual es entendido de manera empírica como el hecho de que la volatilidad en el precio forward converge de manera creciente a la volatilidad del spot cuando la fecha de entrega está próxima a comenzar.

#### El precio spot

En el Capitulo 1 se vio que bajo el supuesto de no arbitraje en el mercado $\left(e^{rt},S_t\right)_{t\geq 0}$, el precio del forward y del spot cumplen la relación

$$S_t=F\left(t,t\right)=f\left(t,0\right).$$

En particular, si $f$ está representado como en (3.2.8), entonces

$$S_t=\int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}^+}k\left(r,t-s,0\right)\sigma_s\left(r\right)L\left(dr,ds\right),\quad t\in\mathbb{R}.$$

Usando esto y la isometría de la integral estocástica, $f\left(t,x\right)\xrightarrow{\mathcal{L}^2}S_t$ cuando $x\downarrow 0$ si y solamente si

$$\int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}^+}\left[k\left(r,t-s,x\right)-k\left(r,t-s,0\right)\right]^2Q^L\left(dr,ds\right)\to 0,\quad \text{cuando } x\downarrow 0, \tag{3.3.5}$$

o para el caso homogéneo

$$\int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}^+}\left[k\left(r,t-s,x\right)-k\left(r,t-s,0\right)\right]^2drds\to 0,\quad \text{cuando } x\downarrow 0.$$

Esto indica que $f(t,x) \stackrel{\mathcal{L}^2(\widetilde{\mathbb{P}})}{\longrightarrow} S_t$ si y solamente si $k(r,t-s,x) \stackrel{\mathcal{L}^2(Q_{\mathbb{R}^+})}{\longrightarrow} k(r,t-s,0)$, donde $Q_{\mathbb{R}^+}$ es la proyección de $Q$ en $\mathbb{R}^+$. Es claro que en el caso de que $k$ sea continua y monótona en su tercera variable, tal resultado es siempre válido. Esta propiedad es deseable en mercado financiero usuales, donde estrategias de cobertura son viables, no obstante, como se ha comentado anteriormente el contrato forward usual (con fecha de entrega en un sólo punto en el tiempo) no existe como tal en mercados energéticos, más aún, por (1.3.9), si $F(s,t,y)$ es el precio de un forward con período de entrega $[t,y]$, $F(s,t,y) \nrightarrow S_t$ cuando $s \uparrow t$.

Supongamos ahora que $L$ es homogénea con terna $(0,b,0)$, luego

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}(v\ddagger S_t|\sigma) &= \int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}^+}\mathcal{C}(vk(r,t-s,0)\,\sigma_s(r)\ddagger L'(r,s))\,drds \\
&= -\frac{1}{2}v^2 b\int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}^+}k^2(r,t-s,0)\,\sigma_s^2(r)\,dr.
\end{aligned}
$$

Ahora bien, si $k$ puede ser factorizada como en (3.1.6), el proceso LSS

$$
S'_t := \int_{-\infty}^{t}\phi(t-s)\,\overline{\sigma}_{s-}dL_s,
$$

donde $L$ es un proceso de Lévy indexado por la recta real con terna $(0,b,0)$ y

$$
\overline{\sigma}_t := \left(\int_{\mathbb{R}^+}\psi^2(r,0)\,\sigma_t^2(r)\,dr\right)^{1/2}, \quad t\in\mathbb{R},
$$

cumple

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}(v\ddagger S'_t|\sigma) &= \int_{-\infty}^{t}\mathcal{C}(\phi(t-s)\,\overline{\sigma}_s\ddagger L_s)\,ds \\
&= -\frac{1}{2}v^2 b\int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}^+}k^2(r,t-s,0)\,\sigma_s^2(r)\,dr,
\end{aligned}
$$

de ahí que

$$
S_t \stackrel{d}{=} S'_t, \quad t\in\mathbb{R},
$$

lo cual indica que bajo el contexto de HJM, el precio spot es realmente un proceso de LSS. Una discusión más amplia sobre la modelación del precio spot por medio de procesos LSS puede ser vista en el trabajo de Barndorff-Nielsen y cols. (2010c).

### El efecto Samuelson

El efecto Samuelson (1965), es el hecho (empírico) de que la volatilidad del precio forward es creciente y converge a la volatilidad del spot cuando la fecha de entrega está próxima a iniciar.

En términos económicos, el efecto Samuelson refleja el hecho de que la información que llega a el mercado cuando la vida del contrato está por concluir, tiene mucha mayor influencia en éste a comparación de una inversión a largo plazo, pues en la segunda el mercado tiene el tiempo suficiente para ajustarse a los requerimientos de los agentes, en contraste con una estrategia a corto plazo, la cual es mucho más sensitiva a los cambios en el precio.

**Teorema 3.3.2** *Supongamos que el mapeo $x \to k(r,s,x)$ es monótonamente decreciente para $(r,s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Entonces para todo $t \in \mathbb{R}$, el mapeo $x \to Var[f(t,x)]$ es decreciente. En adición, si (3.3.5) es válida, se obtiene que*

$$Var[f(t,x)] \uparrow Var(S_t), \quad \text{cuando } x \downarrow 0.$$

**Demostración.** Al ser $L$ $\mathcal{L}^2$-valuada con media cero

$$Var(f(t,x)) = \mathbb{E}\left[f^2(t,x)\right],$$

además, por (2.2.8) y (2.2.17)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f^2(t,x)\,|\sigma\right] &= \int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}^+} b(s,r)\,k^2(r,t-s,x)\,\sigma_s^2(r)\,\lambda(dr,ds) \\ &\quad+\int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}} y^2k^2(r,t-s,x)\,\sigma_s^2(r)\,\rho(r,s,dy)\,\lambda(dr,ds),\end{aligned}$$

razón por la cual

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f^2(t,x)\right] &= \int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}^+} k^2(r,t-s,x)\,\mathbb{E}\left[\sigma_s^2(r)\right] b(s,r)\,\lambda(dr,ds) \\ &\quad+\int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}} y^2k^2(r,t-s,x)\,\mathbb{E}\left[\sigma_s^2(r)\right]\rho(r,s,dy)\,\lambda(dr,ds),\end{aligned}$$

siendo está última claramente monótona decreciente en $x$ pues $k$ lo es.

Ahora bien, si (3.3.5) se mantiene, $f(t,x) \xrightarrow{\mathcal{L}^2(\widetilde{\mathbb{P}})} S_t$ cuando $x \downarrow 0$, consecuentemente

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow 0}\mathbb{E}\left[f^2(t,x)\right] &= \mathbb{E}\left[S_t^2\right] \\ &= Var(S_t),\end{aligned}$$

■

### Estructura de segundo orden

A continuación se describe la estructura de segundo orden que posee el precio forward bajo (3.2.8), siendo de interés su función de correlación. Para esto vamos a suponer que $L$ es una base de Lévy homogénea con terna $(a, b, \eta)$.

**Teorema 3.3.3** *Para cualquier* $t, t_1, t_2, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, *con* $t_1 \geq t_2$

$$\mathbb{E}\left[f^2(t,x)\right] = (\kappa + b)\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+} k^2(r,s,x)\,\mathbb{E}\left[\sigma_s^2(r)\right] drds,$$

*y*

$$\mathbb{E}\left[f(t_1,x_1) f(t_2,x_2)\right] = (\kappa + b)\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+} k(r,s,x_1)\, k(r, s+(t_1-t_2), x_2)\,\mathbb{E}\left[\sigma_s^2(r)\right] drds,$$

*donde*

$$\kappa = \int_{\mathbb{R}} y^2 \eta(dy).$$

**Demostración.** Por (2.2.17), para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f^2(t,x)\right] &= b\int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}^+} k^2(r,t-s,x)\,\mathbb{E}\left[\sigma_s^2(r)\right] drds \\
&\quad + \int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}} y^2 k^2(r,t-s,x)\,\mathbb{E}\left[\sigma_s^2(r)\right]\eta(dy)\,drds \\
&= (\kappa + b)\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+} k^2(r,z,x)\,\mathbb{E}\left[\sigma_0^2(r)\right] drdz,
\end{aligned}$$

y para $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \geq 0$, por la propiedad IS

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f(t_1,x_1) f(t_2,x_2)\,|\sigma\right] &= \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^+} k(r,t_1-s,x_1)\,\sigma_s(r)\,W(dr,ds)\right. \\
&\quad \left.\times\int_{-\infty}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^+} k(r,t_2-s,x_2)\,\sigma_s(r)\,W(dr,ds)\right|\sigma\Bigg] \\
&\quad +\mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}} yk(r,t_1-s,x_1)\,\sigma_s(r)\left[N(dy,dr,ds)-\eta(dy)\,drds\right]\right. \\
&\quad \left.\times\int_{-\infty}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}} yk(r,t_2-s,x_2)\,\sigma_s(r)\left[N(dy,dr,ds)-\eta(dy)\,drds\right]\right|\sigma\Bigg] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^+} k(r,t_1-s,x_1)\,\sigma_s(r)\,W(dr,ds)\right. \\
&\quad \left.\times\int_{-\infty}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^+} k(r,t_2-s,x_2)\,\sigma_s(r)\,W(dr,ds)\right|\sigma\Bigg] \\
&\quad +\mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}} yk(r,t_1-s,t_1)\,\sigma_s(r)\left[N(dy,dr,ds)-\eta(dy)\,drds\right]\right. \\
&\quad \left.\times\int_{-\infty}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}} yk(r,t_2-s,x_2)\,\sigma_s(r)\left[N(dy,dr,ds)-\eta(dy)\,drds\right]\right|\sigma\Bigg]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= b\int_{-\infty}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^+} k\left(r,t_1-s,x_1\right)k\left(r,t_2-s,x_2\right)\sigma_s^2\left(r\right)drds \\ &\quad+\int_{-\infty}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}} y^2 k\left(r,t_1-s,x_1\right)k\left(r,t_2-s,x_2\right)\sigma_s^2\left(r\right)\eta\left(dy\right)drds, \end{aligned}$$

de ahí que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[f\left(t_1,x_1\right)f\left(t_2,x_2\right)\right] &= \left(\kappa+b\right)\int_{-\infty}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^+} k\left(r,t_1-s,x_1\right)k\left(r,t_2-s,x_2\right)\mathbb{E}\left[\sigma_0^2\left(r\right)\right]\eta\left(dy\right)drds \\ &= \left(\kappa+b\right)\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+} k\left(r,z,x_1\right)k\left(r,z+\left(t_1-t_2\right),x_2\right)\mathbb{E}\left[\sigma_0^2\left(r\right)\right]drdz, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se hizo el cambio de variable $z=t_1-s$. ■

**Observación 3.3.1** *Por el teorema anterior, la estructura de correlación del contrato forward para $t\in\mathbb{R}$, $x_1,x_2\geq 0$ y $h>0$ toma la forma*

$$Cor\left[f\left(t,x_1\right)f\left(t+h,x_2\right)\right]=\frac{\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+} k\left(r,s,x_1\right)k\left(r,s+h,x_2\right)\mathbb{E}\left[\sigma_0^2\left(r\right)\right]drds}{\left\{\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+} k^2\left(r,s,x_1\right)\mathbb{E}\left[\sigma_0^2\left(r\right)\right]drds\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+} k^2\left(r,s,x_2\right)\mathbb{E}\left[\sigma_0^2\left(r\right)\right]drds\right\}^{1/2}},$$

*de modo que existen dos factores que la determinan en su totalidad: la estructura estacionaria de $\sigma$ y el kernel. Esto permite modelar el impacto que puede existir en un portafolio de inversión que cuente, ya sea con contratos forwards cuyos períodos de entrega sean distintos o bien con aquellos contratos que involucre diferentes tipos de bienes subyacentes (electricidad, gas, temperatura, entre otros).*

### 3.3.3. Cambio de medida

En esta subsección se muestra de manera introductoria una propuesta de cambio de medida a través de la transforma de Esscher, esto con el fin de determinar el comportamiento del precio forward en el mundo real.

Puesto que el modelo que se ha estudiado previamente está diseñado en un mundo de riesgo neutro, es necesario un cambio de medida adecuado que nos permita conocer el comportamiento real del precio, pues la calibración de cualquier modelo está basada en datos que provienen de la medida de probabilidad objetiva no de la neutral al riesgo. En lo que sigue, vamos a suponer que el mercado comercia hasta un horizonte finito $T^*>0$ y que $L$ es una base de Lévy homogénea con semilla $L'$.

**Teorema 3.3.4** *Sea $\theta:(-\infty,T^*]\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ una función determinista $L$-integrable. Supongase que*

$$\mathbb{E}\left(\exp\left\{\int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}^+}\theta\left(s,r\right)L\left(dr,ds\right)\right\}\right)<\infty,\quad\forall\ t\leq T^*,\tag{3.3.6}$$

*entonces el proceso*

$$M_t^\theta := \exp\left\{\int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^+} \theta(s,r)\, L(dr,ds) - \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{C}\left(-i\theta(s,r) \ddagger L'\right) drds\right\}, \quad t \le T^*,$$

*es una* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$*-martingala con media uno.*

**Demostración.** Gracias (3.3.6) $M^\theta \in \mathcal{L}^1\left(\widetilde{\mathbb{P}}\right)$, además por la propiedad IS de $L$ y (2.2.6), para cada $t \ge u$, $M_t^\theta$ tiene media uno y

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(M_t^\theta | \mathcal{F}_u\right) &= M_u^\theta \exp\left\{-\int_u^t \int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{C}\left(-i\theta(s,r)\ddagger L'\right) drds\right\} \\
&\quad \times \mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\exp\left\{\int_u^t \int_{\mathbb{R}^+} \theta(s,r)\, L(dr,ds)\right\}\middle| \mathcal{F}_u\right) \\
&= M_u^\theta,
\end{aligned}$$

es decir, $M^\theta$ es una martingala. ■

La relación usada para obtener a $M^\theta$ en el teorema anterior es conocida como la transformada de Esscher. Haciendo uso de $M^\theta$, se puede definir una medida de probabilidad $\mathbb{P}^\theta$ equivalente a $\widetilde{\mathbb{P}}$ con derivada de Radon-Nikodym dada por

$$\frac{d\mathbb{P}^\theta}{d\widetilde{\mathbb{P}}}|_{\mathcal{F}_t} = M_t^\theta, \quad t \le T,$$

la cual se entenderá como la medida objetiva del mercado. Aquí $\mathbb{P}^\theta$ depende de la función $\theta$, la cual es entendida como el precio del riesgo de mercado, esto es, la medida de la utilidad que un inversionista exige por mantener una posición en un activo riesgoso (el rendimiento por ejemplo). Bajo este cambio de medida

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[e^{ivf(t,x)}\right] &= \mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left[\exp\left\{\int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{C}\left(k(r,t-s,x)\,\sigma_s(r) - i\theta(s,r)\ddagger L'\right) drds\right\}\right] \\
&\quad \times \exp\left\{-\int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{C}\left(-i\theta(s,r)\ddagger L'\right) drds\right\}, \quad t \le T,
\end{aligned}$$

de modo que cuando $\sigma$ es determinista

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{\mathbb{P}}\left(v\ddagger f(t,x)\right) &= \exp\left\{\int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{C}\left(k(r,t-s,x)\,\sigma_s(r) - i\theta(s,r)\ddagger L'(r,s)\right) drds\right\} \\
&\quad \times \exp\left\{-\int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{C}\left(-i\theta(s,r)\ddagger L'(r,s)\right) drds\right\}, \quad t \le T,
\end{aligned}$$

lo cual nos permite obtener la distribución de $f$ bajo $\mathbb{P}^{\theta}$.

### 3.3.4. Algunos ejemplos y el problema de calibración

En esta subsección se presentan algunas dinámicas concretas del precio forward, es decir, se muestran de manera explicita algunas funciones kernel, se propone además una dinámica para la volatilidad $\sigma$ y una posible elección de la semilla.

#### La base de Lévy

Como se comento anteriormente, la distribución hiperbólica generalizada parece ajustar bien a la serie de precios de electricidad, por lo que se puede suponer en algunos casos que

$$\mathcal{C}\left(v\ddagger L'\left(r,s\right)\right) = i\mu v + \log\left\{\left(\frac{\gamma^2-\beta^2}{\gamma^2+\left(\nu-i\beta\right)^2}\right)^{\phi/2}\frac{K_\phi\left(\delta\sqrt{\gamma^2+\left(\nu-i\beta\right)^2}\right)}{K_\phi\left(\delta\sqrt{\gamma^2-\beta^2}\right)}\right\},$$

con $\mu,\beta,\phi,\gamma$ y $\delta$ como en la Definición 2.1.4.

#### Elección del kernel

Una familia de funciones kernel que parecen ser adecuadas en términos de modelación, son aquellas que admiten una factorización del tipo

$$k\left(r,t-s,x\right) = \phi\left(t-s\right)\psi\left(r,x\right), \quad x,r\geq 0 \text{ y } s,t\in\mathbb{R},$$

pues si consideramos a

$$\phi\left(s\right) = e^{-\alpha s}, \quad s\geq 0, \alpha > 0,$$

el precio forward se obtiene como una superposición de procesos del tipo Ornstein-Uhlenbeck. Otro punto importante en esta factorización es que la condición de no arbitraje que se considera en el Corolario 3.3.1, puede ser cubierta. Para ver esto, supongamos que $\phi$ es como en (3.3.7) y además que

$$\psi\left(r,x\right) = e^{\alpha(r-x)},$$

esto implica que

$$k\left(r,t-s,T-t\right) = e^{-\alpha(r+T-s)}, \quad s\leq T \text{ y } r\geq 0. \tag{3.3.7}$$

Es conveniente resaltar que bajo este contexto el modelo refleja el efecto Samuelson, pues $\psi$ es decreciente en su segunda variable además de continua, lo suficiente para que la consecuencia del Teorema 3.3.2 se mantenga. Con respecto a este tema, algunos autores argumentan que dicho efecto es mucho más pronunciado en mercados de electricidad, así que la elección de un kernel exponencial no parece ser adecuado en algunos casos, sino más bien funciones hiperbólicas del tipo

$$\Psi\left(t-s,x\right)=\frac{a}{t-s+x+b},$$

donde $a,b\geq 0$. En resumidas cuentas, si $k$ toma la forma

$$k\left(r,t-s,x\right)=\Phi\left(r\right)\Psi\left(t-s,x\right),\quad x,r\geq 0 \text{ y } s,t\in\mathbb{R}, \tag{3.3.8}$$

el mercado es libre de arbitraje y posee un efecto Samuelson mucho más marcado en comparación a la factorización presentada (3.3.7).

### Un modelo para la volatilidad

Un enfoque de modelación universal capaz de captar la variabilidad que existe en la serie de precios, es hasta el momento uno de los problemas más complejos que existen en matemáticas financieras, de modo que una correcta elección en la volatilidad para el modelo presentado en secciones previas es de extrema importancia. Con el fin de mantenernos en el contexto ambit, se puede suponer (cuando sea pertinente) que

$$\sigma^2{}_t\left(x\right)=V\left(\int_{\widetilde{A}_t(x)}\widetilde{k}\left(r,t-s,x\right)L^{\sigma}\left(dr,ds\right)\right),\quad x\geq 0 \text{ y } t\in\mathbb{R},$$

donde $\widetilde{A}_t\left(x\right)$ es un conjunto ambit, $L^{\sigma}$ una base de Lévy, $\widetilde{k}$ un kernel no negativo y $V:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^+$ una función continua. Aquí $L^{\sigma}$ puede ser homogénea y estar asociada a una familia de semillas distribuidas como una inversa gaussiana generalizada, esto con el fin de obtener una volatilidad basada en tal distribución (de igual manera que la distribución hiperbólica generalizada). En este sentido, como un análogo a los procesos de Ornstein-Uhlenbeck con reversión a la media, se puede suponer en algunos casos que $\widetilde{k}$ es como en (3.3.7), por lo que

$$\sigma^2_t\left(x\right)=\int_{\widetilde{A}_t(x)}e^{-\alpha(r+T-s)}L^{1}\left(dr,ds\right),\quad x\geq 0 \text{ y } t\in\mathbb{R}. \tag{3.3.9}$$

Además, en vista de que para una v.a. inversa gaussiana generalizada $W$

$$\mathcal{C}\left(v\ddagger W\right)=\left(\frac{\gamma^2}{\gamma^2-2iv}\right)^{\phi/2}\frac{K_{\phi}\left(\delta\sqrt{\gamma^2-2iv}\right)}{K_{\phi}\left(\gamma\delta\right)},\quad v\in\mathbb{R},$$

es posible obtener de manera explicita la distribución de $\sigma$ mediante la función cumulante

$$\mathcal{C}\left(v\ddagger\sigma^2_t\left(x\right)\right)=\int_{\widetilde{A}_t(x)}\left(\frac{\gamma^2}{\gamma^2-2ive^{-\alpha(r+T-s)}}\right)\frac{K_{\phi}\left(\delta\sqrt{\gamma^2-2ive^{-\alpha(r+T-s)}}\right)}{K_{\phi}\left(\gamma\delta\right)}drds,\quad x\geq 0 \text{ y } t,v\in\mathbb{R}.$$

### Calibración del modelo

Al igual que para el caso de coordenada espacial nula, propiedades distribucionales sobre la integral estocástica con respecto a una base de Lévy son hasta el momento reducidos. Esto provoca que la calibración dependa fuertemente del comportamiento del precio, pero al no existir de manera física los contratos forwards (sino más bien los swaps), la inferencia recae enteramente en su comportamiento estacional (ver Barndorff-Nielsen y cols. (2010b, Capítulo 10)). Sin embargo, en presencia de volatilidad estocástica el problema de inferencia continua abierto, pues en este caso la estructura de segundo orden del precio está directamente relacionada con la configuración estacionario del proceso $\sigma$, la cual debe ser estimada.

# Capítulo 4

# Ventajas, desventajas y consideraciones adicionales

El contenido de este capítulo está enfocado a mostrar algunas ventajas y desventajas que posee el modelo para el precio forward que se presentó en el capitulo anterior. Se expone además una posible dinámica del tipo geométrica la cual se basa (al igual que el modelo aritmético) en campos ambit. Finalmente se plantea de manera introductoria el proceso ambit asociado al precio forward y se calcula de manera heurística la ecuación de evolución asociada.

## 4.1. Algunas ventajas y desventajas

En esta sección se comentan varios atributos e inconvenientes propios del enfoque de modelación presentado. Se hace énfasis en la estructura parsimoniosa que los campos ambit presentan así como la capacidad que estos tienen para reproducir las propiedades atípicas de los mercados de electricidad, entre las cuales se encuentran principalmente la estacionalidad, volatilidad estocástica y grandes *picos* en la serie de precios. Se discute también el hecho de que el modelo permite precios negativos, la poca cobertura que tiene en la valuación de derivados así como la ausencia de flexibilidad en el kernel debido al supuesto de no arbitraje.

### Hechos a resaltar

Al ser la electricidad un bien no almacenable, el precio de ésta está completamente expuesto a las variaciones que puedan ocurrir en la oferta y la demanda que impera por parte de productores y consumidores. Esto se refleja en los excesivos brincos que saltan a la luz en la serie de precios, en este sentido, la dinámica propuesta en (3.2.8) capta tal susceptibilidad en las alzas y bajas por medio de la tercera medida característica de la base $L$.

Por otro lado, el Teorema 3.3.3 muestra que la volatilidad del precio forward así como la del bien subyacente, depende completamente de la estructura del kernel y del proceso $\sigma$, jugando este último el papel de la volatilidad estocástica pues es el factor estocástico que compensa la tendencia, ya sea a la alza o a la baja, de la base de Lévy.

En mercados financieros clásicos, la variabilidad estocástica presente en el precio de un activo, es comúnmente modelada por un proceso estacionario no negativo con reversión a la media; por ejemplo el proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Sin embargo, existe fuerte evidencia empiríca que dicha variabilidad tiende a comportarse de manera diferente en épocas económicamente distintas, como en crisis financieras, brotes de enfermedades, estabilidad económica entre otras. Esto sugiere que el proceso de volatilidad no sólo depende del tiempo sino también de una componente espacial, la cual puede ser entendida como el tiempo o la época en la que un agente comercia en el mercado. Lo anterior en cierto modo inspira la forma de $\sigma$ en la ecuación (3.3.9), pues por lo discutido anteriormente un campo ambit enfocado a la modelación de la volatilidad estocástica parece ser una buena elección. Así pues, el contexto de modelación ambit puede no sólo enfocarse en bienes no almacenable, sino más bien en una basta colección de activos financieros en donde se perciba la presencia de volatilidad estocástica.

Otro problema que crea la falta de almacenamiento junto con el procedimiento de obtención del precio es un mercado altamente ilíquido, pues al derivarse el valor del producto mediante subastas, la demanda excede a la oferta en algunas temporadas y viceversa, por lo que no es siempre posible tomar una posición en un contrato físico o financiero.

La presencia de iliquidez en un sistema financiero provoca que el proceso de precios dependa fuertemente de las estrategias de inversión que los agentes crean, a causa de que éstas se basan en la compra y venta del activo, de modo que el precio puede tener cambios drásticos vinculados a las decisiones de los inversionistas. Bajo este contexto, el proceso $\sigma$ junto con la base de Lévy, dotan al modelo con la capacidad de captar y adherir la falta de liquidez que existe en los mercados en cuestión.

Relacionado de igual manera con la falta de almacenamiento es la ausencia de portafolios de inversión que contengan a la electricidad, lo cual, como se explicó en el Capítulo 1, imposibilita una definición precisa de arbitraje. En lo que respecta a este problema, el modelo (en particular el Teorema 3.3.1) posibilita trabajar de manera flexible con bienes subyacentes no almacenables, así como con activos clásicos separandolos únicamente la forma del kernel. De esta manera el enfoque de modelación puede no ser sólo usado en mercados de energía, sino como una dinámica general.

## Inconvenientes en la modelación

Si bien el modelo propuesto logra captar las propiedades estilizadas que imperan en el mercado de electricidad (mercados con activos no almacenables), éste presenta varios problemas de modelación, entre los que se pueden mencionar negatividad en el precio, poca flexibilidad en la valuación de derivados y una fuerte dependencia en el kernel.

El hecho de que en (3.2.8), la base de Lévy $L$ tenga media cero excluye totalmente a bases de Lévy positivas, lo cual repercute en el signo del precio forward. Un precio negativo puede ser entendido como un beneficio monetario que ofrecen los vendedores con el fin de que sus productos sean consumidos. En mercados de acciones tal situación no ocurre de manera regular (por no decir que nunca), sin embargo en mercados de tasas de interés esto puede llegar a ocurrir con frecuencia. Si la diferencia entre la tasa libre de riesgo y la tasa de inflación de un país es negativa, el inversionista realmente está teniendo una perdida (segura) cuando realiza una inversión sin riesgo. Es decir, el valor de una unidad monetaria no crece con el tiempo sino todo lo contrario, lo cual es posible sólo con tasas negativas. En mercados de energía el fenómeno de precios negativos es real, pues los productores llegan a pagar por que la energía producida sea consumida. Esta situación se presenta como una medida de ajuste en la producción, pues usualmente las plantas de energía operan a su máxima capacidad creándose una fuerte dependencia a la demanda existente, por lo que si ésta disminuye los fabricantes tiene que almacenarla, lo cual no es rentable en comparación con el pago para el consumo. En resumidas cuentas, precios negativos en el spot pueden ser explicados bajo una argumento de costo-beneficio, pero estos parecen ser más bien sucesos raros. Si el modelo busca ser universal, tal restricción en la base debe ser debilitada, dicho problema es discutido en Márquez y cols. (2012).

Si bien el Teorema 3.3.1 da al modelo la posibilidad de describir el precio forward desde el enfoque de semimartingalas, la condición requerida es más bien restrictiva, pues acorta los métodos de calibración al limitar las posibles elecciones del kernel. En caso de que la calibración sea viable, un problema de mayor índole persiste; el de la valuación de activos contingentes. La asignación de un precio justo a contratos financieros que depende del precio de un activo, ha sido una de los problemas más estudiados en matemáticas financieras. La estipulación de un precio para una opción de compra europea es, no sólo por su sencillez sino también por ser uno de los derivados más comunes, un objeto de investigación desde el siglo pasado. El hecho de que el modelo presentado previamente no sea capaz de atacar este problema de manera óptima nos conlleva a un replanteamiento del mismo.

## 4.2. Posibles extensiones

En esta sección se presentan dos posibles extensiones del modelo propuesto en (3.2.8). La primera es la versión geométrica de dicho enfoque. Como segunda extensión, se considera una posible ecuación de evolución para el precio forward basada en el proceso ambit inducido por la curva $(t, T-t)_{t \leq T}$.

### 4.2.1. El modelo geométrico

En esta parte se expone de manera introductoria un modelo geométrico para el precio forward el cual está baso en campos ambit.

Si se quiere evitar precios negativos en el spot se puede trabajar con bases de Lévy no negativas o se puede pensar que el proceso dado en (3.2.8) es más bien el rendimiento logarítmico, esto es

$$f(t,x)=\exp\left\{\int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}^+}k(r,t-s,x)\,\sigma_s(r)\,L(dr,ds)\right\},\quad t\in\mathbb{R},x\geq 0,\tag{4.2.1}$$

y consecuentemente

$$S_t=\exp\left\{\int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}^+}k(r,t-s,0)\,\sigma_s(r)\,L(dr,ds)\right\},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Sin embargo, bajo este enfoque tanto el precio forward como el precio spot ya no son más una martingala, por lo que un replanteamiento en (4.2.1) es necesario.

**Teorema 4.2.1** *Supongamos que para cualquier $T>0$*

$$\mathbb{E}\left(\exp\left\{\int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}^+}\mathcal{C}\left(-ih(r,s,T)\,\sigma_s(r)\ddagger L'\right)drds\right\}\right)<\infty,\quad\forall\ t\leq T,\tag{4.2.2}$$

*donde $L'$ es la semilla de una base de Lévy homogenea $L$ y el campo $\{h(r,s,T)\,\sigma(s,r)\}_{s\in\mathbb{R},r\geq 0}$ es integrable con respecto a $L$. Entonces para $t\leq T$, el proceso*

$$F(t,T):=\exp\left\{\int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}^+}h(r,s,T)\,\sigma_s(r)\,L(dr,ds)-\int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}^+}\mathcal{C}\left(-ih(r,s,T)\,\sigma_s(r)\ddagger L'\right)drds\right\},$$

*es una $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$-martingala.*

**Demostración.** Obsérvese que por (4.2.2) $\mathbb{E}[F(t,T)]<\infty$ para cual quier $t\leq T$, además dados $t_2\leq t_1\leq T$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[F(t_1,T)|\,\mathcal{F}_{t_2}\right] &= F(t_2,T)\,\mathbb{E}\left[\exp\left\{\int_{t_2}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^+}h(r,s,T)\,\sigma_s(r)\,L(dr,ds)\right.\right.\\ &\left.\left.\left.-\int_{t_2}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^+}\mathcal{C}\left(-ih(r,s,T)\,\sigma_s(r)\ddagger L'\right)drds\right\}\right|\mathcal{F}_{t_2}\right].\end{aligned}\tag{4.2.3}$$

Considérese la filtración aumentada

$$\widetilde{\mathcal{F}}_t:=\mathcal{F}_t\vee\mathcal{G}^\sigma,\quad t\in\mathbb{R},$$

donde $\mathcal{G}^\sigma$ es la $\sigma$-álgebra generada por el campo $\sigma$ y definamos

$$H_{t,u}:=\mathbb{E}\left(\exp\left\{\int_{u}^{t}\int_{\mathbb{R}^+}h(r,s,T)\,\sigma_s(r)\,L(dr,ds)\right\}\middle|\,\mathcal{F}_u\right),$$

entonces por la propiedad de anidamiento y la ecuación (2.2.6)

$$\begin{aligned} H_{t_1,t_2} &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\exp\left\{\int_{t_2}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^+} h\left(r,s,T\right)\sigma_s\left(r\right)L\left(dr,ds\right)\right\}\middle|\,\widetilde{\mathcal{F}}_{t_2}\right)\middle|\,\mathcal{F}_{t_2}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\int_{t_2}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{C}\left(ih\left(r,s,T\right)\sigma_s\left(r\right)\ddagger L'\right)drds\right\}\middle|\,\mathcal{F}_{t_2}\right]. \end{aligned}$$

Aplicando tanto la ecuación anterior como la propiedad de anidamiento a (4.2.3) se obtiene lo deseado. ■

El teorema anterior nos permite diseñar un mecanismo que nos permita describir el precio forward bajo el contexto ambit sin permitir arbitraje en el sentido clásico.

### 4.2.2. El proceso ambit asociado al precio forward

Finalmente exponemos de manera heurística la ecuación de evolución asociada al proceso ambit dado en (3.3.1) bajo el contexto de semimartingalas.

En matemáticas financieras es usual describir el comportamiento del precio de un activo riesgoso mediante una ecuación diferencial estocástica, pues permite dar una interpretación a través de las diferencias (retornos) del precio, lo cual posibilita adherir algunos hechos empíricos encontrados en la serie de datos por medio del diferencial estocástico. En este sentido, el poder representar el precio forward mediante una ecuación de evolución, proporciona la capacidad de describir de manera económica los factores que afectan al cambio del valor del bien subyacente.

Notemos que la evolución para el precio forward obtenida a través de la relación (3.3.1) es realmente el proceso ambit inducido por la curva $\{(t,T-t), t\leq T\}$ para $T>0$. Por el Corolario 3.3.1, si el kernel del campo ambit $f$ toma la forma

$$\widetilde{k}\left(r,T-s\right)=k\left(r,t-s,T-t\right),\quad \forall\ s\leq t\leq T, r\geq 0,$$

entonces para $0\leq t\leq T$

$$dX_t=\int_{\mathbb{R}}\widetilde{k}\left(r,T-s\right)\sigma_s\left(r\right)L\left(dr,dt\right),$$

donde

$$X_t=f\left(t,T-t\right).$$

Sin embargo en el caso general no es posible determinar si su diferencial estocástica existe, en contraparte, si $X$ es una semimartingala dicho operador siempre puede ser obtenido, además de que en este caso podemos argumentar de manera *formal* que $X$ sigue la ecuación de evolución

$$
\begin{aligned}
dX_t &= \int_{\mathbb{R}} k\left(r,0+,T\right)\sigma_s\left(r\right)L\left(dr,dt\right)+\int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial y}k\left(r,y,T-t\right)|_{y=t-s}\sigma_s\left(r\right)L\left(dr,ds\right)dt \\
&\quad -\int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial z}k\left(r,t-s,z\right)|_{y=T-t}\sigma_s\left(r\right)L\left(dr,ds\right)dt,
\end{aligned}
$$

donde se ha supuesto que la regla de Leibniz aplica para la integral estocástica. Lo expuesto previamente nos permite concluir que para $t \geq 0$, $X$ puede descomponerse como

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

donde

$$M_t := \int_0^t \int_{\mathbb{R}} k\left(r,0+,T\right)\sigma_s\left(r\right)L\left(dr,ds\right),$$

y

$$
\begin{aligned}
A_t &:= \int_0^t \int_{-\infty}^{u}\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial y}k\left(r,y,T-t\right)|_{y=t-u}\sigma_s\left(r\right)L\left(dr,ds\right)du \\
&\quad -\int_0^t \int_{-\infty}^{u}\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial z}k\left(r,u-s,z\right)|_{y=T-t}\sigma_s\left(r\right)L\left(dr,ds\right)dt,
\end{aligned}
$$

donde el primero, gracias al Teorema 3.3.1, es una martingala y $A$ es de variación acotada. Condiciones generales en el conjunto ambit y en el kernel que permitan garantizar que un proceso ambit es una semimartingala siguen siendo desconocidas, lo cual motiva a un estudio mucho más detallado de campos y procesos ambit en futuras investigaciones.

# Conclusiones

Desde el punto de vista de modelación, los mercados de energía han mostrado ser todo un reto, pues la carencia de estrategias de cobertura provoca que el enfoque tradicional de semimartingalas no sea adecuado. Esto se debe principalmente a los altos costos de almacenaje de algunos energéticos (electricidad, gas y temperatura), siendo éste su sello distintivo. En capítulos anteriores se mostró el arduo trabajo que puede llegar a ser la modelación cuando nos distanciamos del marco de las semimartingalas, pues si bien los campos y procesos ambit pueden describir varias de las anomalías que los mercados de electricidad padecen, la teoría que se necesita para comprenderlos es extensa, ya que requieren de un alto conocimiento en temas avanzados de teoría de la probabilidad. No obstante, el enfoque ambit ha resultado ser bastante parsimonioso al momento de ser implementado, pues los parámetros necesarios son reducidos.

La vulnerabilidad que el precio spot padece ante la oferta y la demanda de productores y consumidores lo convierte en un activo altamente volátil, provocando un mercado que en muchas ocasiones no puede cubrir el requerimiento de los usuarios y en otras tantas sufre de un exceso de fabricación. En este contexto, una buena modelación de la volatilidad es imprescindible, la cual debe poseer la capacidad de captar situaciones de déficit y superávit en el sistema. En este sentido un campo ambit puede recuperar tal comportamiento, ya que la coordenada espacial mide el tiempo de comercio en el cual se está mercando el bien energético.

El contrato forward no es propio de los mercados de energía, de hecho es una de los contratos financieros más comerciado, siendo usado incluso por varios gobiernos como un medio para cubrirse de posibles desplomes económicos. En mercados de tasas de interés, la tasa forward juega el mismo papel que el precio forward, salvo que el activo principal es el bono referenciado a una tasa libre de riesgo. Si bien es cierto que los contratos futuros en mercados de energía comparten muchas similitudes con la tasa forward, se debe aclarar el hecho de que los saltos en el precio del segundo son mucho más suaves que en el primero, es decir, los picos encontrados en las series de datos del primero son mucho más pronunciados que en el de tasas de interés, lo cual se debe, a la iliquidez que impera. Puesto que la variabilidad en el modelo presentado en capítulos anteriores está regida principalmente por el proceso $\sigma$, la elección de éste brinda cierta universalidad, pues además de permitir un ajuste en los saltos puede adaptarse a mercados donde exista evidencia de volatilidad estocástica, siendo los de tasas de interés un buen ejemplo.

Aunque opciones del tipo europea no se comercian en grandes cantidades en mercados de electricidad, una metodología que proporcione un valor para el derivado siempre es vital. Desafortunadamente argumentos estándar de valuación no parecen ser del todo apropiados a causa de la ausencia de una definición clara de arbitraje que impera en tales mercados. En espíritu de lo anterior, la dinámica expuesta en el Capítulo 3 del presente trabajo carece de medios de valuación que vayan más allá del supuesto de no arbitraje el cual está ligado directamente con el enfoque de semimartingalas. Como se ha comentado en varias ocasiones, éste restringe fuertemente el trabajo de modelación.

En resumen, los campos y procesos ambit pueden captar desde los efectos financieros más simples hasta la estructura más compleja sin dejar de ser parsimoniosos. A partir de ellos es posible hacer una conexión entre los mercados clásicos y aquellos cuyo mecanismo es más bien inusual, permitiéndonos crear un enfoque lo suficientemente universal el cual facilita la descripción de una basta cantidad de series de precios. No obstante, el problema de calibración existente impide testearlo de manera rigurosa, pues no es posible especificar los componentes del modelo ya que los métodos de inferencia son limitados. Estos problemas son dejados para futuros trabajos, en donde también pudiera ser interesante aplicar el enfoque ambit a la modelación de la estructura terminal y el efecto *smile* en mercados de tasas de interés.

# Referencias


Barndorff-Nielsen, O. E., Benth, F. E. y Veraart, A. E. D. (2010a, abril). *Ambit processes and stochastic partial differential equations* (CREATES Research Papers n.º 2010-17). School of Economics and Management, University of Aarhus.

Barndorff-Nielsen, O. E., Benth, F. E. y Veraart, A. E. D. (2010b, agosto). *Modelling electricity forward markets by ambit fields* (CREATES Research Papers n.º 2010-41). School of Economics and Management, University of Aarhus.

Barndorff-Nielsen, O. E., Benth, F. E. y Veraart, A. E. D. (2010c, abril). *Modelling energy spot prices by Lévy semistationary processes* (CREATES Research Papers n.º 2010-18). School of Economics and Management, University of Aarhus.

Barndorff-Nielsen, O. E. y Halgreen, C. (1977). Infinite divisibility of the hyperbolic and generalized inverse gaussian distributions. *Probability Theory and Related Fields*, *38*(4), 309–311.

Barndorff-Nielsen, O. E., Jensen, E., Jónsdóttir, K. y Schmiegel, J. (2007). Spatio-temporal modelling - with a view to biological growth. *To appear in Statistics of Spatio-Temporal Systems, Monographs on Statistics and Applied Probability, Chapman & Hall/CRC*, 47-75.

Barndorff-Nielsen, O. E. y Schmiegel, J. (2003). Lévy-based tempo-spatial modelling; with applications to turbulence. *Uspekhi Mat. Nauk*(159), 65-91.

Barndorff-Nielsen, O. E. y Schmiegel, J. (2007). Ambit processes; with applications to turbulence and cancer growth. *Stochastic Analysis and Applications: The Abel Symposium 2005*.

Barndorff-Nielsen, O. E. y Schmiegel, J. (2009). Brownian semistationary processes and volatility/intermittency. *Albrecher, H., Rungaldier, W. and Schachermeyer, W. (Eds.): Advanced Financial Modelling*, 1-26.

Basse-O'Connor, A., Graversen, S. E. y Pedersen, J. (2010). Martingale-type processes indexed by the real line. *Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics*, *7*, 117-137.

Basse-O'Connor, A., Graversen, S.-E. y Pedersen, J. (2012). A unified approach to stochastic integration on the real line. *To appear in Theory of Probability and Its Applications*.

Benth, F. E., Benth, J. y Koekebakker, S. (2008). *Stochastic modeling of electricity and related markets* (Vol. 11). World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Benth, F. E. y Koekebakker, S. (2008). Stochastic modeling of financial electricity contracts. *Energy Economics*, *30*(3), 1116-1157.

Brace, A. y Musiela, M. (1994). A multifactor Gauss Markov implementation of heath, jarrow, and morton. *Mathematical Finance*(4), 259-283.

Capinski, M. y Zastawniak, T. (2003). *Mathematics for finance: An introduction to financial engineering (springer undergraduate mathematics series)*. Springer.

Carmona, R. y Ludkovski, M. (2004). Spot convenience yield models for the energy markets. En (Vol. 351, pp. 65–80).

Carmona, R. y Ludkovski, M. (2010). Valuation of energy storage: an optimal switching approach. *Quantitative Finance*, *10*(4), 359-374.

Delbaen, F. y Schachermayer, E. (1994). A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Math. Ann*, *300*, 463–520.

Deng, S. (2000). *Stochastic models of energy commodity prices and their applications: Mean-reversion with jumps and spikes.* Preprint.

Doob, J. L. (1990). *Stochastic processes.* Wiley-Interscience.

Eberlein, E. y Hammerstein, E. (2002, septiembre). *Generalized hyperbolic and inverse gaussian distributions: Limiting cases and approximation of processes* (Inf. Téc.). University of Freiburg.

Goldstein, R. S. (2000). The term structure of interest rates as a random field. *Review of Financial Studies*, *13*(2), 365-84.

Heath, D., Jarrow, R. y Morton, A. (1992, January). Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, *60*(1), 77-105.

Hu, W. (2005). *Calibration of multivariate generalized hyperbolic distributions using the em algorithm, with applications in risk management, portfolio optimization and portfolio credit risk.* Tesis Doctoral no publicada, The Florida State University.

Jacod, J. y Shiryaev, A.Ñ. (2002). *Limit theorems for stochastic processes.* Springer.

Koekebakker, S. y Ollmar, F. (2005). Forward curve dynamics in the Nordic electricity market. *Managerial Finance*, *31*, 73–94.

Márquez, U., Pérez-Abreu, V. y Sauri, O. (2012). *Notes on stochastic integration with respect to Lévy bases.*

Meyer-Brandis, T. y Tankov, P. (2008). Multi-factor jump-diffusion models of electricity prices. *International Journal of Theoretical and Applied Finance (IJTAF)*, *11*(05), 503-528.

Mikosch, T. (1998). *Elementary stochastic calculus with finance in view.* World Scientific.

Pedersen, J. (2003). The Lévy-Itô decomposition of an independently scattered random measure. *MaPhySto preprint MPS-RR.*

Prékopa, A. (1956). On stochastic set functions i. *Acta Math. Acad. Sci. Hung*(7), 215-262.

Prékopa, A. (1957). On stochastic set functions ii, iii. *Acta Math. Acad. Sci. Hung*(8), 337-400.

Rajput, B. S. y Rosinski, J. (1989). Spectral representations of infinitely divisible processes. *Probability Theory and Related Fields*, *82*(3), 451-487.

Samuelson, P. A. (1965). Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. *Industrial Management Review*, *6*, 41–49.

Sato, K. (1999). *Lévy processes and infinitely divisible distributions* (1st ed.). Cambridge University Press.

Sato, K. (2004). Stochastic integrals in additive processes and application to semi-Lévy processes. *Osaka J. Math.*, *41*(1), 211-236.

Shiryaev, A.Ñ. (2008). *Essentials of stochastic finance: Facts, models, theory* (Vol. 3). World Scientific.

Urbanick, K. y Woyczynski, W. (1967). Random integrals and Orlicz spaces. *Bull. Acad. Polon. Sci.*(15), 161-169.

Walsh, J. (1986). *An introduction to stochastic partial differential equations* (Vol. 1180; Inf. Téc.).