Universidad Autónoma de Sinaloa

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

TEORÍA DE PROBABILIDAD BI-LIBRE

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

SAUL ROGELIO MENDOZA JACOBO

DIRECTORES DE TESIS:

DR. OCTAVIO ARIZMENDI ECHEGARAY

DR. CARLOS VARGAS OBIETA

CULIACÁN, SINALOA JULIO 2017

Teoría de Probabilidad Bi-libre

Saul Rogelio Mendoza Jacobo

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Universidad Autónoma de Sinaloa

Julio 2017

Directores de tesis:

Dr. Octavio Arizmendi Echegaray

Dr. Carlos Vargas Obieta

A mi abuelo y padre de crianza, Saul Jacobo,

y a los dos motores de mi vida, Rosario y Sophia.

...les charmes enchanteurs de cette sublime science ne se décèlent dans toute leur beauté qu'à ceux qui ont le courage de l'approfondir.

...los encantos de esta ciencia sublime, sólo se revelan en toda su belleza a aquellos que tienen el valor de profundizar en ella.

Carl Friedrich Gauss

(Carta en Francés a Sophie Germain, 1806)

Agradecimientos

Es humanamente imposible hacer mención de todas y cada una de las personas que contribuyeron en la realización de esta tesis. Agradezco de manera general a mi familia, maestros y amigos, por ser partícipes de mis logros.

Especialmente agradezco a mi abuelo Saul Jacobo por darme el cariño y sustento que me permitió desarrollarme como profesionista y como persona. A mi esposa Rosario por su amor e incondicional apoyo y a mi hija Sophia, que es mi inspiración para ser mejor cada día. Agradezco a mis suegros y cuñados por aceptarme en su familia, también a mi madre y mis hermanos por su fé desmedida en mí.

Quiero agradecer de manera muy especial a mis directores de tesis. Al Dr. Octavio Arizmendi, por su asesoría durante mis veranos científicos y en esta tesis, por exigirme cada vez más y enseñarme que el entusiasmo debe ser aderezado con trabajo. Al Dr. Carlos Vargas, por el incontable número de horas que dedicó a asesorarme y por su constante motivación positiva. A ambos les agradezco su amistad y sus consejos académicos y personales, planeo aprender mucho más de ustedes.

En estas líneas quiero agradecer a tres personas que fueron pilares en mi formación académica. Primero al Dr. Víctor Pérez-Abreu, por ser ejemplo de excelencia y de pasión, y por ser puente de contacto y vinculación de investigadores y alumnos nacionales e internacionales; agradezco también la oportunidad que me dio de trabajar bajo su supervisión en la ayudantía del SNI y que a pesar de la distancia siempre estuvo pendiente de mí; el tema que trabajé ese año y medio, contribuyó significativamente en mi formación y en la realización de esta tesis. Agradezco al Dr. Alfonso Rocha y al Dr. Armando Domínguez por ser excelentes maestros y consejeros, por el tiempo que dedicaron en la revisión de esta tesis y sus valiosos comentarios.

Agradezco también al Dr. Jiun-Chau Wang por sus comentarios sobre mi tesis, por darme su opinión sobre el futuro de la probabilidad bi-libre y sus consejos sobre tener confianza. También agradezco a mi amigo Tulio, por su apoyo y sus consejos.

Por último, agradezco a la Universidad Autónoma de Sinaloa por las becas y apoyos que me otorgaron durante mi carrera y a CONACYT por la beca como ayudante de investigador nacional SNI III (4337) y por la beca de tesis del proyecto 222668 titulado *Probabilidad No Conmutativa y Aplicaciones*.

Contenido

Introducción

El objetivo principal de esta tesis es abordar y exponer de manera detallada los fundamentos de la teoría de probabilidad bi-libre, propuesta por Dan Voiculescu en 2013, y los avances que ha tenido desde entonces.

En 1985 Voiculescu introdujo la teoría de probabilidad libre con el fin de atacar algunos problemas en la teoría de álgebras de operadores. En las últimas décadas la teoría ha ganado reconocimiento por su importante relación con ramas de las matemáticas tales como combinatoria, probabilidad clásica, representaciones de grupos simétricos, como también con algunos modelos matemáticos de la física y teoría de la información, además de su vital importancia en la teoría de matrices aleatorias.

La teoría de probabilidad libre tiene dos enfoques. El primero es analítico, iniciado en 1986 por Voiculescu (consultar [51]), el cual le permitió definir una convolución libre y transformadas importantes, análogo a las transformadas y convolución en probabilidad clásica. El segundo enfoque es puramente combinatorio, propuesto por Speicher en los 90's (leer [45]), con el cual se facilitaron muchos cálculos. Al tener convoluciones libres y usando los dos enfoques se estudiaron las distribuciones infinitamente divisibles libres y con éstas los procesos de Lévy libres, los cuales son bien conocidos hoy en día (ver [2, 3, 11, 12, 23]).

La independencia libre surge del producto libre de espacios de Hilbert, y en este último existen factorizaciones que dan origen a dos operadores: los operadores izquierdos y los derechos. Al modelar variables aleatorias libres, debemos elegir que tipo de operador usar (teniendo las dos opciones anteriores), pero al final, obtenemos resultados equivalentes con ambas elecciones, es decir la elección no afecta en esencia al resultado. En 2013, Dan Voiculescu crea la teoría de probabilidad bi-libre con el fin de estudiar estructuras que distingan dos tipos de variables (caras) y una definición de independencia que utiliza los operadores izquierdos y derechos simultáneamente; estructura que a su vez generaliza la conocida en la teoría de probabilidad libre.

En estos cuatro años, esta generalización ha avanzado considerablemente, teniendo ya análogos a mucho de lo existente en probabilidad libre, y con resultados inesperados como el que las cinco nociones naturales de independencia "viven" allí.

La organización de esta tesis es la siguiente. En el capítulo 1, se presentan de manera breve las definiciones básicas y principales teoremas de la teoría de probabilidad libre, con el fin de generalizar, en capítulos posteriores, todo lo que se exponga en este apartado. Comenzamos definiendo los espacios de probabilidad no conmutativos y la noción de independencia libre, así como algunos ejemplos. Enseguida se presentan las convoluciones libres y principales transformadas en esta teoría, también se presenta el enfoque combinatorio de la probabilidad libre. Después, se exponen los principales resultados y caracterizaciones de las distribuciones infinitamente divisibles libres. Finalmente, definimos los elementos principales del espacio de Fock libre, los cuales aparecerán en repetidas ocasiones en esta tesis.

El capítulo 2 está dedicado al concepto de independencia bi-libre y cumulantes. Comenzamos estudiando el producto libre de espacios y sus principales elementos, lo que será vital para las secciones siguientes. Seguido de esto se presentan las bases de la teoría de probabilidad bi-libre, la definición de las variables de dos caras y una noción adecuada de independencia para esos elementos. Se exponen también ejemplos concretos donde surge la independencia bi-libre de manera natural y se definen las convoluciones bi-libres. Además se presentan los cumulantes bi-libres, con los cuales podemos definir distribuciones de límite central y presentar un teorema de límite central bi-libre.

En el caso libre, podemos escribir las principales transformadas y caracterizaciones importantes en términos de los cumulantes; la idea es tener una relevancia análoga en el caso bi-libre; se parte de un teorema de existencia y unicidad de los cumulantes, después en términos de tales cumulantes se definen las distribuciones de límite central y se enuncian teoremas que garantizan la existencia de las mismas. Finalmente y dado lo anterior se enuncia y demuestra el teorema de límite central bi-libre.

El capítulo 3 incluye todo el trabajo analítico hecho hasta hoy y ejemplos mas sofisticados. Comenzamos estudiando las principales propiedades de la transformada de Cauchy bivariada, enseguida se define la transformada R bi-libre que linealiza la convolución aditiva bi-libre y se hace un detallado estudio de sus propiedades analíticas. Seguido de esto se estudian variables de dos caras donde las variables izquierda y derecha respetan una relación de "casi" conmutación. Estos sistemas se llaman de rango ≤ 1 de conmutación y con estos se obtiene la función principal de un operador completamente no normal que está en términos de los operadores aniquilación y creación en un espacio de Fock. El capítulo termina analizando las propiedades analíticas de las transformadas S y T bi-libres, las cuales se comportan bien con las otras convoluciones bi-libres.

El capítulo 4 presenta el enfoque combinatorio de la probabilidad bi-libre. Se define un látiz de particiones adecuado llamado bi-particiones que no se cruzan, y una sucesión de funciones con una fórmula recursiva análoga a la fórmula momento-cumulante, a los cuales llamamos (l, r)-cumulantes; esto último es suficiente para definir un álgebra de incidencia de ese látiz y usar toda nuestra herramienta combinatoria. Utilizando lo mencionado se demuestra que los (l, r)-cumulantes y los cumulantes del capítulo 2 coinciden y por tanto la independencia bi-libre es equivalente a que los (l, r)- cumulantes se anulen. Por último, se obtiene una fórmula para los cumulantes de la convolución bi-libre multiplicativa de medidas en términos de un complemento de Kreweras en el nuevo látiz.

Finalmente, el capítulo 5 aborda el tema de divisibilidad infinita bi-libre, y comienza con algunos teoremas límite importantes para motivar la definición y primeros resultados relevantes. Usando la herramienta combinatoria y analítica de los capítulos pasados se encuentra una representación tipo Lévy-Hincin para la transformada R de una variable de dos caras. Se presentan ciertos resultados para el caso bipartito, con el fin de facilitar los cálculos y después el caso general. Enseguida, y usando la representación tipo Lévy-Hincin, definimos clases importantes de distribuciones infinitamente divisibles y con ellos obtenemos caracterizaciones de la divisibilidad infinita bi-libre de impacto análogo al caso libre, por ejemplo, se demuestra que toda distribución infinitamente divisible bi-libre es convolución bi-libre de una ley gaussiana, un producto de marginales libres y una distribución Poisson compuesta bi-libre. Al final del capítulo se exponen los semigrupos de medida continuos bi-libres y los Procesos de Lévy bi-libres.

Cabe mencionar que los avances de la teoría de probabilidad bi-libre se han desarrollado muy rápido y que muchos temas nuevos no fueron incluidos en esta tesis. Temas tales como independencia bi-libre con amalgamación (ver [16, 43]), donde el papel del funcional lo juega una esperanza condicional (aspectos combinatorios y analíticos); independencia bi-libre condicional [26, 27], que generaliza la C-libertad (C-Freeness); también existe una generalización del teorema de intercambiabilidad libre de De Finetti para Bi-freeness [22], así como el trabajo de Voiculescu sobre extremos en el plano, donde la distribución del máximo de dos pares define una convolución (consultar [56]). Otro trabajo interesante es el trabajo de Skoufranis donde demuestra que en el marco de "bi-freeness" (independencia bi-libre) "viven" los 5 tipos de independencias naturales de Muraki, permitiendo así, trasladar problemas de probabilidad no conmutativa a este marco (ver [42]); existen análogos bi-libres de liberación [15] y de subordinación [13], además el interesante trabajo de Paul Skoufranis sobre modelos bi-matriciales [40], y un último trabajo que queremos mencionar es el de Hasebe, Huang y Wang [29] en donde se demuestra que existe una biyección tipo Bercovici-Pata entre las familias de distribuciones infinitamente divisibles (clásicas) y las distribuciones infinitamente divisibles bi-libres.

Capítulo 1

Teoría de probabilidad libre

En este capítulo presentamos el marco teórico en el que se desarrolla la Probabilidad Libre y algunos resultados importantes que serán generalizados después para la independencia bi-libre. Primero definimos los espacios de probabilidad no conmutativos y las nociones naturales de independencia. Seguido de esto se definen las principales transformadas para las convoluciones libres, aditiva y multiplicativa, y para la primera una noción divisibilidad infinita, también se exponen algunos aspectos de la combinatoria de la probabilidad libre. Cerramos el capítulo con la definición y principales propiedades de los espacios de Fock.

1.1 Espacios de probabilidad no conmutativos

1.1.1 Primeras definiciones

Una *Álgebra $\mathcal{A}$ sobre un campo* $\mathbb{F}$, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$, que además tiene una operación de multiplicación $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ que es asociativa y bilineal, y es una álgebra con unidad si además tiene un único neutro multiplicativo. Si también existe en $\mathcal{A}$ una *involución*,i.e., una operación $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ que cumple lo siguiente,

- $(a + b)* = a^* + b^*$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$,
- $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ y $a \in \mathcal{A}$,
- $(a^*)^* = a$ para todo $a \in \mathcal{A}$,
- $(ab)^* = b^* a^*$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$.

entonces $\mathcal{A}$ es llamada $*$-*álgebra*.

Definición 1.1.1 Un *espacio de probabilidad no-conmutativo* es un par $(\mathcal{A}, \varphi)$ donde $\mathcal{A}$ es una álgebra compleja (el campo es el de los complejos) con unidad $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ y $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal con $\varphi(\mathbf{1}_{\mathcal{A}}) = 1$.

Si $\mathcal{A}$ es una $*$-álgebra y φ cumple que $\varphi(a^* a) \geq 0$ para toda $a \in \mathcal{A}$, entonces el par $(\mathcal{A}, \varphi)$ es llamado $*$-*espacio de probabilidad no conmutativo*. A los elementos de $\mathcal{A}$ se les llama *variables aleatorias no-conmutativas*, o sólo variables aleatorias.

Una variable aleatoria $a \in \mathcal{A}$ es

a) *Autoadjunta* o *real* si se tiene que $a = a^*$.

b) *Normal* si $aa^* = a^*a$.

c) *Unitaria* si $aa^* = a^*a = \mathbf{1}_{\mathcal{A}}$.

d) *Positiva* si existe $x \in \mathcal{A}$ tal que $a = xx^*$.

Decimos que φ es

a) *Tracial* si $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$.

b) *Fiel* si $\varphi(a^*a) = 0$ sólo si $a = 0$.

En este marco la información probabilística de las variables aleatorias está codificada por el funcional φ cuando actúa en los elementos $(a)^{n_1}(a^*)^{m_1} \cdots (a)^{n_k}(a^*)^{m_k}$, así pues llamamos a la colección $\varphi((a)^{n_1}(a^*)^{m_1} \cdots (a)^{n_k}(a^*)^{m_k})$ *momentos mixtos* de la variable aleatoria a.

Definición 1.1.2 Denotemos por $\mathbb{C}\langle x, y\rangle$ el álgebra de polinomios en dos variables no conmutativas y coeficientes complejos. Dada una variable aleatoria $a \in (\mathcal{A}, \varphi)$, la $*$*-distribución en el sentido algebraico* de a es el funcional $\mu_a : \mathbb{C}\langle x, y\rangle \to \mathbb{C}$ definida por

$$\mu_a((x)^{n_1}(y)^{m_1} \cdots (x)^{n_k}(y^*)^{m_k}) = \varphi((a)^{n_1}(a^*)^{m_1} \cdots (a)^{n_k}(a^*)^{m_k}).$$

Si a es un elemento normal y existe una medida μ con soporte compacto en $\mathbb{C}$ que cumple

$$\varphi(a^m(a^*)^n) = \int_{\mathbb{C}} z^m \bar{z}^n \mu(dz),$$

llamamos a μ la distribución (en el sentido analítico) de a.

Mas general, para una familia de variables $\{a_i\}_{i \in I}$ en $(\mathcal{A}, \varphi)$, la *distribución conjunta de las variables* es el funcional $\mu : \mathbb{C}\langle x_i : i \in I\rangle \to \mathbb{C}$ definido por

$$\mu((x_{i_1})^{n_1}(x_{i_2})^{n_2} \cdots (x_{i_k})^{n_k}) = \varphi(a_{i_1}^{n_1} a_{i_2}^{n_2} \cdots a_{i_k}^{n_k}).$$

En este sentido, la $*$-distribución en el sentido algebraico de a es la distribución conjunta de la familia $\{a, a^*\}$.

Observación 1.1.3 *Para el caso de una variable aleatoria a autoadjunta, la distribución en el sentido analítico, si existe, es una medida μ con soporte compacto en $\mathbb{R}$ y los momentos mixtos son*

$$\varphi(a^m) = \int_{-\infty}^{\infty} x^m \mu(dx).$$

En un espacio de probabilidad no conmutativo, no toda variable aleatoria tiene distribución en este sentido; sin embargo, si añadimos propiedades extras al espacio podemos garantizar que toda variable aleatoria normal tiene distribución en el sentido analítico, tal restricción es la siguiente

Definición 1.1.4 Un C^**-espacio de probabilidad no conmutativo* es un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \varphi)$, donde $\mathcal{A}$ es una C^*-álgebra, i.e., $\mathcal{A}$ es una $*$-álgebra y ademas está dotada de una norma $\|\cdot\| : \mathcal{A} \to [0, \infty)$, que la hacen un espacio de Banach y cumple

a) $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$,

b) $\|a^*a\| = \|a\|^2$ para todo $a \in \mathcal{A}$,

y además φ es lineal, positivo y unitario, es decir es un *estado*.

1.1.2 Nociones de independencia

Dada la generalidad de la definición de espacio de probabilidad no conmutativo, podríamos definir de muchas maneras una noción de independencia de variables aleatorias. Sin embargo, es deseable que la definición de independencia cumpla ciertas propiedades (axiomas) que permitan tener riqueza análoga al caso clásico (por ejemplo trabajar con procesos de Lévy), Muraki (2003) demostró en [36] que, sólo hay cinco tipos de independencia en términos de los axiomas de Ben Ghorbal y Schürmann: las independencias clásica, libre, booleana, monótona y la antimonótona, que definimos a continuación para el caso de dos variables.

Definición 1.1.5 Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un EPNC

1. Decimos que $a, b \in (\mathcal{A}, \varphi)$ son *independientes en el sentido tensorial* si se cumple que
$$\varphi(a^{m_1} b^{n_1} \cdots a^{m_k} b^{n_k}) = \varphi\left(a^{\sum_{i=1}^k m_i}\right) \varphi\left(b^{\sum_{i=1}^k n_i}\right),$$
para todo $m_j,\ n_j \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ i = 1, 2, \ldots, k$.

2. Decimos que $a, b \in (\mathcal{A}, \varphi)$ son *independientes en el sentido booleano* si se cumple que
$$\varphi(a^{m_1} b^{n_1} \cdots a^{m_k} b^{n_k}) = \prod_{i=1}^k \varphi\left(a^{m_i}\right) \varphi\left(b^{n_i}\right),$$
para todo $m_j,\ n_j \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ i = 1, 2, \ldots, k$.

3. Decimos que $a, b \in (\mathcal{A}, \varphi)$ son *independientes en el sentido monótono* si se cumple que
$$\varphi(a^{m_1} b^{n_1} \cdots a^{m_k} b^{n_k}) = \varphi\left(a^{\sum_{i=1}^k m_i}\right) \prod_{i=1}^k \varphi\left(b^{n_i}\right),$$
para todo $m_j,\ n_j \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ i = 1, 2, \ldots, k$.

4. Decimos que $a, b \in (\mathcal{A}, \varphi)$ son *independientes en el sentido antimonótono* si se cumple que
$$\varphi(a^{m_1} b^{n_1} \cdots a^{m_k} b^{n_k}) = \varphi\left(b^{\sum_{i=1}^k n_i}\right) \prod_{i=1}^k \varphi\left(a^{m_i}\right),$$
para todo $m_j,\ n_j \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ i = 1, 2, \ldots, k$.

5. Decimos que dos variables aleatorias $a,\ b \in (\mathcal{A}, \varphi)$ son *independientes en el sentido libre* (o *libres*) si para cualesquiera polinomios $P_i,\ Q_i\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, tales que $\varphi\left(P_i\left(a\right)\right) = 0 = \varphi\left(Q_j\left(b\right)\right)$ para todo $i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, se cumple que
$$\varphi\left(P_1\left(a\right) Q_1\left(b\right) \cdots P_n\left(a\right) Q_n\left(b\right)\right) = 0.$$

Vamos a poner el caso libre en términos más generales. Decimos que la familia de subálgebras $\mathcal{A}_i, i \in I$ en un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \varphi)$ (considerando que $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}$ y $\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}_i$) es libre si $\varphi(a_1 a_2 \cdots a_n) = 0$ siempre que $\varphi(a_j) = 0$, $a_j \in \mathcal{A}_{i(j)}$ y $i(1) \neq i(2) \neq \cdots \neq i(n)$. Aún mas general decimos que la familia de subconjuntos $\Omega_i \subset \mathcal{A}, i \in I$ es una familia libre si las álgebras generadas por $\Omega_i \cup \{\mathbf{1}_{\mathcal{A}}\}$ forman una familia libre. Decimos que las variables aleatorias $a_1, ..., a_n \in \mathcal{A}$ son independientes en el sentido libre (o libres) si los conjuntos $\Omega_i = \{a_i\},\ i = 1, 2, ..., n.$ son una familia libre, y se puede verificar que para el caso de un par de variables esto es equivalente a lo escrito en la anterior definición.

Las nociones de independencia, entre ellas la libre, se puede entender como una regla para calcular momentos mixtos. Un resultado sencillo, pero importante es que si a y b son variables aleatorias libres, la $*$-distribución de $a + b$ y de ab sólo dependen de la $*$-distribución de a y la $*$-distribución de b, y por tanto podemos definir

$$\mu_a \boxplus \mu_b = \mu_{a+b},$$
$$\mu_a \boxtimes \mu_b = \mu_{ab}.$$

De hecho, si μ y ν son medidas con soporte compacto en $\mathbb{R}$, existe un C^*-espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \varphi)$ y variables aleatorias autoadjuntas $a, b \in \mathcal{A}$ tal que a tiene $*$-distribución μ y b tiene $*$-distribución ν, y además a y b son libres, y por lo tanto podemos extender lo anterior para medidas, así que llamamos a $\mu \boxplus \nu$ la convolución libre aditiva y a $\mu \boxtimes \nu$ la convolución libre multiplicativa, de las medidas μ y ν. Más adelante, volveremos a esto.

1.2 Transformadas de medidas

El objetivo de esta sección es presentar las principales transformadas en la teoría de probabilidad libre, como referencia para las demostraciones de esta sección tenemos el trabajo [4].

Definición 1.2.1 Dada una medida finita μ en $\mathbb{R}$, su *transformada de Cauchy* G_μ se define como

$$G_\mu(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - t} \mu(dt), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Usando el hecho de que $H_\mu(z) = -G_\mu(z)$ es una función de Herglotz y de la definición se tienen las siguientes dos proposiciones.

Proposición 1.2.2 *Sea μ una medida finita en $\mathbb{R}$. Entonces*

i) $G_\mu(\mathbb{C}^{\pm}) \subset \mathbb{C}^{\mp}$ *y* $G_\mu(\bar{z}) = \overline{G_\mu(z)}$.

ii) $|G_\mu(z)| \leq \dfrac{\mu(\mathbb{R})}{|Im(z)|}$.

iii) $\lim\limits_{y \to \infty} y|G_\mu(iy)| < \infty$.

iv) $\lim\limits_{y \to \infty} iyG_\mu(iy) = \mu(\mathbb{R})$.

En adelante, denotemos por $\mathbb{C}^+ = \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ y $\mathbb{C}^- = \{x + iy \in \mathbb{C} : y < 0\}$ y para $\alpha > 0$ sea $\Gamma_\alpha = \{z = x + iy : y > 0, x < \alpha y\}$.

Proposición 1.2.3 *Sea $G : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^-$ una función analítica. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

i) Existe una medida de probabilidad μ en $\mathbb{R}$ tal que $G_\mu = G$ en $\mathbb{C}^+$.

ii) Para cada $\alpha > 0$,

$$\lim_{|z|\to\infty,\ z\in\Gamma_\alpha} zG(z) = 1.$$

iii) $\lim\limits_{y\to+\infty} iyG(iy) = 1.$

En caso que μ tenga soporte acotado, y si denotamos $m_k = \int\limits_{\mathbb{R}} t^k \mu(dt)$, se tiene la expresión en serie de potencias de la transformada de Cauchy

$$G_\mu(z) = z^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} m_k(\mu) z^{-k-1}, \qquad |z| > r,$$

con $r = \sup\{|t| : t \in supp(\mu)\}$. Por esta expresión se puede pensar a la transformada de Cauchy como una función generadora de momentos.

Introducimos aquí una distribución muy importante en probabilidad libre, pues juega un papel análogo al de la normal en probabilidad clásica.

Definición 1.2.4 Sea $m \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$ la densidad de la *distribución del semicírculo con parámetros m y σ^2*, es

$$w_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\sqrt{4\sigma^2 - (x-m)^2} \cdot \mathbf{1}_{[m-2\sigma, m+2\sigma]}(x).$$

Si $m = 0$ y $\sigma = 1$, la densidad queda

$$s_{0,1}(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2} \cdot \mathbf{1}_{[-2,2]}(x),$$

a esta última la llamamos *semicircular estándar.*

La transformada de Cauchy de la distribución de semicírculo con parámetros m y σ es

$$G_{w_{m,\sigma}}(x) = \frac{2}{r^2}(z - \sqrt{(z-m)^2 - r^2}).$$

Definición 1.2.5 Sea μ una medida finita en $\mathbb{R}$ con transformada de Cauchy G_μ. La función de Pick $F_\mu : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ definida como

$$F_\mu(z) = \frac{1}{G_\mu(z)}, \quad z \in \mathbb{C}^+,$$

es llamada *recíproca de la transformada de Cauchy.*

De la definición y las caracterizaciones de la transformada de Cauchy se tiene la siguiente proposición.

Proposición 1.2.6 *Sea $F : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ una función de Herglotz. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

i) Existe una medida de probabilidad μ en $\mathbb{R}$ tal que $F_\mu = F$ en $\mathbb{C}^+$.

ii) Para cada $\alpha > 0$,

$$\lim_{|z|\to\infty,\ z\in\Gamma_\alpha} \frac{F(z)}{z} = \mu(\mathbb{R}).$$

iii) $\lim_{y\to+\infty} F(iy)/iy = \mu(\mathbb{R})$.

Para $\alpha, \beta > 0$ sea $\Gamma_{\alpha,\beta} = \{z = x + iy : y > \beta, |x| < \alpha y\}$ (esta región será usada en el resto de la sección).

Proposición 1.2.7 *Sea μ una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$. Entonces existe un dominio Γ de la forma $\Gamma = \cup_{\alpha>0}\Gamma_{\alpha,\beta_\alpha}$ tal que F_μ tiene una inversa derecha F_μ^{-1} definida en Γ. Más aún*

$$Im(F_\mu^{-1}(z)) \leq Im(z), \qquad z \in \Gamma,$$

y para cada $\alpha > 0$

$$\lim_{|z|\to\infty,\ z\in\Gamma_\alpha} \frac{F_\mu^{-1}(z)}{z} = 1.$$

En adelante denotaremos por Γ la región que existe para una medida de probabilidad μ de la proposición 1.2.7.

Definición 1.2.8 Sea μ una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$ con transformada de Cauchy recíproca F_μ. La *transformada de Voiculescu* $\phi_\mu : \Gamma \to \mathbb{C}^-$ esta definida como

$$\phi_\mu(z) = F_\mu^{-1}(z) - z, \qquad z \in \Gamma.$$

Una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$ está determinada por su transformada de Voiculescu, ya que μ, ν son medidas tales que $\phi_\mu = \phi_\nu$ en una región $\Gamma_{\alpha,\beta}$, entonces $F_\mu = F_\nu$ en alguna región de $\mathbb{C}^+$ y por continuación analítica $F_\mu = F_\nu$ en todo $\mathbb{C}^+$ y por tanto tienen la misma transformada de Cauchy, lo que implica que $\mu = \nu$.

Otra propiedad importante de la transformada de Voiculescu es que si μ, ν son medidas con soporte compacto en $\mathbb{R}$ entonces $\phi_{\mu\boxplus\nu} = \phi_\mu + \phi_\nu$, lo que motiva la definición de convolución de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}$ sin importar si tienen soporte compacto o no, y la escribimos en la definición 1.2.12. A continuación escribimos dos importantes teoremas de la transformada de Voiculescu.

Teorema 1.2.9 *[14, Cor. 5.8] Sean μ y ν medidas de probabilidad en $\mathbb{R}$ y ϕ_μ, ϕ_ν sus respectivas transformadas de Voiculescu. Entonces $\phi = \phi_\mu + \phi_\nu$ es la transformada de Voiculescu de una (única) medida de probabilidad en $\mathbb{R}$.*

Teorema 1.2.10 *[14, Prop. 5.7] Sea $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes*

i) La sucesión $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en distribución a μ.

ii) Existen $\alpha, \beta > 0$ tal que la sucesión $\{\phi_{\mu_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en compactos de $\Gamma_{\alpha,\beta}$ a una función ϕ, más aún $\phi = \phi_\mu$.

Dos variantes de la transformada de Voiculescu que son muy importantes son la transformada R y la transformada cumulante libre, que juega un papel análogo al logaritmo de la transformada de Fourier en probabilidad clásica.

Definición 1.2.11 Con las mismas restricciones de la transformada de Voiculescu, definimos la *R_μ-transformada (o transformada R de μ)* como

$$R_\mu(z) = \phi_\mu(\frac{1}{z}) = F_\mu^{-1}(z^{-1}) - \frac{1}{z}, \qquad z^{-1} \in \Gamma.$$

Definimos también la *transformada cumulante libre C_μ* como

$$C_\mu(z) = z\phi_\mu(\frac{1}{z}) = zF_\mu^{-1}(z^{-1}) - 1, \qquad z^{-1} \in \Gamma.$$

La transformada de Cauchy y la transformada R están relacionadas por la ecuación

$$G_\mu(R_\mu(z) + \frac{1}{z}) = z. \tag{1.1}$$

Definamos ahora la convolución libre de medidas.

Definición 1.2.12 Sean μ y ν medidas de probabilidad en $\mathbb{R}$. La *convolución libre aditiva* de μ y ν es la única medida de probabilidad $\mu \boxplus \nu$ en $\mathbb{R}$ tal que

$$\phi_{\mu\boxplus\nu}(z) = \phi_\mu(z) + \phi_\nu(z), \qquad z \in \Gamma_{\alpha_1,\beta_1} \cap \Gamma_{\alpha_2,\beta_2}.$$

La anterior definición es equivalente a las condiciones $C_{\mu\boxplus\nu}(z) = C_\mu(z) + C_\nu(z)$ para $z^{-1} \in \Gamma_{\alpha_1,\beta_1} \cap \Gamma_{\alpha_2,\beta_2}$ y también $R_{\mu\boxplus\nu}(z) = R_\mu(z) + R_\nu(z)$ en el mismo conjunto. Para una medida de probabilidad μ en $\mathbb{R}$ con soporte compacto y momentos $m_n(\mu), n \geq 1$, tenemos la expansión en serie de potencias de la función generadora de momentos clásica de μ,

$$\Psi_\mu(z) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n(\mu) z^n.$$

Si $m_1(\mu) \neq 0$, la inversa $\chi_\mu(z)$ de $\Psi_\mu(z)$ existe y es única como serie formal en z. En este caso, la transformada S se define como

$$S_\mu(z) = \chi_\mu(z)\frac{1+z}{z}.$$

Proposición 1.2.13 *Sean μ_1 y μ_2 dos medidas de probabilidad en $\mathbb{R}^+$ con $\mu_i \neq \delta_0$, $\quad i = 1, 2$. Entonces $\mu_1 \boxtimes \mu_2 \neq \delta_0$ y*

$$S_{\mu_1 \boxtimes \mu_2}(z) = S_{\mu_1}(z) S_{\mu_2}(z).$$

Además $(\mu_1 \boxtimes \mu_2)(\{0\}) = max\{\mu_1(\{0\}), \mu_2(\{0\})\}$

También se puede definir y estudiar la transformada S para algunas familias de distribuciones con soporte no acotado pero con algunas condiciones extras como simetría, como se puede ver, por ejemplo, en [8].

1.3 Particiones y cumulantes libres

Definición 1.3.1

1. Sea Ω un conjunto no vacío. Una *partición* de Ω es una familia finita de subconjuntos disjuntos a pares de Ω, $\pi = \{V_1, ..., V_n\}$ tal que $\bigcup_{1 \leq k \leq n} V_k = \Omega$. A los subconjuntos V_i los llamaremos *bloques* de π.

2. Si π es una partición de Ω, decimos que $a \sim_\pi b$ si a, b están en el mismo bloque.

3. Supongamos que Ω está totalmente ordenado, decimos que una partición π de Ω *no se cruza* si siempre que $a < b < c < d$ y $a \sim_\pi c$, $b \sim_\pi d$ se tiene que $b \sim_\pi c$. En otro caso decimos que la partición se cruza.

4. En el caso que $\Omega = \{1, 2, ..., n\}$, denotamos al conjunto de todas las particiones de Ω por $\mathcal{P}(n)$, al conjunto de todas las particiones que no se cruzan por $NC(n)$.

5. Si $\Omega = \{1, 2, ..., n\}$, un bloque V de una partición π de Ω se llama *intervalo* si es de la forma $V = \{k, k+1, ..., k+p\}$ para algún $k \in \{1, 2, ..., n\}$, una partición es *partición por intervalos* si todos sus bloques son intervalos. Al conjunto de todas las particiones intervalo de $\Omega = \{1, 2, ..., n\}$ lo denotamos por $\mathcal{I}(n)$.

6. Sean $\pi, \sigma \in \mathcal{P}(n)$, decimos que $\pi \leq \sigma$ si cada bloque de π está contenido (como subconjunto) en algún bloque de σ, a este orden parcial se le llama *refinamiento en reversa.*

7. *El complemento de Kreweras* es una aplicación $Kr : NC(n) \to NC(n)$ definida como sigue. Se consideran números adicionales $\bar{1}, ..., \bar{n}$ y se intercalan con $1, 2, ..., n$ de la siguiente forma

$$1 < \bar{1} < \cdots < n < \bar{n},$$

y sea π una partición en $NC(n)$, entonces $Kr(\pi) \in NC(\bar{1}, ..., \bar{n}) \cong NC(n)$ se define como el elemento mas grande (en el sentido del refinamiento en reversa) tal que $\pi \cup Kr(\pi) \in NC(1, \bar{1}, ..., n, \bar{n})$.

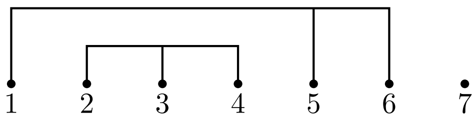
Vamos a hacer algunas observaciones.

Observación 1.3.2

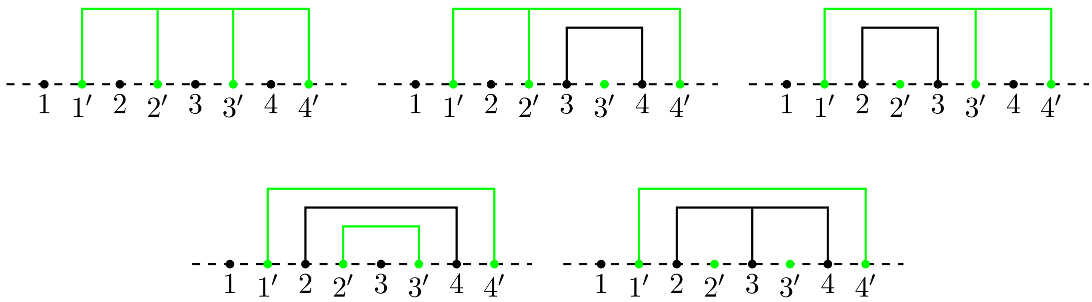
- *El refinamiento en reversa hace a los conjuntos $\mathcal{P}(n), NC(n), \mathcal{I}(n)$ látices. Eso es muy útil a la hora de trabajar con ciertas funciones multiplicativas en el álgebra de incidencia asociada (véase [48]), lo que permite usar la teoría de inversión de Möbius.*

- *Una caracterización muy útil de las particiones que no se cruzan es la siguiente: Una partición $\pi \in \mathcal{P}(n)$ no se cruza si y sólo si π tiene un bloque intervalo V y además $\pi \backslash V$ es una partición que no se cruza en $\{1, ..., n\} \setminus V$ con el orden heredado.*

La representación gráfica de la partición $\pi = \{\{1, 5, 6\}, \{2, 3, 4\}, \{7\}\} \in \mathcal{P}(7)$ es:



También se muestran diagramas del complemento de Kreweras de las siguientes particiones en $NC(4)$, $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$, $\{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 4\}, \{3\}\}$ y $\{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}$.



1.3.1 Cumulantes libres

Definición 1.3.3 Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espacio de probabilidad no conmutativo. Si existen funcionales $(\kappa_n : \mathcal{A}^n \to \mathbb{C})$ con $\mathcal{A}^n = \mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A}$, n veces, tal que

$$\varphi(a_1 \cdots a_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} \kappa_\pi(a_1, ..., a_n),$$

donde $\kappa_\pi(a_1, ..., a_n) = \prod_{V=\{j_1,...,j_{|V|}\}\in\pi} \kappa_{|V|}(j_1, ..., j_{|V|})$ entonces les llamaremos *cumulantes libres* de $(\mathcal{A}, \varphi)$.

Cabe decir que en todo espacio de probabilidad no conmutativo, existen los cumulantes libres. El siguiente teorema es muy importante y más adelante veremos su análogo en Probabilidad bi-libre.

Teorema 1.3.4 *[35, Teo. 11.16] Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espacio de probabilidad no conmutativo y $(\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sus respectivos funcionales cumulantes libres. Consideremos $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ subálgebras unitarias de $\mathcal{A}$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes*

1. *$\{\mathcal{A}_i\}$ son álgebras libres.*

2. *Para $n \geq 2$ y para $a_j \in \mathcal{A}_{i(j)}$, $i(j) \in I$, $j = 1, 2, ..., n$ se tiene que $\kappa_n(a_1, ..., a_n) = 0$, $i(1) \neq i(2) \neq \cdots \neq i(n)$.*

Otro aspecto importante es que dada una medida de probabilidad μ con soporte compacto en $\mathbb{R}$ y a variable aleatoria con distribución μ, podemos escribir la transformada R de μ como

$$\mathcal{R}_\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa_{n+1}(a) z^n,$$

donde $\kappa_n(a) = \kappa_n(a, a, ..., a)$, y la transformada R no depende del espacio en que está definida la variable a. Finalizamos esta sección con el teorema de límite central libre.

Teorema 1.3.5 *[35, Teo. 8.10] Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un $*$-espacio de probabilidad no conmutativo y sean $a_1, a_2, ... \in \mathcal{A}$ una sucesión de variables aleatorias autoadjuntas, libres e idénticamente distribuidas con $\varphi(a_i) = 0$ y $\varphi(a_i^2) = 1$. Entonces*

$$\lim_{N\to\infty} \varphi\left[\left(\frac{a_1 + \cdots a_N}{\sqrt{N}}\right)^m\right] = \varphi(s^m), \tag{1.2}$$

donde s es una variable aleatoria con distribución en el sentido analítico semicircular estándar.

Los cumulantes libres son aditivos y homogéneos, y por tanto conocemos como se comportan cuando tienen por argumentos suma de variables aleatorias o el producto de una variable aleatoria por un escalar. También se puede calcular los cumulantes libres del producto de variables aleatorias y es el resultado final de esta sección.

Teorema 1.3.6 *[35, Teo. 11.12] Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espacio de probabilidad no conmutativo, y sean $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n \in \mathcal{A}$ tal que $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ y $\{b_1, ..., b_n\}$ son familias libres, entonces*

$$\kappa_n(a_1 b_1, ..., a_n b_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} \kappa_\pi(a_1, ..., a_n)\kappa_{Kr(\pi)}(b_1, ..., b_n),$$

donde $Kr(\pi)$ es el complemento de Kreweras de π.

En un espacio de probabilidad no conmutativo se pueden definir otros funcionales cumulantes los cuales se comportan bien con los otros tipos de independencia. Para las definiciones de los otros funcionales cumulantes y como se relacionan entre sí se recomienda leer el artículo [7].

1.4 Divisibilidad infinita libre

A continuación se presenta una síntesis de los principales resultados en divisibilidad infinita libre con el fin de generalizarlos en el capítulo 5, para el caso bi-libre.

1.4.1 Definición y propiedades principales

Definición 1.4.1 Sea μ una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$. Decimos que μ es *infinitamente divisible libre*, si para todo $n \in \mathbb{N}$, existe una medida de probabilidad μ_n tal que

$$\mu = \underbrace{\mu_n \boxplus \mu_n \boxplus \cdots \boxplus \mu_n}_{n \text{ veces}}.$$

Denotamos por $ID(\boxplus)$ a la clase de distribuciones infinitamente divisibles libres.

Usando la asociatividad y la conmutatividad de $\boxplus$, es fácil probar las siguientes dos proposiciones.

Proposición 1.4.2 *Sean $\mu, \nu \in ID(\boxplus)$ entonces*

i) $\mu \boxplus \nu$ *es $\boxplus$-infinitamente divisible.*

ii) Si

$$\mu = \underbrace{\mu_n \boxplus \mu_n \boxplus \cdots \boxplus \mu_n}_{n \text{ veces}},$$

entonces μ_n es $\boxplus$-infinitamente divisible.

Proposición 1.4.3 *Sea μ una medida de probabilidad $\boxplus$-infinitamente divisible, entonces existe una familia $(\mu_t)_{t\geq 0}$ de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}$ tal que*

i) $\mu_0 = \delta_0, \ \mu_1 = \mu$.

ii) $\mu_{t+s} = \mu_t \boxplus \mu_s$, *para* $s, t \geq 0$.

iii) La aplicación $t \to \mu_t$ es continua con respecto a la topología de la convergencia débil.

1.4.2 Caracterizaciones

Análogamente al caso clásico, donde una distribución μ es infinitamente divisible si y sólo si su transformada de Fourier tiene la representación de Lévy-Hincin,

$$\hat{\mu}(z) = \exp\left[i\gamma z + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{izx} - 1 - \frac{izx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\ \sigma(dx)\right],$$

con $\gamma \in \mathbb{R}$ y σ medida finita en $\mathbb{R}$, i.e μ tiene *par generador* (γ, σ), también tenemos una representación para la transformada de Voiculescu llamada representación de Lévy-Hincin libre.

Teorema 1.4.4 *[14, Teo. 5.10] Sea μ una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

i) μ es $\boxplus$-infinitamente divisible.

ii) ϕ_μ tiene una extensión analítica definida en $\mathbb{C}^+$ con valores en $\mathbb{C}^- \cup \mathbb{R}$.

iii) Existe una medida finita σ en $\mathbb{R}$ y una constante real γ tal que

$$\phi_\mu(z) = \gamma + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+tz}{z-t}\sigma(dt) \qquad z \in \mathbb{C}^+$$

el par (γ, σ) es llamado par generador libre de μ.

Como en ambos casos (clásico y libre) tenemos un par generador para las distribuciones infinitamente divisibles, podemos construir una función de una manera natural. Tal función es la biyección de Bercovici-Pata.

Definición 1.4.5 La *biyección de Bercovici-Pata* es la función $\Lambda : ID(*) \to ID(\boxplus)$ que a la medida μ con par (γ, σ) en $ID(*)$ le asigna la medida $\Lambda(\mu)$ con el mismo par pero en la representación de Lévy-Hincin libre.

Proposición 1.4.6 *La biyección de Bercovici-Pata $\Lambda : ID(*) \to ID(\boxplus)$ cumple lo siguiente:*

i) Si $\mu, \nu \in ID(*)$, entonces $\Lambda(\mu * \nu) = \Lambda(\mu) \boxplus \Lambda(\nu)$.

ii) Si $\mu \in ID(*)$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $\Lambda(D_c\mu) = D_c\Lambda(\mu)$, donde D_c con $c \neq 0$, es la dilatación de μ, es decir la medida que cumple que $D_c\mu(A) = \mu(c^{-1}A)$.

iii) Para toda constante $c \in \mathbb{R}$, tenemos $\Lambda(\delta_c) = \delta_c$.

El último teorema de esta sección caracteriza la convergencia débil de medidas en términos del par generador.

Proposición 1.4.7 *Sean $\mu, (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in ID(\boxplus)$. Para cada n, sea (γ_n, σ_n) el par generador libre de μ_n, y (γ, σ) el de μ. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

i) $\mu_n \Rightarrow \mu$ cuando $n \to \infty$.

ii) $\gamma_n \to \gamma$ y $\sigma_n \Rightarrow \sigma$ cuando $n \to \infty$.

donde $\Rightarrow$ denota convergencia débil.

Debido a que no es el objetivo de este trabajo, no añadimos ejemplos de distribuciones infinitamente divisibles libres. Sin embargo, ese tema es muy importante y se recomienda la lectura de [5,6,9].

1.5 Espacios de Fock

Los espacios de Fock nacen en el intento de Vladímir Fock de definir un espacio de Hilbert que brinde realizaciones específicas de las llamadas relaciones de conmutación en física (el *conmutador* de dos elementos f, g en un álgebra es el elemento $[f, g] := fg - gf$). En esta tesis seguimos la línea del artículo de Speicher, Bozejko y Kümmerer en [46], y [35].

Definición 1.5.1 Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $\Omega \in \mathcal{H}$ un vector fijo al que llamamos *vector vacío.*

i) El *espacio de Fock libre* (también llamado *completo*) $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ de $\mathcal{H}$ es la completación del espacio de pre-Hilbert,

$$\mathbb{C}\Omega \oplus \bigoplus_{n\geq 1} \mathcal{H}^{\otimes n},$$

con el producto interior $\langle f_1 \otimes \cdots \otimes f_n, g_1 \otimes \cdots \otimes g_m \rangle = \delta_{n,m} \prod_{k=1}^{n} \langle f_i, g_i \rangle$, donde $\mathbb{C}\Omega = \{\lambda\Omega : \lambda \in \mathbb{C}\}$ y $\mathcal{H}^{\otimes n} = \mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}$, n veces.

ii) Al funcional lineal $\tau_{\mathcal{H}} : B(\mathcal{F}(\mathcal{H})) \to \mathbb{C}$ definido como,

$$\tau_{\mathcal{H}}(T) = \langle T\Omega, \Omega\rangle,$$

lo llamamos *estado vector* correspondiente al vector vacío Ω.

iii) Para $f \in \mathcal{H},\ T \in B(\mathcal{H}),\ \xi = \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n \in \underbrace{\mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}}_{n \text{ veces}}$, definamos

$$l(f)\Omega = f,\ l(f)\xi = f \otimes \xi,\ r(f)\Omega = f,\ r(f)\xi = \xi \otimes f,$$

$$\Lambda_l(T)\Omega = 0, \quad \Lambda_l(T)\xi = (T\xi_1) \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n,$$

$$\Lambda_r(T)\Omega = 0, \quad \Lambda_r(T)\xi = \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_{n-1} \otimes (T\xi_n).$$

A $l(f)$ lo llamamos *operador creación izquierdo* y a su adjunto $l(f)^*$ *operador aniquilación izquierdo.* A $r(f)$ lo llamamos *operador creación derecho* y a su adjunto $r(f)^*$ *operador aniquilación derecho.* A $\Lambda_l(T)$ lo llamamos *operador de Gauge izquierdo* y a $\Lambda_r(T)$ lo llamamos *operador de Gauge derecho.*

En adelante se presentará una serie de resultados para los operadores creación, aniquilación y de Gauge **izquierdos**, pero los resultados son análogos para el caso **derecho**.

Obtener realizaciones concretas de álgebras libres, usando sólo la definición no es trivial, sin embargo, los espacios de Fock nos facilitan el trabajo. El siguiente resultado nos dice que basta con encontrar subespacios ortogonales, para tener tal realización.

Proposición 1.5.2 *Consideremos el C^*-espacio de probabilidad $(B(\mathcal{F}(\mathcal{H})), \tau_{\mathcal{H}})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert. Sea $\mathcal{H}_1, ..., \mathcal{H}_k$ familia de subespacios de $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{H}_i \perp \mathcal{H}_j$ para $i \neq j$ y $1 \leq i, j \leq k$. Para cada $1 \leq i \leq k$ sea $\mathcal{A}_i$ la C^*-subálgebra de $(B(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ generada por $\{l(\xi) : \xi \in \mathcal{H}_i\}$. Entonces $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_k$ es una familia libre en $(B(\mathcal{F}(\mathcal{H})), \tau_{\mathcal{H}})$.*

Para la siguiente proposición, cuya prueba podemos encontrar en [35], necesitamos la definición de familia semicircular libre.

Definición 1.5.3 Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un $*$-espacio de probabilidad. Un *sistema semicircular libre* en $(\mathcal{A}, \varphi)$ es una familia $x_1, ..., x_k$ de elementos autoadjuntos de $\mathcal{A}$ tal que

i) Cada x_i es un elemento semicircular estándar en $(\mathcal{A}, \varphi)$.

ii) Las variables $x_1, ..., x_k$ son libres con respecto a φ.

Proposición 1.5.4 *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Consideremos el C^*-espacio de probabilidad $(B(\mathcal{F}(\mathcal{H})), \tau_{\mathcal{H}})$. Sea $\xi_1, ..., \xi_k$ un sistema ortogonal de vectores en $\mathcal{H}$ entonces los elementos*

$$l(\xi_1) + l(\xi_1)^*, ..., l(\xi_k) + l(\xi_k)^*,$$

forman un sistema semicircular libre en $(B(\mathcal{F}(\mathcal{H})), \tau_{\mathcal{H}})$.

Con lo visto sobre cumulantes libres se obtiene fácilmente el siguiente resultado (este resultado saldrá como caso particular de una fórmula más general de los cumulantes bi-libres).

Proposición 1.5.5 *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y consideremos el C^*-espacio de probabilidad $(B(\mathcal{F}(\mathcal{H})), \tau_{\mathcal{H}})$. Entonces los cumulantes libres de las variables aleatorias $l(f)^*, l(g), \Lambda(T)$ son de la siguiente forma: Sea $n \geq 2$, $f, g \in \mathcal{H}$, $T_1, ..., T_{n-2} \in B(\mathcal{H})$,*

$$\kappa_n(l(f)^*, \Lambda(T_1), ..., \Lambda(T_{n-2}), l(g)) = \langle T_1 \cdots T_{n-2} g, f \rangle,$$

y todos los demás cumulantes con argumentos en el conjunto $\{l(f) : f \in \mathcal{H}\} \cup \{l(g)^* : g \in \mathcal{H}\} \cup \{\Lambda(T) : T \in B(\mathcal{H})\}$ son cero.

Los espacios de Fock, además de darnos realizaciones específicas de las relaciones de conmutación y de variables aleatorias gaussianas (semicirculares en el caso libre), también nos dan realizaciones de variables aleatorias infinitamente divisibles.

Proposición 1.5.6 *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y consideremos el C^*-espacio de probabilidad $(B(\mathcal{F}(\mathcal{H})), \tau_{\mathcal{H}})$. Para $f \in \mathcal{H}$, $T = T^* \in B(\mathcal{H})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sea a el operador autoadjunto*

$$a = l(f) + l(f)^* + \Lambda(T) + \lambda \cdot \mathbf{1}, \tag{1.3}$$

entonces la distribución de a es infinitamente divisible libre.

Demostración. Si demostramos el caso $\lambda = 0$ se tiene inmediatamente el caso $\lambda \neq 0$. La idea de la demostración es sencilla, pues basta con observar que para $N \in \mathbb{N}$ fijo, la distribución de $a = l(f) + l(f)^* + \Lambda(T)$ es la misma que la de

$$\left[l\left(\frac{f \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0}{\sqrt{N}}\right) + l^*\left(\frac{f \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0}{\sqrt{N}}\right) + \Lambda(f \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0)\right] + \cdots$$
$$+ \left[l\left(\frac{0 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus f}{\sqrt{N}}\right) + l^*\left(\frac{0 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus f}{\sqrt{N}}\right) + \Lambda(0 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus f)\right],$$

y cada uno de esos sumandos es autoadjunto, tiene la misma distribución y son independientes. Como esto se tiene para todo $N \in \mathbb{N}$ a es infinitamente divisible. ■

De hecho podemos afirmar también el recíproco. Si μ es una distribución $\boxplus$-infinitamente divisible entonces existe un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y un operador a de la forma (1.3) tal que a tiene distribución μ, i.e., toda distribución infinitamente divisible libre es la distribución de un elemento de la forma (1.3) para algún espacio de Fock. Para ver esto último considere μ distribución de probabilidad en $\mathbb{R}$ infinitamente divisible en el sentido libre. Como la distribución es infinitamente divisible libre, su sucesión de cumulantes $(\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es condicionalmente positiva definida, es decir, para todo $r \in \mathbb{N}$, se tiene que $\sum_{n,m=1}^{r} \alpha_n \bar{\alpha}_m \kappa_{n+m} \geq 0$ para todo $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbb{C}$. Sea

$$\mathbb{C}^0\langle X \rangle = \mathbb{C}\langle X \rangle \oplus \mathbb{C}\langle X^2 \rangle \oplus \cdots,$$

el conjunto de polinomios en una variable X sin coeficiente constante. Dotemos a $\mathbb{C}^0\langle X \rangle$ con la siguiente forma sesquilinear positiva (positiva porque los cumulantes son condicionalmente positivos definidos),

$$\langle X^n, X^m \rangle = \kappa_{n+m}.$$

Esta forma sesquilinear puede extenderse a un producto interior identificando (dividiendo) en el núcleo, con el cual tenemos un espacio pre-Hilbert. Sea $\mathcal{H}$ el espacio de Hilbert que se obtiene al tomar completación. Consideremos en el C^*-espacio de probabilidad $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \tau_{\mathcal{H}})$ la variable

$$a = l(X) + l(X)^* + \Lambda(X) + \kappa_1 \cdot \mathbf{1},$$

donde $\Lambda(X)$ es el operador multiplicación por X. Denotemos por κ_n^a el n-ésimo cumulante de a. Entonces se tiene para $n = 1$,

$$\kappa_1^a = \kappa_1.$$

Para $n = 2$,

$$\kappa_2^a = \kappa_2(l^*(X), l(X)) = \langle X, X \rangle = \kappa_2,$$

y para $n > 2$

$$\kappa_n^a = \kappa_n(l^*(X), \Lambda(X), ..., \Lambda(X), l(X)) = \langle X, \Lambda(X)^{n-2} X \rangle = \langle X, X^{n-1} \rangle = \kappa_n.$$

Como los cumulantes caracterizan a la distribución, se tiene que a tiene distribución μ.

Cabe mencionar que existen otros espacios de Fock, además del libre. De hecho para un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $q \in [-1, 1]$ se define el espacio de Fock q-deformado como el espacio de Hilbert $\mathcal{F}_q(\mathcal{H})$, como la completación del espacio pre-Hilbert

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n},$$

con el producto $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$, donde

$$\langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_n, v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \rangle_q = \sum_{\pi \in S_n} q^{i(\pi)} \langle f_1, g_{\pi(1)} \rangle \cdots \langle f_n, g_{\pi(n)} \rangle,$$

y $i(\pi) = \#\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n, \pi(i) > \pi(j)\}$.

Además, dado $f \in \mathcal{H}$, definimos el *operador creación* $a^*(f)$ y el *operador aniquilación* $a(f)$ sobre $\mathcal{F}_q(\mathcal{H})$, como

$$a^*(f)\Omega = f,$$
$$a^*(f) f_1 \otimes \cdots \otimes f_n = f \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_n,$$

y

$$a(f)\Omega = f,$$
$$a(f) f_1 \otimes \cdots \otimes f_n = \sum_{i=1}^{n} q^{i-1} \langle f, f_i \rangle f_1 \otimes \cdots \otimes \hat{f}_i \otimes \cdots \otimes f_n,$$

Se puede ver fácilmente que el espacio de Fock libre es el espacio de Fock q-deformado con

$q = 0$. Los casos $q = 1$ y $q = -1$ también son importantes y se relacionan con otros tipos de independencia; para profundizar en esto ver [46].

Capítulo 2

Nociones básicas de probabilidad bi-libre

En este capítulo se definen los conceptos básicos de la teoría de probabilidad bi-libre. Comenzamos definiendo el producto libre de espacios de Hilbert y de espacios vectoriales, lo cual será de vital importancia para la definición de independencia bi-libre. Seguido de esto, se introducen los conceptos de par de caras y familias de dos caras que formaliza la idea de Dan Voiculescu de lidiar con dos tipos de variables "las variables izquierdas" y "las variables derechas" de manera simultánea, y para estos nuevos elementos (pares de caras) definimos una noción de independencia adecuada. En seguida, se presentan ejemplos donde este ambiente surge de manera natural. Adicionalmente y en base a resultados de las secciones anteriores se definen convoluciones bi-libres de medidas. La siguiente sección está dedicada a definir una noción adecuada de cumulantes bi-libres en términos del teorema 2.5.1 de existencia y unicidad de los mismos. También se definen las distribuciones de límite central y las $*$-distribuciones de limite central, además del importante teorema 2.6.4 que nos da una condición necesaria y suficiente para que una distribución de límite central sea una $*$-distribución de límite central en términos de los momentos de segundo orden. Por último y en base a lo anterior se presenta el teorema del límite central bi-libre. Como referencia general para los resultados de este capítulo está el artículo de Voiculescu [53].

2.1 Preliminares en productos libres

Existen dos construcciones del producto libre y sus factorizaciones que nos ayudan a definir independencia bi-libre, una que involucra espacios de Hilbert y otra puramente algebraica, en esta sección presentamos ambas.

2.1.1 Producto libre de espacios de Hilbert

Sea $(\mathcal{H}_i, \xi_i)$, $i \in I$ una familia de espacios de Hilbert con vectores unitarios especificados etiquetados por el conjunto de índices I. El *producto libre de los espacios de Hilbert* $(\mathcal{H}_i, \xi_i)$, $i \in I$, el cual denotamos por $(\mathcal{H},\xi) = \underset{i\in I}{*}(\mathcal{H}_i,\xi_i)$ es la completación del espacio pre-Hilbert

$$\mathbb{C}\xi \oplus \bigoplus_{n\geq 1} \bigoplus_{i_1\neq i_2\neq \ldots \neq i_n} \mathring{\mathcal{H}}_{i_1} \otimes \mathring{\mathcal{H}}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathring{\mathcal{H}}_{i_n},$$

con el producto interno $\langle f_1\otimes\cdots\otimes f_n, g_1\otimes\cdots\otimes g_m\rangle = \delta_{n,m}\prod_{k=1}^{n}\langle f_i, g_i\rangle$ y donde $\mathring{\mathcal{H}}_i = \mathcal{H}_i \ominus \mathbb{C}\xi_i$ y ξ es dado de norma 1. La tercera suma directa se hace sobre todos los subconjuntos $\{i_1,...,i_n\}\subset I$ de tamaño n y tal que $i_1\neq i_2\neq ...\neq i_n$ (nótese que en principio i_1 puede ser igual a i_3).
También para cada $i\in I$ definimos

$$\mathcal{H}(l,i) = \mathbb{C}\xi \oplus \bigoplus_{n\geq 1} \bigoplus_{\substack{i_1\neq i_2\neq \ldots \neq i_n \\ i_1\neq i}} \mathring{\mathcal{H}}_{i_1} \otimes \mathring{\mathcal{H}}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathring{\mathcal{H}}_{i_n},$$

y

$$\mathcal{H}(r,i) = \mathbb{C}\xi \oplus \bigoplus_{n\geq 1} \bigoplus_{\substack{i_1\neq i_2\neq \ldots \neq i_n \\ i_n\neq i}} \mathring{\mathcal{H}}_{i_1} \otimes \mathring{\mathcal{H}}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathring{\mathcal{H}}_{i_n},$$

Existen también identificaciones naturales que llevan estas factorizaciones al producto libre de una manera “natural” identificando unidades. Formalmente hablamos de los operadores unitarios $V_i : \mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}(l,i) \to \mathcal{H}$ y $W_i : \mathcal{H}(r,i)\otimes\mathcal{H}_i \to \mathcal{H}$, donde V_i se define como,

$$\begin{aligned}
\xi_i \otimes \xi &\mapsto \xi,\\
\mathring{\mathcal{H}}_i \otimes \xi &\mapsto \mathring{\mathcal{H}}_i,\\
\xi_i \otimes (\mathring{\mathcal{H}}_{i_1} \otimes \mathring{\mathcal{H}}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathring{\mathcal{H}}_{i_n}) &\mapsto \mathring{\mathcal{H}}_{i_1} \otimes \mathring{\mathcal{H}}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathring{\mathcal{H}}_{i_n},\\
\mathring{\mathcal{H}}_i \otimes (\mathring{\mathcal{H}}_{i_1} \otimes \mathring{\mathcal{H}}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathring{\mathcal{H}}_{i_n}) &\mapsto \mathring{\mathcal{H}}_i \otimes \mathring{\mathcal{H}}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathring{\mathcal{H}}_{i_n}.
\end{aligned}$$

Mientras que W_i se define como,

$$\begin{aligned}
\xi \otimes \xi_i &\mapsto \xi,\\
\xi \otimes \mathring{\mathcal{H}}_i &\mapsto \mathring{\mathcal{H}}_i,\\
(\mathring{\mathcal{H}}_{i_1} \otimes \mathring{\mathcal{H}}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathring{\mathcal{H}}_{i_n}) \otimes \xi_i &\mapsto \mathring{\mathcal{H}}_{i_1} \otimes \mathring{\mathcal{H}}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathring{\mathcal{H}}_{i_n},\\
(\mathring{\mathcal{H}}_{i_1} \otimes \mathring{\mathcal{H}}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathring{\mathcal{H}}_{i_n}) \otimes \mathring{\mathcal{H}}_i &\mapsto \mathring{\mathcal{H}}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathring{\mathcal{H}}_{i_n} \otimes \mathring{\mathcal{H}}_i.
\end{aligned}$$

La factorización de $\mathcal{H}$ en términos de $\mathcal{H}(l,i)$ o $\mathcal{H}(r,i)$ y las definiciones de W_i y V_i nos brindan dos maneras de llevar operadores que actúan en los espacios $\mathcal{H}_i$ a operadores que actúan en el producto libre $(\mathcal{H})$ de la siguiente forma.

Si T es un operador lineal en $\mathcal{H}_i$ definimos.

$$\lambda_i(T) = V_i(T\otimes I_{\mathcal{H}(l,i)})V_i^{-1},$$

y

$$\rho_i(T) = W_i(I_{\mathcal{H}(r,i)} \otimes T)W_i^{-1},$$

el operador izquierdo y el operador derecho, respectivamente (ambos ρ_i y λ_i son representaciones de $B(\mathcal{H}_i)$ en $B(\mathcal{H})$).

Existe una factorización más de $\mathcal{H}$ la cual es $\mathcal{H}_i \oplus (\mathcal{H}_i \otimes \overset{\circ}{\mathcal{H}}(lr,i) \otimes \mathcal{H}_i)$ e identificando de una manera natural a $\lambda_i(T)$ y $\rho_i(T)$ con $T \oplus (T \otimes I_{\mathcal{H}(l,i)} \otimes I_{\mathcal{H}_i})$ y $T \oplus (I_{\mathcal{H}_i} \otimes I_{\mathcal{H}(l,i)} \otimes T)$, donde

$$\overset{\circ}{\mathcal{H}}(lr,i) = \bigoplus_{n\geq 1} \bigoplus_{\substack{i_1\neq i_2\neq \ldots \neq i_n \\ i_1 \neq i \neq i_n}} \overset{\circ}{\mathcal{H}}_{i_1} \otimes \overset{\circ}{\mathcal{H}}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \overset{\circ}{\mathcal{H}}_{i_n},$$

pero aún así tenemos sólo dos maneras de representar $B(\mathcal{H}_i)$ en $B(\mathcal{H})$, la izquierda y derecha.

2.1.2 Producto libre de espacios vectoriales

Existen tres maneras equivalentes de denotar un espacio vectorial con vector especificado.

1. $(\mathcal{X}, \overset{\circ}{\mathcal{X}}, \xi)$, donde $\mathcal{X}$ es un espacio vectorial, $\overset{\circ}{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}$ es un espacio de codimensión 1 y $0 \neq \xi \in \mathcal{X}$ un vector tal que $\mathcal{X} = \overset{\circ}{\mathcal{X}} \oplus \mathbb{C}\xi$.
2. $(\mathcal{X}, p, \xi)$, donde de nuevo $\mathcal{X}$ es un espacio vectorial, $p : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ operador idempotente de rango 1 y $0 \neq \xi \in \mathcal{X}$ tal que $p(\xi) = \xi$.
3. La última es $(\mathcal{X}, \phi, \xi)$, con $\mathcal{X}$ espacio vectorial, ϕ funcional lineal de $\mathcal{X}$ y $\xi \in \mathcal{X}$ tal que $\phi(\xi) = 1$.

Notemos que en 2 y 3 podemos definir $\overset{\circ}{\mathcal{X}} = \ker p$ y respectivamente $\overset{\circ}{\mathcal{X}} = \ker \phi$, obteniendo la tripleta de 1. En adelante usaremos 3 y la observación anterior.

Si $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ denota el conjunto de todos los operadores lineales $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, definamos el funcional $\varphi_\xi : \mathcal{L}(\mathcal{X}) \to \mathbb{C}$ tal que para T operador lineal acotado actuando en $\mathcal{X}$ se tiene $\varphi_\xi(T) = \phi(T\xi)$. Dado que $\varphi_\xi(I) = 1$, el par $(\mathcal{L}(\mathcal{X}), \varphi_\xi)$ es un espacio de probabilidad no conmutativo. Otra construcción análoga del funcional φ_ξ, es usando 2, como el único funcional que cumple que $\varphi_\xi(T)p = pTp$, en este caso usaremos la notación φ_p.

Sea $(\mathcal{X}_i, \overset{\circ}{\mathcal{X}}_i, \xi_i)_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales con vectores especificados etiquetados por el conjunto de índices I. El producto libre de los espacios vectoriales es $(\mathcal{X}, \overset{\circ}{\mathcal{X}}, \xi) = \underset{i\in I}{*}(\mathcal{X}_i, \overset{\circ}{\mathcal{X}}_i, \xi_i)$ donde

$$\mathcal{X} = \overset{\circ}{\mathcal{X}} \oplus \mathbb{C}\xi,$$

y

$$\overset{\circ}{\mathcal{X}} = \bigoplus_{n\geq 1} \bigoplus_{i_1\neq i_2\neq \ldots \neq i_n} \overset{\circ}{\mathcal{X}}_{i_1} \otimes \overset{\circ}{\mathcal{X}}_{i_2} \cdots \otimes \overset{\circ}{\mathcal{X}}_{i_n}.$$

Nótese que esta fórmula luce idéntica al caso con espacios de Hilbert, pero aquí las sumas y productos tensoriales son puramente algebraicos y no involucran completaciones, ni ortogonalidad, pues no hay producto interior.

Ahora bien, para cada $i \in I$ definimos

$$\mathcal{X}(l,i) = \mathbb{C}\xi \oplus \bigoplus_{n\geq 1} \bigoplus_{\substack{i_1\neq i_2\neq \ldots \neq i_n \\ i_1 \neq i}} \mathring{\mathcal{X}}_{i_1} \otimes \mathring{\mathcal{X}}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathring{\mathcal{X}}_{i_n},$$

y

$$\mathcal{X}(r,i) = \mathbb{C}\xi \oplus \bigoplus_{n\geq 1} \bigoplus_{\substack{i_1\neq i_2\neq \ldots \neq i_n \\ i_n \neq i}} \mathring{\mathcal{X}}_{i_1} \otimes \mathring{\mathcal{X}}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathring{\mathcal{X}}_{i_n}.$$

A partir de aquí las definiciones de las identificaciones naturales dadas por los operadores unitarios $V_i : \mathcal{X}_i \otimes \mathcal{X}(l,i) \to \mathcal{X}$, $W_i : \mathcal{X}(r,i) \otimes \mathcal{X}_i \to \mathcal{X}$ y por tanto de $\lambda_i : \mathcal{L}(\mathcal{X}_i) \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ y $\rho_i : \mathcal{L}(\mathcal{X}_i) \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ son idénticas a las del producto de espacios de Hilbert, si cambiamos $\mathcal{H}$'s por $\mathcal{X}$'s.

De la ortogonalidad en el producto libre (en ambos casos) y las factorizaciones se sigue que si $T_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_i)$ y $T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_j)$ entonces

$$[\lambda_i(T_1), \rho_j(T_2)] = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ [T_1, T_2] \oplus \mathcal{O}_{\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}_i} & \text{si } i = j, \end{cases}$$

donde λ_i, ρ_i son, respectivamente, los operadores izquierdo y derechos, antes definidos y $\mathcal{O}_{\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}_i}$ denota la restricción de la función cero al conjunto $\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_i$.

Terminamos esta sección aclarando que por un morfismo entre espacios vectoriales con vectores especificados $(\mathcal{X}, \mathring{\mathcal{X}}, \xi)$ y $(\mathcal{X}', \mathring{\mathcal{X}}', \xi')$ hablamos de una función lineal $S : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$, tal que $S\xi = \xi'$ y $S(\mathring{\mathcal{X}}) \subset \mathring{\mathcal{X}}'$.

2.2 Independencia bi-libre

La idea de independencia bi-libre es trabajar con una estructura que distinga dos tipos de variables, cuya noción de independencia combine los operadores izquierdos y derechos del producto libre y que además generalice la independencia libre. Podríamos trabajar con simples pares ordenados, por ejemplo si $(\mathcal{A}, \varphi)$ es un $*$-espacio de probabilidad no conmutativo, podemos dotar a $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ con la siguiente estructura:

- (Definición de suma) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
- (Producto) $(a, b)(c, d) = (ac, bd)$.
- (Involución) $(a, b)^* = (a^*, b^*)$.
- (Definición del funcional) $\phi(a, b) = \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}$.

Es fácil ver que $(\mathcal{A}\times\mathcal{A}, \phi)$ es un $*$-espacio de probabilidad no conmutativo, así que una noción de independencia natural para estos elementos debe ser una de las cinco independencias que Muraki presenta en [36]. Esta es una de las razones por las que esta estructura no es adecuada, pues buscamos una generalización de libertad (freeness), aplicada además a pares de álgebras $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$, que si bien ambas entradas "viven" (como subconjuntos) en el espacio $(\mathcal{A}, \varphi)$, no respetan ninguna relación entre ellas y no es necesario que tengan la misma cardinalidad (tener por ejemplo una cantidad infinita de variables en la primera entrada y una finita en la segunda; que no es el caso del ejemplo anterior pues si distinguiéramos a las variables de la primera entrada y a las de la segunda entrada como "variables izquierdas" y "variables derechas", respectivamente, entonces toda familia de pares tendría la misma cantidad de variables izquierdas y derechas).

En 2013, Dan Voiculescu presenta los elementos adecuados para evitar los anteriores problemas, los cuales son pares ordenados de familias de variables aleatorias pero sin pensar que estos pares viven en un espacio al que le asignaremos propiedades, si no usando las propiedades que conocemos de nuestro espacio inicial y un tipo de independencia que combine operadores izquierdos y derechos.

2.2.1 Conceptos básicos

Definición 2.2.1 Un *par de caras* en un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \varphi)$ es un par ordenado $((\mathcal{B}, \beta), (\mathcal{C}, \gamma))$ donde $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ son álgebras con unidad y $\beta : \mathcal{B} \to \mathcal{A}, \gamma : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ son homomorfismos. Nos referimos a $(\mathcal{B}, \beta)$ y a $(\mathcal{C}, \gamma)$ como *cara izquierda* y respectivamente *cara derecha* en el par de caras.

Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son subálgebras con unidad de $\mathcal{A}$, y β, γ los homomorfismos inclusión, el par $((\mathcal{B}, \beta), (\mathcal{C}, \gamma))$ también se denotará $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, y $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ serán llamadas la *cara izquierda* y la *cara derecha*, respectivamente.

La definición anterior nos brinda los elementos sobre los que definiremos nuestro nuevo concepto de independencia.

Definición 2.2.2 Una *familia de dos caras* de variables aleatorias en un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \varphi)$ es un par ordenado $((b_i)_{i\in I}, (c_j)_{j\in J})$ de familias de variables aleatorias en $(\mathcal{A}, \varphi)$ (i.e., las b_i y c_j son elementos de $\mathcal{A}$). Nos referiremos a $(b_i)_{i\in I}$ como la familia de variables izquierdas y a $(c_j)_{j\in J}$ como la familia de variables derechas en la familia de dos caras.

Si tanto I como J tienen un sólo elemento, digamos $I = J = \{1\}$ nos referimos a la familia de dos caras $(\{b_1\}, \{c_1\})$, la cual denotaremos por (b_1, c_1), como *variable de dos caras.*

Finalmente si tenemos una familia de dos caras como arriba, el *par de caras asociado* a tal familia es $((\mathbb{C}\langle X_i : i \in I\rangle, \beta)\ ,\ (\mathbb{C}\langle Y_j : j \in J\rangle, \gamma))$ donde β es homomorfismo tal que $\beta(X_i) = b_i$ y γ tal que $\gamma(Y_j) = c_j$.

Definamos ahora lo que entenderemos por distribución en este marco teórico.

Definición 2.2.3 Si $\pi = ((\mathcal{B}_k, \beta_k), (\mathcal{C}_k, \gamma_k))_{k\in K}$ es una familia de par de caras en $(\mathcal{A}, \varphi)$ entonces su *distribución conjunta* es el funcional $\mu_\pi : \underset{k\in K}{*}(\mathcal{B}_k * \mathcal{C}_k) \to \mathbb{C}$ definido como $\mu_\pi = \varphi \circ \alpha$ donde $\alpha : \underset{k\in K}{*}(\mathcal{B}_k * \mathcal{C}_k) \to \mathcal{A}$ es el homomorfismo tal que $\alpha\ |_{\mathcal{B}_k} = \beta_k$ y $\alpha\ |_{\mathcal{C}_k} = \gamma_k$. La distribución de una familia de variables de dos caras $((b_i)_{i\in I}, (c_j)_{j\in J}) = (\hat{b}, \hat{c})$ es la distribución de su par de caras asociado.

Observación 2.2.4 *Una consecuencia de la definición anterior es que si* $((b_i)_{i\in I}, (c_j)_{j\in J}) = (\hat{b}, \hat{c})$ *es una familia de dos caras de variables aleatorias no conmutativas en* $(\mathcal{A}, \phi)$*, entonces su distribución* $\mu_{\hat{b},\hat{c}}$ *es el funcional* $\mu_{\hat{b},\hat{c}} = \phi \circ \alpha$ *donde* $\alpha : \mathbb{C}\langle X_i, Y_j : i \in I, j \in J\rangle \to \mathcal{A}$ *es el homomorfismo* $\alpha(X_i) = b_i$ *y* $\alpha(Y_j) = c_j$*. Equivalentemente, la distribución de la familia de dos* *caras* $((b_i)_{i\in I},(c_j)_{j\in J}) = (\hat{b},\hat{c})$ *es la distribución conjunta en el sentido algebraico de la familia* $\{(b_i)_{i\in I},(c_j)_{j\in J}\}$ *como lo entendemos en probabilidad no conmutativa.*

Esto se sigue de identificar $\mathbb{C}\langle Z_i : i\in I\rangle$ *con* $\underset{i\in I}{*}\mathbb{C}\langle Z_i\rangle$ *y puede ser usada como definición de distribución.*

Para la definición de independencia bi-libre, la cual es la piedra angular de esta teoría, necesitamos hacer uso de los productos libres y operadores izquierdo y derecho definidos en la sección anterior, y como ya vimos, esto se puede hacer de dos formas y aunque en la definición que daremos las dos son equivalentes, presentaremos ambas; la razón de esto es que en algunas definiciones futuras usaremos la definición con producto de espacios de Hilbert y en otras con producto de espacios vectoriales.

2.2.2 Versión con espacios de Hilbert

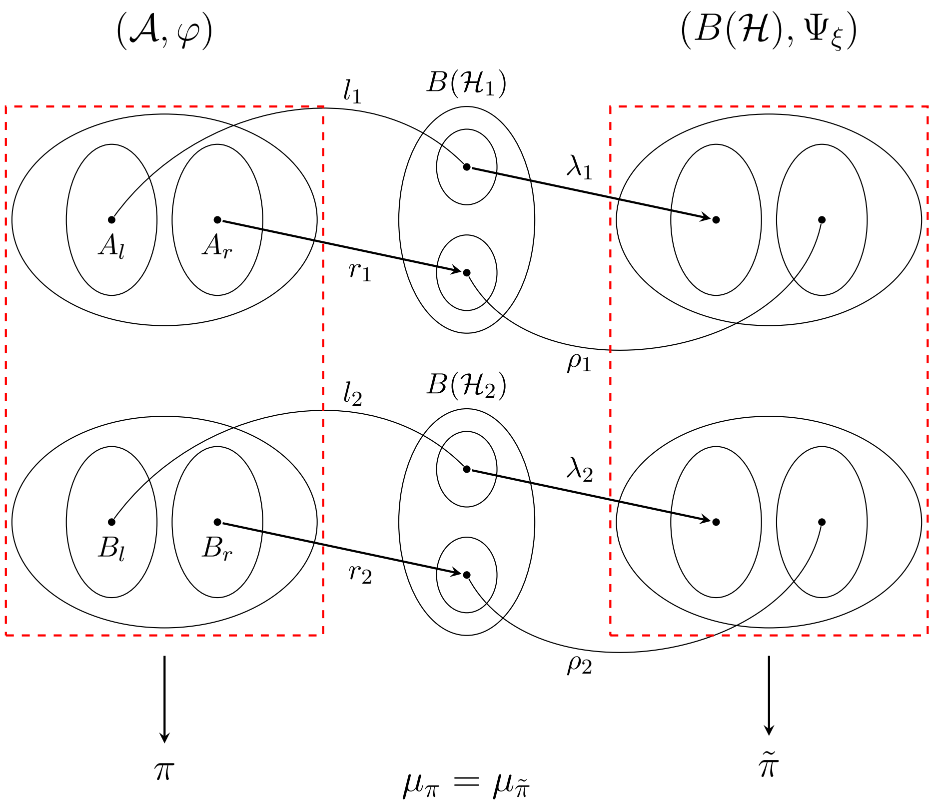
Definición 2.2.5 *Una familia* $\pi = ((\mathcal{B}_k,\beta_k),(\mathcal{C}_k,\gamma_k))_{k\in K}$ *de pares de caras en* $(\mathcal{A},\varphi)$ *es bi-libre (o bi-libremente independiente) si existe una familia de espacios de Hilbert con vectores especificados* $(\mathcal{H}_k,\xi_k)_{k\in K}$ *y homomorfismos* $l_k : \mathcal{B}_k \to B(\mathcal{H}_k)$ *y* $r_k : \mathcal{C}_k \to B(\mathcal{H}_k)$ *tal que si* $\bar{\pi} = ((\mathcal{B}_k,\lambda_k\circ l_k),(\mathcal{C}_k,\rho_k\circ r_k))_{k\in K}$ *es la familia de par de caras de* $(B(\mathcal{H}),\xi)$*, donde* $(\mathcal{H},\xi) = \underset{i\in I}{*}(\mathcal{H}_i,\xi_i)$*, tenemos la igualdad de las distribuciones* $\mu_\pi = \mu_{\bar{\pi}}$*. Una familia de dos caras es bi-libre si su familia de par de caras asociado es bi-libre. La familia* π *es estrictamente bi-libre si es bi-libre y* $k\neq j$ *implica* $[\beta_k(\mathcal{B}_k),\gamma_j(\mathcal{C}_j)] = 0$*, donde* λ_k,ρ_k *son los operadores izquierdos y derechos, respectivamente.*

De la definición se sigue que $\pi = \{(A_l,A_r),(B_l,B_r)\}$, que consiste solamente en un par de par de caras, es bi-libre si su distribución en $(\mathcal{A},\varphi)$ es la misma que la de

$$\tilde{\pi} = \{(\lambda_1(l_1(A_l)),\rho_1(r_1(A_r))),(\lambda_2(l_2(B_l)),\rho_2(r_2(B_r)))\},$$

esta última en $(B(\mathcal{H}),\xi)$, para algunos homomorfismos l_1,l_2,r_1,r_2 (con los dominios y contradominios análogos a la definición) tal como se muestra en la figura 2.2.2.

Donde el rectángulo punteado de la izquierda es la familia de par de caras que vive en $(\mathcal{A},\varphi)$ y tiene distribución μ_π y el de la derecha la familia de par de caras que inducen los homomorfismos y los operadores izquierdos y derechos en $(B(\mathcal{H}),\Psi_\xi)$, donde $(\mathcal{H},\xi) = (\mathcal{H}_1,\xi_1)*(\mathcal{H}_2,\xi_2)$ con distribución $\mu_{\tilde{\pi}}$. En otras palabras, Una familia de par de caras en $(\mathcal{A},\varphi)$ es bi-libre si se puede meter de manera muy especifica a un espacio $(B(\mathcal{H}),\Psi_\xi)$ de operadores de un producto libre, y su distribución queda invariante, donde $\Psi_\xi(T) = \langle T\xi,\xi\rangle$.



Una manera de entender la analogía que tiene la independencia libre con la independencia bi-libre es al leer el trabajo original de Voiculescu [50] donde prácticamente dice lo siguiente.

Las subálgebras A_1 y A_2 de $\mathcal{A}$ son libres si y sólo si existen espacios de Hilbert $\mathcal{H}_k$ y homomorfismos $\alpha_k : \mathcal{A}_k \to B(\mathcal{H}_k),\ k = 1, 2$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A_1 * A_2 \arrow[rr, "i"] \arrow[d, "\alpha_1 * \alpha_2"'] & & \mathcal{A} \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{C} \\
B(\mathcal{H}_1) * B(\mathcal{H}_2) \arrow[r, "\lambda_1 * \lambda_2", "(\rho_1 * \rho_2)"'] & B(\mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2) \arrow[urr, "\Psi_\xi"'] & &
\end{tikzcd}$$

Figura 2.1: Diagrama libre

Ahora veamos la similitud con el caso bi-libre, representando diagramáticamente lo que la definición de independencia bi-libre dice, para el caso de una familia de dos pares de caras
Los pares de caras $(A_{l,1}, A_{r,1})$ y $(A_{l,2}, A_{r,2})$ de $\mathcal{A}$ son bi-libres si y sólo si existen espacios de Hilbert $\mathcal{H}_k$ y homomorfismos $\alpha_k : \mathcal{A}_{l,k} \to B(\mathcal{H}_k)$ y $\beta_k : \mathcal{A}_{r,k} \to B(\mathcal{H}_k)$ k=1,2. tal que el siguiente diagrama conmuta:

Como se puede ver en el primer diagrama la elección entre usar los operadores izquierdos o usar operadores derechos, es equivalente, en el sentido que podemos modelar independencia libre

$$
\begin{tikzcd}
A_{l,1} * A_{r,1} * A_{l,2} * A_{r,2} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha_1*\beta_1*\alpha_2*\beta_2"'] & \mathcal{A} \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{C} \\
B(\mathcal{H}_1) * B(\mathcal{H}_1) * B(\mathcal{H}_2) * B(\mathcal{H}_2) \arrow[r, "\lambda_1*\rho_1*\lambda_2*\rho_2"] & B(\mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2) \arrow[ur, "\Psi_\xi"'] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.2: Diagrama bi-libre

con ambos. En el segundo diagrama, correspondiente a independencia bi-libre, se combinan las álgebras de una forma específica y se utilizan tanto los operadores izquierdos como los derechos.

Observación 2.2.6 *La definición de independencia bi-libre para familias de dos caras se puede poner en términos más prácticos, (tomando en cuenta las mismas consideraciones que en la observación 2.2.4) como sigue.*

Dos familias de dos caras de variables de $(\mathcal{A}, \varphi)$*,* $((b_i)_{i\in I}, (c_j)_{j\in J})$ *y* $((b'_i)_{i\in I'}, (c'_j)_{j\in J'})$ *son bi-libres si existen* $(\mathcal{H}_1, \xi_1)$ *y* $(\mathcal{H}_2, \xi_2)$ *espacios de Hilbert con vectores especificados y operadores* $((T_i)_{i\in I}, (S_j)_{j\in J})$ *actuando por la izquierda y derecha, respectivamente en* $\mathcal{H}_1$ *y* $((T'_i)_{i\in I'}, (S'_j)_{j\in J'})$ *actuando por la izquierda y derecha respectivamente en* $\mathcal{H}_2$ *tal que la distribución de las variables* $\{(b_i)_{i\in I}, (c_j)_{j\in J}, (b'_i)_{i\in I'}, (c'_j)_{j\in J'}\}$ *es la misma que la de* $\{(T_i)_{i\in I}, (S_j)_{j\in J}, (T'_i)_{i\in I'}, (S'_j)_{j\in J'}\}$ *en* $B(\mathcal{H})$ *con respecto a* ξ*.*

2.2.3 Versión con espacios vectoriales

Definición 2.2.7 *Una familia* $\pi = ((\mathcal{B}_k, \beta_k), (\mathcal{C}_k, \gamma_k))_{k\in K}$ *de pares de caras en* $(\mathcal{A}, \varphi)$ *es bi-libre (o bi-libremente independiente) si existe una familia de espacios vectoriales con vectores especificados* $(\mathcal{X}_k, \overset{\circ}{\mathcal{X}}_k, \xi_k)_{k\in K}$ *y homomorfismos* $l_k : \mathcal{B}_k \to \mathcal{L}(\mathcal{X}_k)$ *y* $r_k : \mathcal{C}_k \to \mathcal{L}(\mathcal{X}_k)$ *tal que si* $\bar{\pi} = ((\mathcal{B}_k, \lambda_k \circ l_k), (\mathcal{C}_k, \rho_k \circ r_k))_{k\in K}$ *es la familia de par de caras de* $(\mathcal{L}(\mathcal{X}), \xi)$*, donde,* $(\mathcal{X}, \overset{\circ}{\mathcal{X}}, \xi) = \underset{k\in K}{*} (\mathcal{X}_k, \overset{\circ}{\mathcal{X}}_k, \xi_k)$ *tenemos la igualdad de las distribuciones* $\mu_\pi = \mu_{\bar{\pi}}$*. Una familia de dos caras es bi-libre si su familia de par de caras asociado es bi-libre.*

2.2.4 Resultados generales

Dejaremos a un lado el hecho que tenemos dos versiones de independencia bi-libre y consideraremos ambas como equivalentes, vamos a establecer resultados interesantes y algunas consecuencias de la definición.

Necesitamos demostrar que la independencia bi-libre no depende de una particular elección de los homomorfismos l_k y r_k. Para lo que necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.2.8 *Sean* $\mathcal{B}_k, \mathcal{C}_k$ *álgebras con unidad y* $l_k : \mathcal{B}_k \to \mathcal{L}(\mathcal{X}_k)$*,* $r_k : \mathcal{C}_k \to \mathcal{L}(\mathcal{X}_k)$*,* $l'_k : \mathcal{B}_k \to \mathcal{L}(\mathcal{X}'_k)$*,* $r'_k : \mathcal{C}_k \to \mathcal{L}(\mathcal{X}'_k)$ *homomorfismos, donde* $(\mathcal{X}_k, \overset{\circ}{\mathcal{X}}_k, \xi_k)$ *y* $(\mathcal{X}'_k, \overset{\circ}{\mathcal{X}'}_k, \xi'_k)$ *son espacios vectoriales con vectores especificados y supongamos que existen morfismos* $S_k : (\mathcal{X}_k, \overset{\circ}{\mathcal{X}}_k, \xi_k) \to (\mathcal{X}'_k, \overset{\circ}{\mathcal{X}'}_k, \xi'_k)$ *que* *entrelazan las representaciones l_k y l'_k de $\mathcal{B}_k$ (i.e $S_k l_k(a) = l'_k(b)S_k$, $\forall b \in \mathcal{B}_k$) y también entrelazan las representaciones r_k y r'_k de $\mathcal{C}_k$. Entonces si $(\mathcal{X}, \overset{\circ}{\mathcal{X}}, \xi) = \underset{k\in K}{*}(\mathcal{X}_k, \overset{\circ}{\mathcal{X}}_k, \xi_k)$, $(\mathcal{X}', \overset{\circ}{\mathcal{X}}', \xi') = \underset{k\in K}{*}(\mathcal{X}'_k, \overset{\circ}{\mathcal{X}'}_k, \xi'_k)$, $S = \underset{k\in K}{*} S_k$ y $\alpha : \underset{k\in K}{*}(\mathcal{B}_k * \mathcal{C}_k) \to \mathcal{L}(\mathcal{X}_k)$ y $\alpha' : \underset{k\in K}{*}(\mathcal{B}_k * \mathcal{C}_k) \to \mathcal{L}(\mathcal{X}'_k)$ son los homomorfismos tal que $\alpha|_{\mathcal{B}_k} = \lambda_k \circ l_k$, $\alpha|_{\mathcal{C}_k} = \rho_k \circ r_k$ $\alpha'|_{\mathcal{B}_k} = \lambda'_k \circ l'_k$, $\alpha'|_{\mathcal{C}_k} = \rho'_k \circ r'_k$ entonces S entrelaza a α y a α'. Mas aún también se tiene que $\Psi_\xi \circ \alpha = \Psi_{\xi'} \circ \alpha'$, donde $\Psi_\xi, \Psi_{\xi'}$ son los funcionales en $\mathcal{L}(\mathcal{X}_k)$ y $\mathcal{L}(\mathcal{X}'_k)$ respectivamente.*

Proposición 2.2.9 *Sea $\pi = ((\pi_k))_{k\in K} = ((\mathcal{B}_k, \beta_k), (\mathcal{C}_k, \gamma_k))_{k\in K}$ una familia de pares de caras en $(\mathcal{A}, \varphi)$ y para cada $k \in K$ sea $(\mathcal{X}'_k, \overset{\circ}{\mathcal{X}'}_k, \xi'_k)$ un espacio vectorial con vector especificado y sean $l'_k : \mathcal{B}_k \to \mathcal{L}(\mathcal{X}'_k)$ y $r'_k : \mathcal{C}_k \to \mathcal{L}(\mathcal{X}'_k)$ homomorfismos que definen un par de caras $\pi'_k = ((\mathcal{B}_k, l'_k), (\mathcal{C}_k, r'_k))_{k\in K}$ en $(\mathcal{L}(\mathcal{X}'_k), \varphi_{\xi'_k})$ tal que tenemos la igualdad de distribuciones $\mu_{\pi_k} = \mu_{\pi'_k}, k \in K$. Sea además $(\mathcal{X}', \overset{\circ}{\mathcal{X}}', \xi') = \underset{k\in K}{*}(\mathcal{X}'_k, \overset{\circ}{\mathcal{X}'}_k, \xi'_k)$ y sea $\bar{\pi}' = ((\bar{\pi}_k'))_{k\in K} = ((\mathcal{B}_k, \lambda'_k \circ l'_k), (\mathcal{C}_k, \rho'_k \circ r'_k))_{k\in K}$ la familia de caras en $(\mathcal{L}(\mathcal{X}'), \varphi_{\xi'})$. Entonces π es bi-libre si y sólo si $\mu_\pi = \mu_{\bar{\pi}'}$.*

Demostración. La suficiencia se sigue inmediatamente de la definición, pues ya tenemos la existencia de los morfismos y la igualdad de las distribuciones.

Supongamos que π es bi-libre y sea $(\mathcal{X}''_k, \overset{\circ}{\mathcal{X}''}_k, \xi''_k)_{k\in K}$ el espacio que existe de la definición de independencia bi-libre, con $\mu_\pi = \mu_{\pi''}$, así que sólo basta encontrar morfismos $S_k : (\mathcal{X}'_k, \overset{\circ}{\mathcal{X}'}_k, \xi'_k)_{k\in K} \to (\mathcal{X}''_k, \overset{\circ}{\mathcal{X}''}_k, \xi''_k)_{k\in K}$ que cumplan las propiedades del lema anterior y así por la igualdad de $\Psi''_\xi \circ \alpha'' = \Psi_{\xi'} \circ \alpha'$ se cumplirá que $\mu_{\pi'} = \mu_{\pi''}$ y por tanto $\mu_{\pi'} = \mu_\pi$.

Definamos pues $\mathcal{X} = \mathcal{B}_k * \mathcal{C}_k$, $\overset{\circ}{\mathcal{X}}_k = \ker \mu_{\pi_k}$, $\xi_k = 1$ y los homomorfismos l_k, r_k las representaciones izquierdas de $\mathcal{B}_k$ y respectivamente de $\mathcal{C}_k$ en $\mathcal{B}_k * \mathcal{C}_k$.

Ahora para $\epsilon \in \{', ''\}$ definimos $S^\epsilon_k(x) = \alpha^\epsilon_k(x)\xi^\epsilon_k(x)$, donde $\alpha^\epsilon_k : \mathcal{B}_k * \mathcal{C}_k \to \mathcal{L}(\mathcal{X}^\epsilon)$ es el homomorfismo tal que $\alpha^\epsilon_k|_{\mathcal{B}_k} = l^\epsilon_k$ y $\alpha^\epsilon_k|_{\mathcal{C}_k} = r^\epsilon_k$. Si $x \in \overset{\circ}{\mathcal{X}}_k = \ker \mu_{\pi_k} = \ker \mu_{\pi^\epsilon_k}$ entonces $0 = \mu_{\pi^\epsilon_k}(x)p^\epsilon_k = \Psi_{\xi^\epsilon_k}(\alpha^\epsilon_k(x))p^\epsilon_k = p^\epsilon_k \alpha^\epsilon_k(x)p^\epsilon_k$ y entonces $0 = p^\epsilon_k \alpha^\epsilon_k(x)\xi^\epsilon_k$, de aquí que $S^\epsilon_k \overset{\circ}{\mathcal{X}}_k \subset \overset{\circ}{\mathcal{X}}{}^\epsilon_k$. De S'_k y S''_k se construye el morfismo deseado. ∎

Corolario 2.2.10

1. *Si $\pi_k = ((\mathcal{B}_k, \beta_k), (\mathcal{C}_k, \gamma_k))$ son pares de caras en $(\mathcal{A}, \varphi)$ para todo $k \in K$ y la familia $\pi = (\pi_k)_{k\in K}$ es bi-libre, entonces su distribución μ_π está completamente determinada por las distribuciones μ_{π_k}, $k \in K$.*

2. *Sea $(\mathcal{B}_k, \mathcal{C}_k)$ pares de álgebras con unidad, $k \in K$ y $\mu_k : \mathcal{B}_k * \mathcal{C}_k \to \mathbb{C}$ funcionales lineales tal que $\mu_k(1) = 1$. Entonces existe una única aplicación lineal $\mu : \underset{k\in K}{*}(\mathcal{B}_k * \mathcal{C}_k) \to \mathbb{C}$, $\mu(1) = 1$, tal que la familia de par de caras $((\mathcal{B}_k, \mathcal{C}_k))_{k\in K}$ es bi-libre en $(\underset{k\in K}{*}(\mathcal{B}_k * \mathcal{C}_k), \mu)$ y $\mu\,|_{\mathcal{B}_k * \mathcal{C}_k} = \mu_k$ para todo $k \in K$.*

Demostración.

1. Podemos tomar $(\mathcal{X}'_k, \overset{\circ}{\mathcal{X}'}_k, \xi'_k)$ tal que $\mathcal{L}(\mathcal{X}'_k) = \mathcal{B}_k * \mathcal{C}_k$, así tomando como homomorfismos a las inclusiones tenemos todas las hipótesis del teorema y la distribución de esta construcción depende sólo de los μ_k entonces por la proposición tal distribución es igual a μ_π.

2. Se toma $\mu = \underset{k\in K}{*}\mu_k$. La unicidad y linealidad, así como la propiedad de que $\mu\mid_{\mathcal{B}_k * \mathcal{C}_k} = \mu_k$ se sigue de la definición de producto libre de operadores. Sea $\mathcal{L}(\mathcal{X}'_k) = \mathcal{B}_k * \mathcal{C}_k$ entonces se satisfacen las condiciones de la proposición tomando como homomorfismos a las inclusiones.

■

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra, su espacio algebraico de estados $\Sigma(\mathcal{A})$ es el subconjunto convexo del dual de $\mathcal{A}$, que consiste de los funcionales lineales $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi(1) = 1$. El espacio de distribuciones para la familia de par de caras $(\mathcal{B}_k, \mathcal{C}_k)_{k\in K}$ es el conjunto $\Sigma((\mathcal{B}_k, \mathcal{C}_k) : k \in K) = \Sigma(\underset{k\in K}{*}(\mathcal{B}_k * \mathcal{C}_k))$. Para toda familia $\mu_k \in \Sigma(\mathcal{B}_k, \mathcal{C}_k)$, $k \in K$ existe una única distribución producto bi-libre $\mu = * \underset{k\in K}{*}\mu_k \in \Sigma((\mathcal{B}_k, \mathcal{C}_k) : k \in K)$ tal que $\mu\mid_{\mathcal{B}_k * \mathcal{C}_k} = \mu_k$, $k \in K$ y por el segundo resultado del corolario anterior $((\mathcal{B}_k, \mathcal{C}_k))_{k\in K}$ es bi-libre en $(\underset{k\in K}{*}(\mathcal{B}_k * \mathcal{C}_k), \mu)$.

El hecho de que las álgebras unitarias de la definición de par de caras no necesariamente sean subconjuntos de $\mathcal{A}$ es muy útil en cuestión de generalidad, pero puede volverse tedioso en las demostraciones, el siguiente corolario nos da la razón por la cual no hay pérdida de generalidad al hacer nuestras demostraciones considerando que ambas caras “viven” en $\mathcal{A}$.

Corolario 2.2.11 *La familia de par de caras $((\mathcal{B}_k, \beta_k), (\mathcal{C}_k, \gamma_k))_{k\in K}$ es bi-libre en $(\mathcal{A}, \varphi)$ si y sólo si $((\beta_k(\mathcal{B}_k), \gamma_k(\mathcal{C}_k))_{k\in K}$ es bi-libre en $(\mathcal{A}, \varphi)$.*

Demostración. Si $((\beta_k(\mathcal{B}_k), \gamma_k(\mathcal{C}_k))_{k\in K}$ es bi-libre entonces tomamos a $l_k \circ \beta$ y $r_k \circ \gamma$ como los nuevos homomorfismos y se tiene que $((\mathcal{B}_k, \beta_k), (\mathcal{C}_k, \gamma_k))_{k\in K}$ es bi-libre. Supongamos ahora que $((\mathcal{B}_k, \beta_k), (\mathcal{C}_k, \gamma_k))_{k\in K}$ es bi-libre, sea $\mathcal{X}_k = \beta_k(\mathcal{B}_k) * \gamma_k(\mathcal{C}_k)$, $\xi_k = 1$ y $\overset{\circ}{\mathcal{X}}_k = \ker \mu_k$, donde μ_k es la distribución de $((\beta_k(\mathcal{B}_k), \gamma_k(\mathcal{C}_k))$, los morfismos $\mathcal{B}_k * \mathcal{C}_k \to \beta_k(\mathcal{B}_k) * \gamma_k(\mathcal{C}_k)$ y la proposición anterior nos dan el resultado. ■

Un hecho útil del producto de espacios vectoriales es el siguiente: Sea $(\mathcal{X}_k, \overset{\circ}{\mathcal{X}}_k, \xi_k)_{k\in K}$ una familia de espacios vectoriales con vectores especificados y $K = \coprod_{i\in I} K_i$ una partición del conjunto de índices, donde $\coprod$ denota unión disjunta. Sea $(\mathcal{Y}_i, \overset{\circ}{\mathcal{Y}}_i, \eta_i)_{i\in I}$ la familia de productos libres $(\mathcal{Y}_i, \overset{\circ}{\mathcal{Y}}_i, \eta_i) = \underset{k\in K_i}{*}(\mathcal{X}_k, \overset{\circ}{\mathcal{X}}_k, \xi_k)$. Entonces existen identificaciones naturales $\sigma : \underset{i\in I}{*}(\mathcal{Y}_i, \overset{\circ}{\mathcal{Y}}_i, \eta_i) \to \underset{k\in K}{*}(\mathcal{X}_k, \overset{\circ}{\mathcal{X}}_k, \xi_k)$, $V_{ki} : \mathcal{X}_k \otimes \mathcal{Y}_i(l, k) \otimes \mathcal{Y}(l, i) \to \mathcal{X}$, $W_{ik} : \mathcal{Y}(r, i) \otimes \mathcal{Y}_i(r, k) \otimes \mathcal{X}_k \to \mathcal{X}$, siempre que $k \in K_i$ (Note que aquí $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$).

Mas aún tenemos que $\sigma\lambda_i(\lambda_k(T)) = \lambda_k(T)\sigma$, $\sigma\rho_i(\rho_k(T)) = \rho_k(T)\sigma$, donde $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_k)$, $k \in K_i$ y los λ_k, ρ_k en la parte izquierda son operadores en $\mathcal{Y}_i$, mientras que λ_k, ρ_k de la parte derecha son operadores en $\mathcal{X}$.

La anterior observación se menciona en esta parte pues de tal hecho se sigue de manera inmediata la siguiente proposición.

Proposición 2.2.12 *Sea $\pi = ((\mathcal{B}_k, \beta_k), (\mathcal{C}_k, \gamma_k))_{k\in K}$ una familia de par de caras en $(\mathcal{A}, \varphi)$. Sea $K = \coprod_{i\in I} K_i$, $\mathcal{D}_i = \underset{k\in K_i}{*}\mathcal{B}_k$, $\mathcal{E}_i = \underset{k\in K_i}{*}\mathcal{C}_k$ y sea $\delta_i : \mathcal{D}_i \to \mathcal{A}$, $\epsilon_i : \varepsilon_i \to \mathcal{A}$ los homomorfismos tales que $\delta_i\mid_{\mathcal{B}_k} = \beta_k$, $\epsilon_i\mid_{\mathcal{C}_k} = \gamma_k$, si $k \in K_i$. Si π es bi-libre, entonces $((\mathcal{D}_i, \delta_i), (\varepsilon_i, \epsilon_i))$ es bi-libre.*

El resultado siguiente nos dice que la noción de independencia bi-libre es más estructurada que simplemente libertad en las caras izquierdas o independencia en las caras alternadas.

Proposición 2.2.13 *Sean $\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_2$ álgebras y $(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_k)_{k\in K}$ una familia de par de caras en un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \varphi)$.*

i) Suponiendo $(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_k)_{k\in K}$ bi-libre entonces $(\mathcal{A}_k)_{k\in K}$ es una familia libre en $(\mathcal{A}, \phi)$. Similarmente $(\mathcal{B}_k)_{k\in K}$ es una familia libre en $(\mathcal{A}, \varphi)$.

ii) $(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_k)_{k\in K}$ bi-libre implica $\mathcal{A}_k$ es independiente en el sentido tensorial con $\mathcal{B}_i$ para todo $i \neq k$. Mas aún si $L \subset K$ entonces las subálgebras $\underset{k\in L}{\cup}\mathcal{A}_k$ y $\underset{k\in K-L}{\cup}\mathcal{B}_k$ son independientes en el sentido tensorial.

iii) $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son independientes en el sentido tensorial si y sólo si $(\mathcal{A}_1, \mathbb{C}1_{\mathcal{A}})$ y $(\mathbb{C}1_{\mathcal{A}}, \mathcal{A}_2)$ son bi-libres.

iv) $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son álgebras libres si y sólo si $(\mathcal{A}_1, \mathbb{C}1_{\mathcal{A}})$ y $(\mathcal{A}_2, \mathbb{C}1_{\mathcal{A}})$ son bi-libres.

Demostración. Para esta demostración nos vamos a referir a los diagramas algebraicos 2.1 y 2.2.

i) Si $(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_k)_{k\in K}$ es bi-libre tenemos un diagrama como el diagrama bi-libre 2.2, con homomorfismos $\underset{k\in K}{*}(\alpha_k * \beta_k)$ hacia abajo, donde $\alpha_k : \mathcal{A}_k \to \mathcal{L}(\mathcal{X}_k)$ y $\beta_k : \mathcal{B}_k \to \mathcal{L}(\mathcal{X}_k)$, tomando pues las restricciones $\underset{k\in K}{*}(\alpha_k * \beta_k) \mid_{\underset{k\in K}{*}\mathcal{A}_k}$ y sólo los operadores izquierdos $\underset{k\in K}{*}\lambda_k$ y las restricciones de las inclusiones al mismo conjunto, obtenemos un diagrama como el diagrama libre 2.1. Por tanto $(\mathcal{A}_k)_{k\in K}$ son libres. Análogamente $(\mathcal{B}_k)_{k\in K}$ tomando los operadores derechos solamente.

ii) $(\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_k)_{k\in K}$ bi-libre implica que la familia $(\underset{k\in L}{\cup}\mathcal{A}_k, \underset{k\in L}{\cup}\mathcal{B}_k), (\underset{k\in K-L}{\cup}\mathcal{A}_k, \underset{k\in K-L}{\cup}\mathcal{B}_k)$ es bi-libre, y podemos seguir reduciéndolo, por lo que basta demostrar el caso $K = \{1, 2\}$ y $L = \{1\}$.
Sea $(\mathcal{X}, \mathring{\mathcal{X}}, \xi) = \underset{k\in\{1,2\}}{*}(\mathcal{X}_k, \mathring{\mathcal{X}}_k, \xi_k)$ de la definición de independencia bi-libre. Definamos para $T_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_k)$,

$$\mathring{T}_k = T_k - \varphi_{p_k}(T_k)I, \qquad t_k = \varphi_{p_k}(T_k),$$
$$\mathring{x}_k = \mathring{T}_k\xi_k \in \mathring{\mathcal{X}}_k.$$

Luego, por las propiedades de los operadores izquierdo y derecho tenemos que

$$\lambda_1(T_1)\rho_2(T_2) = \lambda_1(T_1)[\mathring{x}_2 + t_2\xi] = \mathring{x}_1 \otimes \mathring{x}_2 + t_2\mathring{x}_1 + t_1\mathring{x}_2 + t_1t_2\xi,$$

entonces

$$\varphi_p(\lambda_1(T_1)\rho_2(T_2)) = t_1t_2 = \varphi_{p_1}(T_1)\varphi_{p_2}(T_2) = \varphi_p(\lambda_1(T_1))\varphi_p(\rho_2(T_2)).$$

Como el par es bi-libre las álgebras tienen la misma distribución que sus imágenes en el producto libre, así que los momentos tienen la factorización adecuada y las álgebras son independientes.

iii) Un sentido (la suficiencia) es inmediato del inciso anterior. El otro se demuestra en [42].

iv) La condición suficiente es consecuencia inmediata del inciso i. Si las álgebras son libres tenemos un diagrama como el diagrama libre 2.1. Tomamos $\beta_k : \mathbb{C}\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{L}(\mathcal{X}_k)$ como $\beta_k(\lambda\mathbf{1}) = \lambda\mathbf{1}_{\mathcal{L}(\mathcal{X}_k)}$

y lo superponemos en el segundo diagrama (figura 2.2), por las propiedades de la identidad es claro que obtendremos un diagrama como el de la figura 2.1 y por tanto se tiene el resultado.

■

Todas las nociones de independencia que consideramos en la definición 1.1.5, se definen en términos de una factorización de momentos mixtos, pues el concepto de independencia bi-libre también se puede poner en esos términos, aunque no tenemos forma cerrada para los polinomios.

Proposición 2.2.14 *Dados conjuntos I, J, T, para cada $n \in \mathbb{N}$ y el par $(\alpha, t) : \{1, ..., n\} \to K \times T$ donde $K = I \coprod J$, existe $m \in \mathbb{N}$ y transformaciones $\alpha_r : \{1, ..., n(r)\} \to K$, $t(r) \in T$, $1 \leq r \leq m$ y un polinomio universal $\mathcal{P}_{\alpha,t}(X_1, ..., X_m)$, ($m, n(r), \alpha_r, t(r)$ dependen de (α, t)) tal que: Una familia de familias de dos caras $z_t = ((z_{t,i})_{i \in I}, (z_{t,j})_{j \in J})$, $t \in T$ en $(\mathcal{A}, \varphi)$ es bi-libre si y sólo si para cada (α, t), tenemos $\varphi(z_{t(1),\alpha(1)} ... z_{t(n),\alpha(n)}) = \mathcal{P}_{\alpha,t}(\varphi(z_{t(r),\alpha_r(1)} ... z_{t(r),\alpha_r(n_r)}))(1 \leq r \leq m)$.*

2.3 Ejemplos simples

En esta sección se presentan ejemplos donde la independencia bi-libre surge de manera natural.

1. Si (X_i, ξ_i) familia de espacios de Hilbert y $L(X_i)$ denota el álgebra de operadores lineales en X_i y (X, ξ) es el producto libre con vectores especificados. Usando los operadores izquierdos y derechos es casi tautológico (usando como homomorfismos la identidad) que la familia de par de caras $(\lambda_i(L(X_i)), \rho_i(L(X_i)))_{i \in I}$ es bi-libre en $(L(X), \xi)$.

2. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo y $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ es su espacio de Fock libre, $l(h), r(h)$ los operadores creación izquierda y creación derecha tal como se definen en el capítulo 1 . Si $w_i \subset \mathcal{H}$, $i \in I$ tal que $i \neq j \Rightarrow w_i \perp w_j$ (ortogonales) entonces la familia $((l(w_i) \cup l^*(w_i)), ((r(w_i) \cup r^*(w_i)))_{i \in I}$ es bi-libre en $(L(T(\mathcal{H})), < \cdot\Omega, \Omega >)$, donde Ω es el vector vacío.

3. Sea $(G_i)_{i \in I}$ colección de grupos y $G = \underset{i \in I}{*} G_i$ su producto libre. Sea $g \in G$, y denotemos por $L(g), R(g)$ el operador desplazamiento a la izquierda por g (left shift), y el operador desplazamiento a la derecha por g (right shift), i.e $L(g)\xi_h = \xi_{gh}$ y $R(g)\xi_h = \xi_{hg}$, en $l^2(G)$ respectivamente, y τ en $L(l^2(G))$ es el funcional $< \cdot\delta_e, \delta_e >$, y el conjunto $\delta_g, g \in G$ es la base canónica $l^2(G)$ entonces la familia de par de caras $((L(g))_{g \in G_i}, (R(g))_{g \in G_i})$ es bi-libre en ese espacio (consultar [57] para más detalles de este ejemplo).

Observación 2.3.1 *En [35] se demuestra que la familia $(l(w_i) \cup l^*(w_i))_{i \in I}$, bajo las mismas condiciones del ejemplo anterior, inciso 2, es libre (de hecho semicircular). ahora con la independencia bi-libre del ejemplo dos y los resultados de la sección anterior(ver proposición 2.2.13) se puede concluir como corolario la independencia libre de $((l(w_i) \cup l^*(w_i))_{i \in I}$ y de $((r(w_i) \cup r^*(w_i))_{i \in I}$ y que cualquier $(l(w_i) \cup l^*(w_i))$ es independiente en el sentido clásico con $(r(w_j) \cup r^*(w_j))$ para todo $i \neq j$ en I.*

2.4 Convoluciones bi-libres

2.4.1 Independencia bi-libre en espacios de probabilidad de Banach

Una *álgebra de von Neumann*, actuando en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es una subálgebra de $B(\mathcal{H})$ que contiene a la función identidad y es cerrada con la operación de tomar adjunto y es cerrado como conjunto en la topología débil inducida por las funcionales lineales $a \mapsto \langle a\xi, \eta\rangle, \xi, \eta \in \mathcal{H}$.

Un W^**-espacio de probabilidad* es un par $(\mathcal{A}, \varphi)$, donde $\mathcal{A}$ es una álgebra de von Neumann en algún espacio de Hilbert complejo y φ es un funcional fiel, unitario, tracial, positivo y lineal.

Definición 2.4.1 Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un C^*-espacio de probabilidad, i.e, $\mathcal{A}$ es una C^*-álgebra y φ es un estado. Una familia de pares de caras $((\mathcal{B}_k, \beta_k), (\mathcal{C}_k, \gamma_k))_{k\in K}$ es una *familia de pares de* C^**-caras* si $\mathcal{B}_k, \mathcal{C}_k$ son C^*-álgebras y β_k, γ_k $*$-homomorfismos.

Similarmente, si $(\mathcal{A}, \varphi)$ es un W^*-espacio de probabilidad, $((\mathcal{B}_k, \beta_k), (\mathcal{C}_k, \gamma_k))_{k\in K}$ es una *familia de pares de* W^**-caras* si $\mathcal{B}_k, \mathcal{C}_k$ son W^*-álgebras y β_k, γ_k $*$-homomorfismos ultradébilmente continuos, es decir, funciones que preservan las operaciones, adjuntos y son continuos en la topología débil.

Decimos que una variable de dos caras (a, b) es *autoadjunta (normal, positiva, unitaria)* si tanto a como b son autoadjuntas (normales, positivas, unitarias).

Ahora presentaremos definiciones que nos permitirán trabajar con medidas de probabilidad.

Definición 2.4.2 Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un C^*-espacio de probabilidad.

i) Decimos que una variable de dos caras (a, b) es *autoadjunta (normal, positiva, unitaria)* si tanto a como b son autoadjuntas (normales, positivas, unitarias).

ii) La $*$*-distribución* de una familia de variables de dos caras $((b_i)_{i\in I}, (c_j)_{j\in J})$ es la distribución de la familia $((b_i)_{i\in I} \coprod (b_i^*)_{i\in I}, (c_j)_{j\in J} \coprod (c_j^*)_{j\in J})$.

iii) Sea (a, b) una variable de dos caras autoadjunta y bipartita (es decir, a y b conmutan), si existe una medida μ con soporte compacto en $\mathbb{R}^2$ tal que $\forall n, m \in \mathbb{N}$,

$$\varphi(a^n b^m) = \int_{\mathbb{R}^2} w^n z^m \mu(dw, dz),$$

decimos que μ es la *distribución en el sentido analítico de* (a, b).

Que una variable de dos caras autoadjunta y bipartita (a, b) en un C^*-espacio de probabilidad $(\mathcal{A}, \varphi)$ tenga distribución es consecuencia del teorema de representación de Riesz.

Teorema 2.4.3 *Dadas dos medidas de probabilidad* μ_1, μ_2 *con soporte compacto en* $\mathbb{R}^2$*, existe un* C^**-espacio de probabilidad no conmutativo* $(\mathcal{A}, \varphi)$ *y dos variables de dos caras* (a, b) *y* (c, d) *estrictamente bi-libres, autoadjuntas, bipartitas tal que* (a, b) *tiene por distribución en el sentido analítico a* μ_1 *y* (c, d) *a* μ_2*.*

Demostración. Sean $\mathcal{H}_1 = L^2(\mathbb{R}^2, d\mu_1)$ y $\mathcal{H}_2 = L^2(\mathbb{R}^2, d\mu_2)$ espacios de Hilbert, y $\xi_1 \in \mathcal{H}_1$, $\xi_1(x, y) = 1$ y $\xi_2 \in \mathcal{H}_2$, $\xi_2(x, y) = 1$ también $\varphi_{\xi_i}(\cdot) = \langle \cdot \xi_i, \xi_i\rangle$, $k = 1, 2$. Ahora sea $(\mathcal{H}, \xi) = (\mathcal{H}_1, \xi_1) * (\mathcal{H}_2, \xi_2)$. Como vimos en el ejemplo 1 al inicio de esta sección, los pares $(B(\mathcal{H}_1), B(\mathcal{H}_1))$ y $(B(\mathcal{H}_2), B(\mathcal{H}_2))$ son bi-libres en $(B(\mathcal{H}), \varphi_\xi)$. En particular para todo $S_1, T_1 \in B(\mathcal{H}_1)$ y $S_2, T_2 \in B(\mathcal{H}_2)$ los pares $(\lambda_1(S_1), \rho_1(T_1))$ y $(\lambda_2(S_2), \rho_2(T_2))$ son bi-libres en $(B(\mathcal{H}), \varphi_\xi)$.

Para construir el par deseado, definamos las funciones $S_i, T_i \in B(\mathcal{H}_i)$, para $i = 1, 2$ como

$$S_i(f)(x, y) = xf(x, y) \quad \text{y} \quad T_i(f)(x, y) = yf(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \; f \in \mathcal{H}_i.$$

Es fácil ver que la distribución de (S_i, T_i) respecto a φ_{ξ_i} es μ_i, ya que las funciones son autoadjuntas, el par claramente es bi-partito y además

$$\varphi_{\xi_i}(S_i^p T_i^q) = \int_{\mathbb{R}^2} (x\xi_i(x,y))^p (y\xi_i(x,y))^q d\mu_i(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} x^p y^q d\mu_i(x,y).$$

Aún nos falta la Bi-libertad pero eso se soluciona demostrando que $(\lambda_i(S_i), \rho_i(T_i))$ también tiene distribución μ_i pero con respecto a φ_ξ, esto porque ese par también es bi-partito, autoadjunto y además, usando las definiciones de λ_i, ρ_i y el hecho que los homomorfismos que definimos $V_i : \mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}(l,i) \to \mathcal{H}$ y $W_i : \mathcal{H}(r,i) \otimes \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}$ cumplen $V_i(\xi_i \otimes \xi) = \xi = W_i(\xi \otimes \xi_i)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi_\xi(\lambda_i(S_i)^p \rho_i(T_i)^q) &= \langle \lambda_i(S_i)^p \rho_i(T_i)^q \xi, \xi \rangle \\
&= \langle W_i(I \otimes T_i^q)(\xi \otimes \xi_i), V_i(S_i^{-p} \otimes I)(\xi_i \otimes \xi) \rangle \\
&= \langle W_i(\xi \otimes T_i^q \xi_i), V_i(S_i^{-p} \xi_i \otimes \xi) \rangle \\
&= \langle W_i(\xi \otimes T_i^q \xi_i), W_i(\xi \otimes S_i^{-p} \xi_i) \rangle \\
&= \langle \xi \otimes T_i^q \xi_i, \xi \otimes S_i^{-p} \xi_i \rangle \\
&= \langle \xi, \xi \rangle \langle S_i^p T_i^q \xi_i, \xi_i \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} x^p y^q d\mu_i(x,y)
\end{aligned}$$

Entonces tomando $a = \lambda_1(S_1), b = \rho_1(T_1), c = \lambda_2(S_2), d = \rho_2(T_2)$ se tiene el resultado.

∎

2.4.2 Convoluciones bi-libres

Si $z = ((b_i)_{i\in I}, (c_j)_{j\in J})$ y $z' = ((b'_i)_{i\in I}, (c'_j)_{j\in J})$ es un sistema bi-libre de dos caras de variables aleatorias no-conmutativas y si $s_1 = ((b_i + b'_i)_{i\in I}, (c_j + c'_j)_{j\in J})$, $s_2 = ((b_i b'_i)_{i\in I}, (c_j c'_j)_{j\in J})$ y $s_3 = ((b_i + b'_i)_{i\in I}, (c_j c'_j)_{j\in J})$ entonces las distribuciones $\mu_{s_1}, \mu_{s_2}, \mu_{s_3}$ dependen solamente de las distribuciones $\mu_z, \mu_{z'}$.

Esto nos proporciona la definición de las siguientes operaciones entre distribuciones

$$\mu_z \boxplus\boxplus\, \mu_{z'} = \mu_{s_1},$$

$$\mu_z \boxtimes\boxtimes\, \mu_{z'} = \mu_{s_2},$$

$$\mu_z \boxplus\boxtimes\, \mu_{z'} = \mu_{s_3}.$$

Las cuales reciben el nombre de convolución aditiva bi-libre, convolución multiplicativa bi-libre y convolución aditiva-multiplicativa bi-libre.

Observación 2.4.4 *La razón por la que no se menciona una convolución multiplicativa-aditiva es por la simetría de la independencia bi-libre.*

Sea X un espacio Hausdorff, decimos que una función $f : X \to \mathbb{C}$ *se anula en el infinito* si para todo $\epsilon > 0$, el conjunto $K = \{x \in X : |f(x)| \geq \epsilon\}$ es compacto. Al conjunto de todas las funciones

$f : X \to \mathbb{C}$ que se anulan en el infinito de un espacio X lo denotamos por $C_0(X)$. Vamos a enunciar el teorema de Representación de Riesz, que nos ayudará en las siguientes observaciones.

Lema 2.4.5 *(teorema de Representación de Riesz) Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto y segundo numerable. Entonces cada funcional lineal acotado, Φ en $C_0(X)$ se representa por una única medida con signo de Borel compleja μ. i.e*

$$\Phi(f) = \int_X f d\mu \qquad \forall f \in C_0(X).$$

Mas aún, $\|\Phi\| = |\mu|(X)$.

Sean μ, ν dos medidas con soporte compacto en $(0,\infty) \times (0,\infty)$, siguiendo el mismo procedimiento que en el teorema 2.4.3 se puede ver que existe un C^*-espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \varphi)$ y dos variables de dos caras (a_1, b_1) y (a_2, b_2) estrictamente bi-libres (osease $[a_k, b_j] = 0$ para $k \neq j$), autoadjuntas, bipartitas y supongamos que también positivas e invertibles tal que (a_1, b_1) tiene por distribución en el sentido analítico a μ y (a_2, b_2) a ν.

Por todas las propiedades anteriores podemos ver que la distribución de (a_1a_2, b_1b_2) se reduce a calcular los momentos $\varphi((a_1a_2)^p(b_1b_2)^q)$, $p, q \geq 0$ los cuales se pueden escribir también como $\varphi(a_1^{1/2}b_1^{1/2}(a_1^{1/2}a_2a_1^{1/2})^p(b_1^{1/2}b_2b_1^{1/2})^q b_1^{-1/2}a_1^{-1/2})$, y los operadores $(a_1^{1/2}a_2a_1^{1/2})$ y $(b_1^{1/2}b_2b_1^{1/2})$ son invertibles positivos, y por tanto el funcional ψ en $\mathcal{A}$ definido por $\psi(a) = \varphi(a_1^{1/2}b_1^{1/2}ab_1^{-1/2}a_1^{-1/2})$ es acotado y $\psi(1) = 1$, esto se traslada por el teorema de Riesz a una medida con signo $\mu \boxtimes\boxtimes \nu$, la cual es la distribución de (a_1a_2, b_1b_2).

Similarmente para μ, ν medidas con soporte compacto en $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ pero usando $\varphi((a_1a_2)^p(b_1+b_2)^q) = \varphi(a_1^{1/2}(a_1^{1/2}a_2a_1^{1/2})^p(b_1+b_2)^q a_1^{-1/2})$ se encuentra una medida $\mu \boxtimes\boxplus \nu$, la cual es la distribución de $(a_1a_2, b_1 + b_2)$.

Totalmente análogo para $\mu \boxplus\boxplus \nu$ para medidas μ, ν con soporte compacto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Observación 2.4.6 *Para evitar problemas con medidas con signo, y para decir más en la parte analítica en el artículo de Huang y Wang [31] trabajan con medidas con soporte en $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$, donde*

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \ : |z| = 1\}.$$

Para medidas en el círculo se puede decir sin ningún problema que, si μ_1 distribución de (u_1, v_1), μ_2 distribución de (u_2, v_2) y ambas medidas de probabilidad están definidas en $\mathbb{T}^2$, entonces,

$$\mu_1 \boxtimes\boxtimes \mu_2 = \mu_{(u_1u_2, v_1v_2)},$$

es una medida de probabilidad en $\mathbb{T}^2$.

En el mismo artículo trabajan con otra convolución llamada convolución opuesta bi-libre, la cual es la medida

$$\mu_1 \boxtimes\boxtimes^{op} \mu_2 = \mu_{(u_1u_2, v_2v_1)},$$

que a pesar de parecerse mucho a la convolución multiplicativa-multiplicativa, no son iguales. también definen una "transformada S opuesta" que se comporta bien con esa convolución. Los aspectos combinatorios de la transformada S opuesta se estudian en el artículo de Skoufranis [44].

2.5 Cumulantes

2.5.1 teorema de existencia y unicidad

Nuestro objetivo en esta sección es presentar el teorema de existencia y unicidad de los cumulantes, el cual mencionamos a continuación. En lo siguiente se consideran los conjuntos de índices I, J de las familias de dos caras $((z_i)_{i\in I}, (z_j)_{j\in J})$ como disjuntos y denotaremos la unión disjunta de estos conjuntos por $I \coprod J$ y también denotaremos por $\mathbb{C}\langle X_k : k \in K\rangle$ al conjunto de los polinomios en las variables no conmutativas X_k con coeficientes complejos.

Teorema 2.5.1 *Para cada función $\alpha : \{1, ..., n\} \to I \amalg J$ y $K \subset \{1, ..., n\}$, sea $\alpha K = \alpha \circ b_K$, donde $b_K : \{1, ..., |K|\} \to K$ es la biyección creciente (ordenar de menor a mayor los elementos de K). Entonces existe un polinomio universal*

$$R_\alpha(X_{\alpha K} | \emptyset \neq K \subset \{1, ..., n\}) = X_{\alpha\{1,...,n\}} + \widehat{R}_\alpha(X_{\alpha K} | \emptyset \neq K \subsetneq \{1, ..., n\}),$$

el cual es homogéneo de grado n y $\widehat{R}_\alpha$ sigue la recursión, donde $X_{\alpha K}$ es dado de grado $|K|$ y tal polinomio tiene la propiedad cumulante: si $z = ((z_i)_{i\in I}, (z_j)_{j\in J}), z' = ((z'_i)_{i\in I}, (z'_j)_{j\in J})$ es un par bi-libre de familias de dos caras en un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \varphi)$ y $z + z' = ((z_i + z'_i)_{i\in I}, (z_j + z'_j)_{j\in J})$ y si $K = \{k_1 < ... < k_r\} \subset \{1, ..., n\}$ y $M_{\alpha K} = \varphi(z_{\alpha(k_1)} \cdots z_{\alpha(k_r)})$, $M'_{\alpha K} = \varphi(z'_{\alpha(k_1)} \cdots z'_{\alpha(k_r)})$, $M''_{\alpha K} = \varphi((z_{\alpha(k_1)} + z'_{\alpha(k_1)}) \cdots (z_{\alpha(k_r)} + z'_{\alpha(k_r)}))$, tenemos

$$R_\alpha(M_{\alpha K} | \emptyset \neq K \subset \{1, ..., n\}) + R_\alpha(M'_{\alpha K} | \emptyset \neq K \subset \{1, ..., n\}) = R_\alpha(M''_{\alpha K} | \emptyset \neq K \subset \{1, ..., n\}),$$

el polinomio R_α que satisface la propiedad de homogeneidad y la propiedad cumulante aditiva es único.

Definición 2.5.2 *Los polinomios R_α serán llamados cumulantes bi-libres. En el caso que tenemos una familia de dos caras $z = ((z_i)_{i\in I}, (z_j)_{j\in J})$ en $(\mathcal{A}, \varphi)$ los cumulantes bi-libres de z son los números $R_\alpha(\varphi(z_{\alpha(k_1)} \cdots z_{\alpha(k_r)}) | \{k_1 < ... < k_r\} \subset \{1, ..., n\})$. Usaremos varias notaciones, si α, z son dados y $\alpha(k) = a_k$ y μ_z la distribución de z, escribiremos para los mismos cumulantes bi-libres $R_{a_1,...,a_n}(\mu_z)$, $R_{a_1,...,a_n}(z)$, $R_\alpha(\mu_z)$, $R_\alpha(\mu_z)$, $R_\alpha(z)$ o simplemente R_α o $R_{a_1,...,a_n}$ cuando sea claro la familia de la que se habla.*

Vamos a poner los cumulantes en términos más simples.

Para cada $\alpha : \{1, 2, ..., n\} \to I \coprod J$ existe un polinomio universal R_α en las incógnitas X_K etiquetadas por los conjuntos no vacíos $K \subset \{1, 2, ..., n\}$ y satisfacen

i) $R_\alpha = X_{\{1,2,...,n\}} + \tilde{R_\alpha}$, donde $\tilde{R_\alpha}$ es un polinomio universal en las incógnitas X_K etiquetadas por los conjuntos propios no vacíos $K \subsetneq \{1, 2, ..., n\}$,

ii) R_α y $\tilde{R_\alpha}$ son homogéneos de grado n cuando X_K es dado de grado $|K|$,

iii) (Propiedad aditiva) Si $R_\alpha(z)$ es R_α evaluada en $X_K = \varphi(z_{\alpha(k_1)} \cdots z_{\alpha(k_r)})$ y $K = \{k_1 < k_2 < \cdots < k_r\}$, entonces

$$R_\alpha(z' + z'') = R_\alpha(z') + R_\alpha(z''),$$

siempre que z' y z'' sean un par de variables de dos caras bi-libre.

$R_\alpha(z)$ es el α-cumulante de z.

2.5.2 Reducción al caso libre

Si $\alpha : \{1, ..., n\} \to I \coprod J$ es tal que $\alpha(\{1, ..., n\}) \subset I$ o $\alpha(\{1, ..., n\}) \subset J$ entonces los cumulantes bi-libres $R_\alpha(z)$ se reduce a los cumulantes libres de $(z_i)_{i\in I}$ o respectivamente $(z_j)_{j\in J}$. En este caso las condiciones de unicidad en independencia bi-libre e independencia libre son las mismas. Este hecho se ilustra en el siguiente ejemplo cuya demostración es parte del capítulo combinatorio de independencia bi-libre.

Ejemplo 2.5.3 *Consideremos los elementos del espacio de Fock, definidos en el capítulo 1.Para* $n, m \in \mathcal{N}$ *y sea* $\alpha : \{1, 2, ..., m+n\} \to \{L, R\}$ *tal que* $|l^{-1}(\{L\})| = m$ *y* $|r^{-1}(\{R\})| = n$ *(sólo necesitamos l y r pues consideraremos los cumulantes de una sola variable de dos caras). Sea* $a = l(f) + l(f)^* + \Lambda_l(T_1) + \lambda_1 \cdot \mathbf{1}$ *y* $b = r(f) + r(f)^* + \Lambda_r(T_2) + \lambda_2 \cdot \mathbf{1}$ *y* $h(k) = k-1$ *si* $k \geq 1$ *y* $h(0) = 0$. *Entonces*

$$R_\alpha(a, b) = \langle T_1^{h(m)} f, T_2^{h(n)} g\rangle,$$

Aquí se puede ver claramente que si $n = 0$ *o* $m = 0$ *tenemos lo que ya teníamos en el caso libre (esto se demostrará en el capítulo combinatorio).*

Sea $z = ((z_i)_{i\in I}, (z_j)_{j\in J})$ una familia de variables de dos caras en un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \varphi)$. Veamos como son los cumulantes de grado ≤ 2, es decir, para α con dominio $\{1, 2\}$ y/o $\{1\}$ y denotamos $a = \alpha(1)$ y $b = \alpha(2)$. Afirmamos que los cumulantes en estos casos son

$$R_{\alpha(1)}(z) = \varphi(z_a),$$
$$R_{\alpha(1),\alpha(2)}(z) = \varphi(z_a z_b) - \varphi(z_a)\varphi(z_b),$$

ya que si definimos $F_a(z) = \varphi(z_a)$, $F_{a,b}(z) = \varphi(z_a z_b) - \varphi(z_a)\varphi(z_b)$ estos claramente son homogéneos y cumplen la primera propiedad de los cumulantes, para ver que cumplen la propiedad cumulante, veamos que para grado 1, $\varphi((z' + z'')_a) = \varphi(z'_a) + \varphi(z''_a)$ por la linealidad y para grado 2: Si ambos a, b están en I o ambos están en J entonces los cumulantes bi-libres se reducen a los cumulantes libres que coinciden con F_a y $F_{a,b}$, para el caso mixto consideremos sin pérdida de generalidad que $a \in I$ y $b \in J$ y como $\varphi((z'_a + c_a\mathbf{1})(z_b + c_b\mathbf{1})) - \varphi(z'_a + c_a\mathbf{1})\varphi(z_b + c_b\mathbf{1}) = \varphi(z_a z_b) - \varphi(z_a)\varphi(z_b)$ basta considerar el caso $\varphi(z'_a) = \varphi(z'_b) = \varphi(z''_a) = \varphi(z''_b) = 0$. Para este caso Voiculescu demuestra que $\varphi(z'_a z''_b) = \varphi(z''_a z'_b) = 0$, y como $0 = \varphi(z'_a z''_b) + \varphi(z''_a z'_b) = \varphi((z'_a + z''_a)(z'_b + z''_b)) - \varphi(z'_a z'_b) - \varphi(z''_a z''_b)$ se tiene la propiedad cumulante, finalmente por la unicidad de los cumulantes $F_a = R_{\alpha(1)}$ y $F_{a,b} = R_{\alpha(1),\alpha(2)}$.

2.6 Distribuciones de límite central

Definición 2.6.1 Una familia de variables de dos caras $z = ((z_i)_{i\in I}, (z_j)_{j\in J})$ en un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \varphi)$ tiene una *distribución de límite central bi-libre (o distribución gaussiana centrada bi-libre)* si sus cumulantes satisfacen $R_{a_1,\ldots,a_k}(z) = 0$ si $k = 1$ o $k \geq 3$.

Teorema 2.6.2 *Existe exactamente una distribución de límite central bi-libre*

$$\gamma_C : \mathbb{C}\langle\ Z_k \mid k \in I \coprod J\ \rangle \to \mathbb{C},$$

para cada matriz $C = (C_{kl})_{k,l \in I \coprod J}$ *con entradas complejas tal que,*

$$\gamma_C(Z_k Z_l) = C_{kl} \qquad k, l \in I \coprod J.$$

Si $h, h^* : I \coprod J \to \mathcal{H}$ *son aplicaciones y* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert, consideremos los elementos del espacio de Fock libre de ese espacio de Hilbert. Definimos*

$$\begin{aligned} z_i &= l(h(i)) + l^*(h^*(i)), \qquad & i \in I, \\ z_j &= r(h(j)) + r^*(h^*(j)), \qquad & j \in J, \end{aligned}$$

entonces $z = ((z_i)_{i \in I}, (z_j)_{j \in J})$ *tiene una distribución de límite central bi-libre* γ_C*, donde* $C_{kl} = \langle h(l), h^*(k) \rangle$*. Toda distribución de límite central bi-libre en los casos* I, J *finitos, se pueden obtener de esta manera.*

Demostración. Como una distribución está caracterizada por sus cumulantes y una distribución de límite central tiene sólo cumulantes de orden 2 distintos de cero (posiblemente), entonces está determinada por sus cumulantes de segundo orden y por la afirmación previa a este teorema sólo basta fijarse en los momentos de segundo orden, y cada familia de cumulantes son los cumulantes de una distribucióin bi-libre.

Para ver la segunda afirmación observemos que $z_l \mathbf{1} = h(l)$ y $z_k^* \mathbf{1} = h^*(k)$ tal que

$$\langle z_k z_l \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle = \langle z_l \mathbf{1}, z_k^* \mathbf{1} \rangle = \langle h(l), h^*(l) \rangle,$$

también $\langle z_k \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle = 0$. Por lo que es suficiente demostrar que $R_{a_1,..,a_k}(z) = 0$ para $k \geq 3$, para asegurar que z tiene distribución γ_C. Para ver esto último, en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ sea $h'(k) = h(k) \oplus 0$, $h''(k) = 0 \oplus h(k)$ $h^{*'}(k) = h^*(k) \oplus 0$, $h^{*''}(k) = 0 \oplus h^*(k)$ y definamos z', z'' usando estos $h', h^{*'}$ en vez de h, h^* entonces z', z'' son bi-libres y $2^{-1/2}(z' + z'')$ tiene la misma distribución que z pues la aplicación $h \mapsto 2^{-1/2}(h \oplus h)$ es isométrico. Por lo tanto $R_{a_1,\ldots,a_k}(z) = R_{a_1,\ldots,a_k}(2^{-1/2}(z' + z'')) = 2^{-k/2} R_{a_1,\ldots,a_k}(z') + 2^{-k/2} R_{a_1,\ldots,a_k}(z'') = 2^{1-k/2} R_{a_1,\ldots,a_k}(z)$ y como $2^{1-k/2} \neq 1$ si $k \neq 2$ entonces $R_{a_1,\ldots,a_k}(z) = 0$ siempre que $k \neq 2$. ■

Definición 2.6.3 Una $*$-distribución

$$\psi : \mathbb{C}\langle\ Z_k, Z_k^* \mid k \in I \coprod J\ \rangle \to \mathbb{C},$$

es una *$*$-distribución de límite central bi-libre*, si es una distribución de límite central bi-libre para $((Z_i, Z_i^*)_{i \in I}, (Z_j, Z_j^*)_{j \in J})$ y satisface la condición de positividad $\psi(P^* P) \geq 0$ para $P \in \mathbb{C}\langle\ Z_k, Z_k^* \mid k \in I \coprod J\ \rangle$.

El siguiente teorema nos brinda una condición necesaria y suficiente para que una distribución de límite central bi-libre sea una $*$-distribución de límite central.

Teorema 2.6.4 *Una distribución de límite central bi-libre,*

$$\psi : \mathbb{C}\langle\ Z_k, Z_k^* \mid k \in I \coprod J\ \rangle \to \mathbb{C},$$

es una $*$-distribución de límite central bi-libre si y sólo si la matriz de momentos de segundo orden

$$C = \begin{pmatrix} (\psi(Z_k^* Z_l))_{k,l\in K} & (\psi(Z_k Z_l))_{k,l\in K} \\ (\psi(Z_k^* Z_l^*))_{k,l\in K} & (\psi(Z_k Z_l^*))_{k,l\in K} \end{pmatrix},$$

es positiva, donde $K = I \coprod J$.
Si $K = I \coprod J$ es finito y $h(k), h^*(l) \in \mathcal{H}$ son vectores en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que

$$C = \begin{pmatrix} (\langle h(l), h(k)\rangle)_{k,l\in K} & (\langle h(l), h^*(k)\rangle)_{k,l\in K} \\ (\langle h^*(l), h(k)\rangle)_{k,l\in K} & (\langle h^*(l), h^*(k)\rangle)_{k,l\in K} \end{pmatrix},$$

entonces la $*$-distribución con respecto al vector vacío $\mathbf{1} \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ de la familia de dos caras $z = ((z_i)_{i\in I}, (z_j)_{j\in J})$ donde

$$\begin{aligned} z_i &= l(h(i)) + l^*(h^*(i)), \qquad i \in I, \\ z_j &= r(h(j)) + r^*(h^*(j)), \qquad j \in J, \end{aligned}$$

es precisamente la $*$-distribución de límite central bi-libre con matriz de momentos de segundo orden C.

Demostración. Es suficiente hacer la prueba bajo el supuesto de que $K = I \coprod J$ es finito. La equivalencia entre la positividad de C y la de ψ es evidente. Para la segunda afirmación basta aplicar la segunda parte del teorema 2.6.2 a la familia $(z, z^*) = ((z_i, z_i^*)_{i\in I}, (z_j, z_j^*)_{j\in J})$. ■

Ahora presentamos la última definición de esta sección.

Definición 2.6.5 Una distribución

$$\psi : \mathbb{C}\langle\, X_k \mid k \in I \coprod J \,\rangle \to \mathbb{C},$$

es una *distribución de límite central bi-libre hermitiana* si es $*$-distribución de límite central y $\psi \geq 0$ y $\mathbb{C}\langle\, X_k \mid k \in I \coprod J \,\rangle$ es dotado de la estructura de $*$-álgebra en la cual $X_k = X_k^*$ para todo $k \in I \coprod J$.

Ahora se presenta una condición necesaria y suficiente para que una distribución de límite central bi-libre sea una distribución de límite central hermitiana bi-libre.

Teorema 2.6.6 *Una distribución de límite central bi-libre*

$$\psi : \mathbb{C}\langle\, X_k \mid k \in I \coprod J \,\rangle \to \mathbb{C},$$

es hermitiana si y sólo si la matriz de momentos de segundo orden $C = (\psi(X_k X_l))_{k,l\in I \coprod J}$ es positiva.

Si $K = I \coprod J$ es finito y $h(k) \in \mathcal{H}$ vectores en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que

$$C = (\langle h(l), h(k)\rangle)_{k,l\in K},$$

entonces la distribución hermitiana con respecto al vector vacío $\mathbf{1} \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ de la familia de dos caras

$z = ((z_i)_{i\in I}, (z_j)_{j\in J})$ *donde*

$$\begin{aligned} z_i &= l(h(i)) + l^*(h(i)), \qquad i \in I,\\ z_j &= r(h(j)) + r^*(h(j)), \qquad j \in J, \end{aligned}$$

tiene precisamente la distribución de límite central bi-libre con matriz de momentos de segundo orden C.

Demostración. De nuevo la equivalencia entre la positividad de C y ψ es inmediata; bajo el supuesto de que $I \coprod J$ es finito, se aplica de nuevo el teorema 2.6.2 a los operadores $h(k) = h^*(k),\ k \in K$. ■

2.7 Teorema de límite central bi-libre

Teorema 2.7.1 *(teorema de límite central bi-libre). Sea $z^{(n)} = ((z_i^{(n)})_{i\in I}, (z_j^{(n)})_{j\in J}),\ n \in \mathbb{N}$ una sucesión de familias de dos caras bi-libres en $(\mathcal{A}, \varphi)$, tal que se cumple lo siguiente:*

i) $\varphi(z_k^{(n)}) = 0, \quad k \in I \coprod J.$

ii) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\varphi(z_{k_1}^{(n)} \cdots z_{k_m}^{(n)})| < \infty$ *para todo* $k_1, ..., k_m \in I \coprod J$.

iii) $\lim\limits_{N\to\infty} N^{-1} \sum\limits_{1\le n\le N} \varphi(z_k^{(n)} z_l^{(n)}) = C_{kl}$ *para todo* $k, l \in I \coprod J$.

Definiendo $S_N = ((S_{N,i})_{i\in I}, (S_{N,j})_{j\in J})$, con $S_{N,k} = N^{-1/2} \sum\limits_{1\le n\le N} z_k^{(n)}$, $k \in I \coprod J$ y γ_C la distribución de límite central bi-libre que nos brinda $C = (C_{k,l})_{k,l\in I\coprod J}$. Entonces

$$\lim_{N\to\infty} \mu_{S_N}(P) = \gamma_C(P)$$

para cada $P \in \mathbb{C}\langle\ Z_k \mid k \in I \coprod J\ \rangle$.

Demostración. Como los momentos son polinomios en los cumulantes, basta probar que

$$\lim_{N\to\infty} R_{k_1\cdots k_m}(\mu_{S_N}) = R_{k_1\cdots k_m}(\gamma_C),$$

que en vista de la definición de γ_C significa

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} R_{kl}(\mu_{S_N}) &= C_{kl}, \qquad \text{y}\\ \lim_{N\to\infty} R_{k_1\cdots k_m}(\mu_{S_N}) &= 0, \qquad m \neq 2, \end{aligned}$$

y como vimos antes, $R_k(\mu_{S_n}) = \varphi(S_N) = 0$, y

$$R_{k_1\cdots k_m}(\mu_{S_N}) = \sum_{1\le n\le N} R_{k_1\cdots k_m}(N^{-1/2}\mu_{z^{(n)}}) = N^{-m/2} \sum_{1\le n\le N} R_{k_1\cdots k_m}(\mu_{z^{(n)}}).$$

Además, como los cumulantes son polinomios en los momentos, se sigue del segundo inciso que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |R_{k_1\cdots k_m}(z^{(n)})| = \mathbf{B}_{k_1\cdots k_m} < \infty$ y por tanto para $m \geq 3$ se tiene que $\lim_{N\to\infty} R_{k_1\cdots k_m}(\mu_{S_N}) = 0$. Para el caso $m = 2$

$$R_{kl}(\mu_{S_N}) = N^{-1} \sum_{1\leq n\leq N} R_{kl}(\mu_{z^{(n)}}) = N^{-1} \sum_{1\leq n\leq N} \varphi(z_k^{(n)} z_l^{(n)}),$$

por el inciso 3 tenemos que $\lim_{N\to\infty} R_{kl}(\mu_{S_N}) = C_{kl}$. ∎

En este capítulo observamos la importancia de los momentos de segundo orden $\varphi(Z_l Z_r)$, con ellos podemos decir si tenemos una distribución gaussiana o de límite central. El saber cuándo una sucesión de complejos $(a_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de momentos de una distribución en el plano es un problema importante y nada trivial; avances en ese trabajo pueden encontrarse en [10, 37, 38]. En ellos se establecen condiciones para la existencia y unicidad de una distribución con momentos $a_{n,m}$; de particular importancia es resolver este problema para el caso en que I, J son numerables y $a_{n,m} = \varphi(Z_n Z_m)$, considerando la familia autoadjunta y $n \in I,\ m \in J$. Volveremos a esto más adelante.

Capítulo 3

Aspectos analíticos de la probabilidad bi-libre

Este capítulo está dedicado a analizar los aspectos analíticos que surgen en probabilidad bi-libre. Comenzamos definiendo la transformada de Cauchy en dos variables y haciendo un análisis extenso de la transformada R bi-libre de una variable de dos caras. Seguido de ese análisis se presentan ejemplos de sistemas de variables de dos caras que cumplen una relación de conmutación menos estricta que el ser bi-partito, tales ejemplos surgen de la teoría de operadores seminormales y de sistemas en entropía libre. Termina la sección analizando las propiedades analíticas de dos nuevas transformadas bi-libres correspondientes a las convoluciones multiplicativa y multiplicativa-aditiva bi-libre.

3.1 La transformada de Cauchy bivariada

Definición 3.1.1 Si μ es una medida en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ que satisface

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+t^2}}\ \mu(ds, dt) < \infty, \tag{3.1}$$

definimos la *transformada de Cauchy bivariada de* μ como

$$G_\mu(z, w) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(z-s)(w-t)}\ d\mu(s, t), \tag{3.2}$$

para $(z, w) \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^2 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z, w \notin \mathbb{R}\}$.

La función G_μ es holomorfa y análogo al caso univariado satisface

$$\overline{G_\mu(z, w)} = G_\mu(\bar{z}, \bar{w}) \quad (z, w) \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^2.$$

Si además se le pide a μ que sea finita en todos los conjuntos compactos de $\mathbb{R}^2$ (esto implica regular y σ-finita) entonces G_μ determina de manera única a μ. La razón de esto es porque los núcleos

$$\frac{1}{\pi^2}\frac{y^2}{(y^2+x^2)(y^2+u^2)}, \quad y>0,$$

son aproximadamente la identidad en el espacio $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2, dxdu)$ donde $dxdu$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$ (basta con desarrollar la integral), y por tanto tenemos la fórmula de inversión

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi \; d\mu = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,u) f(x,u,y) \; dxdu,$$

con φ función continua con soporte compacto en $\mathbb{R}^2$ y

$$f(x,u,y) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{y}{(x-s)^2+y^2}\frac{y}{(u-t)^2+y^2} \; d\mu(s,t).$$

Por tanto para nuestro caso basta tomar

$$f(x,u,y) = Im\left[\frac{G_\mu(x+iy,u+iy)-G_\mu(x+iy,u-iy)}{2i}\right],$$

podemos invertir, obteniendo así la medida. Todo lo anterior es válido también para una medida de Borel con signo, con variación total finita, bajo los mismos supuestos de regularidad. Definamos de manera breve algunos conceptos que nos servirán en adelante.

Definición 3.1.2 i) Sean $\pi_1(s,t) = s$ y $\pi_2(s,t) = t$ las proyecciones. A $\mu^{(j)} = \mu \circ \pi_j^{-1}$ $j = 1,2$ se le llaman las *marginales* de μ.

ii) Para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, sea $\alpha_z = \sqrt{1+\left[\frac{Re(z)}{Im(z)}\right]^2}$. Decimos que $z \to \infty$ *no-tangencialmente* (y lo denotamos por $z \to_\triangleleft \infty$) si $z \notin \mathbb{R}$, pero $|z| \to \infty$ con α_z permaneciendo siempre acotada. (Esto es equivalente a que z se mueva en un cono al infinito, ver [49]).

iii) Una familia $\mathcal{F}$ de medidas de Borel con signo finitas en $\mathbb{R}^2$ se dice *tensa* si

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{\mu\in\mathcal{F}} |\mu|(\mathbb{R}^2 \setminus K_m) = 0,$$

donde $k_m = \{(s,t) : |s| \leq m, |t| \leq m\}$. (La idea intuitiva es que la colección dada de medidas *no escapa al infinito*).

iv) Sea $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ y Ω una vecindad de z, f, g funciones holomorfas en Ω. Definamos la siguiente relación de equivalencia: $f \sim_z g$ si existe una vecindad abierta $U \subset \Omega$ de z tal que $f|_U = g|_U$ (lo anterior denota las restricciones de f, g a U). A las clases de equivalencia de esta relación las llamamos *gérmenes* y si f, g son representantes de la misma clase de equivalencia escribimos $f \overset{\text{germ}}{=} g$.

Lo anterior nos sirve para demostrar la siguiente proposición.

Proposición 3.1.3 *Sea $\mathcal{F}$ una familia tensa de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}^2$, entonces para todo $(z, w) \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^2$*

$$\lim_{\lambda \to_{\triangleleft} \infty} \lambda G_\mu(z, \lambda) = G_{\mu^{(1)}}(z),$$
$$\lim_{\lambda \to_{\triangleleft} \infty} \lambda G_\mu(\lambda, w) = G_{\mu^{(2)}}(w),$$

donde $G_{\mu^{(j)}}(y)$ es la transformada de Cauchy univariada, y $\mu^{(1)}(A) = \mu(A \times \mathbb{R}), \mu^{(2)}(A) = \mu(\mathbb{R} \times A)$,

$$G_{\mu^{(j)}}(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{y - x} \, d\mu^{(j)}(x),$$

y los límites se tienen uniformemente para μ en $\mathcal{F}$. Mas aún, los límites también son uniformes para (z, w) en la unión $\{(z, w) : |Im(z)| \geq \epsilon > 0, |Im(w)| \geq \delta > 0\}$.

Demostración. Veamos el primer caso, el segundo será análogo. Sea $\mu \in \mathcal{F},\ z, \lambda \in \mathbb{R},\ m > 0$

$$\begin{aligned}
|\lambda G_\mu(z, \lambda) - G_{\mu^{(1)}}(z)| &= |\lambda \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(z - s)(w - t)} \, d\mu(s, t) - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z - s} \, d\mu^{(1)}(s)| \\
&= |\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{z - s} \left[\frac{\lambda}{\lambda - t} - 1 \right] \, d\mu(s, t)| \\
\leq \frac{1}{|Im(z)|} \int_{\{(s,t):|t| \leq m\}} |\frac{t}{\lambda - t}| d\mu(s, t) &+ \frac{1}{|Im(z)|} \int_{\{(s,t):|t| > m\}} |\frac{\lambda}{\lambda - t} - 1| d\mu(s, t) \\
&\leq \frac{m}{|Im(z)||Im(\lambda)|} + \frac{\alpha_\lambda + 1}{|Im(z)|} \, \mu(\mathbb{R}^2 \setminus K_m).
\end{aligned}$$

De estas desigualdades se tiene el resultado, pues $\lambda \to_{\triangleleft} \infty$, por lo que el primer sumando se va a cero y α_λ del segundo permanece constante y como m es arbitrario se tiene esta desigualdad para $m \to \infty$ el cual se va a cero porque la familia de medidas es tensa. ∎

De lo que sabemos de transformadas de Cauchy en una variable podemos decir que

$$\lim_{z \to_{\triangleleft} \infty} z G_{\mu^{(1)}}(z) = 1,$$

uniformemente para $\mu^{(1)}$ en cualquier familia tensa de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}$, por lo tanto

$$G_\mu(z, w) = \frac{1}{zw}(1 + o(1)) \quad z, w \to_{\triangleleft} \infty, \quad (z, w) \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^2, \tag{3.3}$$

para toda μ en cualquier familia tensa de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}^2$. También sabemos que el conjunto de todas las medidas con signo de Borel finitas en $\mathbb{R}^2$ considerando la topología de la convergencia débil está fuertemente relacionado con las funciones continuas de $\mathbb{R}^2$ bajo la norma del supremo. En esa topología, una familia de medidas con signo es relativamente compacta si y sólo si es tensa y uniformemente acotada en las normas de la variación total.

Por lo anterior y el teorema de Prokhorov podemos decir que una sucesión de medidas de probabilidad tensas contiene una subsucesión que converge débilmente a una medida de probabilidad. Escribimos $\mu_n \Rightarrow \mu$, para la convergencia débil. Los siguientes resultados serán útiles en la sección correspondiente a la transformada R.

Proposición 3.1.4 *Sea $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}^2$. Entonces μ_n converge débilmente a una medida de probabilidad en $\mathbb{R}^2$ si y sólo si se cumplen las siguientes afirmaciones.*

i) Existen dos subconjuntos abiertos $U \subset \mathbb{C}^+ \times \mathbb{C}^+$, $V \subset \mathbb{C}^+ \times \mathbb{C}^-$ tal que el límite puntual

$$\lim_{n\to\infty} G_{\mu_n}(z,w) = G(z,w),$$

existe para todo $(z,w) \in U \cup V$.

ii) $zwG_{\mu_n}(z,w) \to 1$ uniformemente en n cuando $z, w \to_{\triangleleft} \infty$.

Mas aún si $\mu_n \Rightarrow \mu$ entonces $G = G_\mu$.

Proposición 3.1.5 *Sean $\mu, \mu_1, \mu_2, ...$ medidas de probabilidad en $\mathbb{R}^2$. Entonces $\mu_n \Rightarrow \mu$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} G_{\mu_n}(z,w) = G_\mu(z,w)$.*

Demostración. La condición necesaria se tiene de la proposición anterior. Para demostrar la suficiencia notemos que, los conjuntos acotados en la norma de la variación total son también débil-$*$ precompactos, la sucesión $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un límite puntual débil-$*$, digamos, σ. Observe que para para todo $(z,w) \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$, el correspondiente núcleo de Cauchy

$$\frac{1}{(z-s)(w-t)} \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2,$$

es una función continua que se anula en el infinito, entonces siendo σ un límite puntual débil-$*$ de $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se debe tener $G_\sigma = G_\mu$ en $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^2$, es decir, que todo límite débil-$*$, σ, es de hecho igual a μ con lo que se tiene el resultado. ∎

3.2 La transformada R

Definición 3.2.1 Para una variable de dos caras (a,b) en un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \varphi)$ definimos la colección de *momentos de dos bandas* como el conjunto de todos los complejos $\varphi(L(a)R(b))$ donde L es un monomio en la variable a, y R es un monomio en la variable b.

En el capítulo anterior definimos para una familia $((z_i)_{i\in I}, (z_j)_{j\in J})$ con $I \cap J = \emptyset$ y una aplicación $\alpha : \{1, ..., n\} \to I \amalg J$, los cumulantes bi-libres en su versión más general. En este capítulo nos centraremos en el caso más simple de los cumulantes bi-libres. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y de nuevo consideremos $\alpha : \{1, ..., m+n\} \to I \amalg J$ pero suponiendo que existen $\beta : \{1, ..., m\} \to I$ y $\gamma : \{1, ..., n\} \to J$, tal que $\alpha(k) = \beta(k)$ para $1 \leq k \leq m$ y $\alpha(m+l) = \gamma(l)$ para $1 \leq l \leq n$ en ese caso R_α lo denotamos por $R_{\beta\gamma}$. El caso que estudiaremos a detalle es $R_{\beta\gamma}$ pero con el supuesto $|I| = |J| = 1$, una variable izquierda y una derecha, digamos (a,b); aquí $R_{m,n}(a,b)$ corresponde a los cumulantes bi-libres con las variables $X_{r,s} = \varphi(a^r b^s)$ con $0 \leq r \leq m$, $0 \leq s \leq n$, $r, s \in \mathbb{Z}^+$. Observemos que sólo tomamos los momentos de dos bandas.

Definición 3.2.2 Sea (a,b) una variable de dos caras en un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A},\varphi)$. Definimos la *transformada R (o $\mathcal{R}$-transformada) de* (a,b) como la serie formal en dos variables

$$\mathcal{R}_{(a,b)}(z,w)=\sum_{\substack{m\geq 0\\ n\geq 0\\ m+n\geq 1}} R_{m,n}(a,b)z^m w^n,$$

donde $R_{m,n}(a,b)$ son los cumulantes simples que discutimos en el párrafo anterior.

Para el par (a,b) como antes, sean $R_a(z)$ y $R_b(w)$ las transformadas R de a y b respectivamente. Enunciemos ahora el teorema más importante de esta sección.

Teorema 3.2.3 *[54, Teo. 2.1] Sea (a,b) una variable de dos caras en un W^*-espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A},\varphi)$. Tenemos la siguiente igualdad de gérmenes de funciones holomorfas cerca de $(0,0)\in\mathbb{C}^2$.*

$$\mathcal{R}_{(a,b)}(z,w)\overset{\text{germ}}{=}1+zR_a(z)+wR_b(w)-\frac{zw}{G_{a,b}(R_a(z)+z^{-1},R_a(w)+w^{-1})},\tag{3.4}$$

donde $G_{a,b}$ es la función de Green en dos variables, $G_{a,b}(z,w)=\varphi\left[(z\mathbf{1}-a)^{-1}(w\mathbf{1}-b)^{-1}\right]$.

La prueba de este teorema es larga y complicada y no será incluida en este trabajo, pero puede encontrarse en [54].

Observación 3.2.4 *i) En la demostración del teorema anterior, juega un papel importante la propiedad 1.1 del capítulo 1, $G_a(R_a(z)+z^{-1})=z$, donde G_a es la transformada de Cauchy de la distribución de a.*

ii) El hecho de que los cumulantes $R_{m,n}(a,b)$ tienen coeficientes enteros se puede deducir del teorema y del hecho que la expansión tiene coeficientes enteros.

iii) Un hecho muy importante que se observa de la demostración en [54] es que si (a_1,b_1) y (a_2,b_2) son bi-libres entonces $\mathcal{R}_{(a_1+a_2,b_1+b_2)}=\mathcal{R}_{(a_1,b_1)}+\mathcal{R}_{(a_2,b_2)}$. Resultado análogo al caso libre.

Pongamos lo anterior en términos de medidas, para futuras referencias. Como se pudo notar desde antes la aplicación $G_{a,b}$ no es más que la transformada de Cauchy en dos variables de la distribución de (a,b), en el sentido definido en la primera sección. Así si μ medida de probabilidad en $\mathbb{R}^2$.

$$\mathcal{R}_\mu(z,w)=zR_{\mu^{(1)}}(z)+wR_{\mu^{(2)}}(w)+\left[1-\frac{1}{h_\mu(z,w)}\right],\tag{3.5}$$

donde $h_\mu(z,w)=\dfrac{G_\mu\left[\frac{1}{z}+R_{\mu^{(1)}}(z),\frac{1}{w}+R_{\mu^{(2)}}(w)\right]}{zw}$, con G_μ la transformada de Cauchy en dos variables. Análogo al caso libre, también definamos

$$\Omega_{\alpha,\beta}=(\triangle_{\alpha,\beta}\cup\overline{\triangle_{\alpha,\beta}})\times(\triangle_{\alpha,\beta}\cup\overline{\triangle_{\alpha,\beta}})=(\triangle_{\alpha,\beta}\cup\overline{\triangle_{\alpha,\beta}})^2,$$

donde $\triangle_{\alpha,\beta}$ es un ángulo de Stolz, i.e. $\triangle_{\alpha,\beta} = \{x + iy \in \mathbb{C}^- : |x| < -\alpha y, y > -\beta\}$ y $\overline{\triangle_{\alpha,\beta}} = \{\bar{z} : z \in \triangle_{\alpha,\beta}\}$ para algunos $\alpha, \beta > 0$. Ahora bien, como $z \to 0$ en $\triangle_{\alpha,\beta} \cup \overline{\triangle_{\alpha,\beta}}$ si y sólo si $\frac{1}{z} \to_{\triangleleft} \infty$, se tiene que $(z, w) \to (0, 0)$ dentro de $\Omega_{\alpha,\beta}$ si y sólo si $\frac{1}{z}, \frac{1}{w} \to_{\triangleleft} \infty$. De acuerdo a la relación 3.3 y que $\frac{1}{\lambda} + R_{\mu^{(j)}}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}(1 + o(1)) \to_{\triangleleft} \infty$ cuando $\lambda \to 0$ dentro de algún ángulo de Stolz en cero (esto se puede ver en [14]), existe un ángulo de Stolz $\triangle$ más pequeño tal que h_μ está bien definida y no se anula en $\Omega = (\triangle \cup \overline{\triangle})^2$. En ese dominio la transformada R es analítica y en adelante ese será su dominio de definición, excepto en el caso que μ tenga soporte compacto, en cuyo caso se toma como dominio un disco abierto con centro en $(0, 0)$ donde $\mathcal{R}_\mu$ admite una serie de potencias absolutamente convergente. Una propiedad en la transformada R que hereda de la transformada de Cauchy bi-variada y del hecho que $\overline{R_{\mu^{(j)}}(\lambda)} = R_{\mu^{(j)}}(\bar{\lambda})$ es que

$$\overline{\mathcal{R}_\mu(z, w)} = \mathcal{R}_\mu(\bar{z}, \bar{w}).$$

Proposición 3.2.5 *Sea $\mathcal{R}_\mu : \Omega \to \mathbb{C}$ la transformada R de una medida de probabilidad μ en $\mathbb{R}^2$. Entonces*

1. *Para todo $(z, w) \in \Omega$ tenemos*

$$\lim_{\lambda \to 0} \mathcal{R}_\mu(z, \lambda) = zR_{\mu^{(1)}}(z),$$
$$\lim_{\lambda \to 0} \mathcal{R}_\mu(\lambda, w) = wR_{\mu^{(2)}}(w).$$

2. *$lim_{(z,w)\to(0,0)}\mathcal{R}_\mu(z, w) = 0$.*

Demostración. (2) es claro de la relación 3.3, por la forma en que se relacionan la transformada R y la transformada de Cauchy. En (1) vamos a demostrar el primer límite, el otro es análogo. Primero observemos que la transformada R univariada cumple que

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda R_{\mu^{(2)}}(\lambda) = 0,$$

y de los límites no tangenciales de la transformada de Cauchy bi-variada, combinado con que

$$\frac{1}{\lambda} + R_{\mu^{(2)}} = \frac{1}{\lambda}(1 + o(1)) \to_{\triangleleft} \infty,$$

cuando $\lambda \to 0$, $\lambda \in \triangle \cup \overline{\triangle}$, se tiene que

$$\lim_{\lambda \to 0} h_\mu(z, \lambda) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{G_\mu(\frac{1}{z} + R_{\mu^{(1)}}(z), \frac{1}{\lambda} + R_{\mu^{(2)}}(\lambda))}{z\lambda} = 1,$$

para todo $z \in \lambda \in \triangle \cup \overline{\triangle}$, de donde se tiene el resultado. ∎

Si en el resultado anterior se añade que la medida es tensa, la convergencia es uniforme. Al igual que la transformada de Cauchy, la transformada R también caracteriza a la distribución.

Teorema 3.2.6 *[30, Prop. 2.5] Si dos medidas de probabilidad μ y ν en $\mathbb{R}^2$ tienen la misma transformada R entonces $\mu = \nu$.*

Demostración. Si $\mathcal{R}_\mu = \mathcal{R}_\nu$ en $\Omega = (\triangle \cup \overline{\triangle})^2$, entonces $\mu^{(j)} = \nu^{(j)}$ $j = 1, 2$ esto por la proposición anterior. Además de la igualdad 3.5 se tiene que

$$G_\mu(\frac{1}{z} + R_{\mu^{(1)}}(z), \frac{1}{w} + R_{\mu^{(2)}}(w)) = G_\nu(\frac{1}{z} + R_{\nu^{(1)}}(z), \frac{1}{w} + R_{\nu^{(2)}}(w)),$$

para $(z, w) \in \Omega$. Ahora bien, la imagen de un ángulo de Stolz $\triangle$ bajo la aplicación $\lambda \mapsto \dfrac{1}{\lambda} + R_{\mu^{(j)}}(\lambda)$ contiene un cono truncado $\Gamma = \{x + iy \in \mathbb{C} : |x| < ay, y > b\}$, para algunos $a, b > 0$ (lo anterior se puede ver en [14]). De ahí se concluye que $G_\mu = G_\nu$ en el abierto $(\Gamma \cup \overline{\Gamma})^2$, luego, por analiticidad, $G_\mu = G_\nu$ en $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^2$ lo que nos da el resultado. ∎

Como hemos visto hasta ahora la transformada de Cauchy le ha heredado propiedades importantes a la transformada R. Ahora presentamos la última proposición de esta sección, un resultado de continuidad para la transformada R bi-libre.

Proposición 3.2.7 *Sea $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}^2$. Entonces μ_n converge débilmente a una medida de probabilidad en $\mathbb{R}^2$ si y sólo si se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1. *Existe un ángulo de Stolz $\triangle$ tal que todos los $\mathcal{R}_{\mu_n}$ están definidos en $\Omega = (\triangle \cup \overline{\triangle})^2$.*
2. *El límite puntual $\lim_{n\to\infty} \mathcal{R}_{\mu_n}(z, w) = \mathcal{R}(z, w)$ existe para todo $(z, w) \in \Omega$.*
3. *El límite $\mathcal{R}_{\mu_n}(-iy, -iv) \to 0$ uniformemente en n, con $y, v \to 0^+$. Mas aún, si $\mu_n \Rightarrow \mu$ se tiene $\mathcal{R} = \mathcal{R}_\mu$. (Esta condición no es más que la familia sea tensa puesto de manera distinta).*

Demostración. Supongamos que $\mu_n \Rightarrow \mu$. Entonces también tenemos la convergencia débil $\mu_n^{(j)} \Rightarrow \mu^{(j)}$, $j = 1, 2$, para las marginales, ya que las proyecciones son continuas. De nuevo citamos [14] en donde se puede ver que la convergencia de esas marginales implica la existencia de un ángulo de Stolz $\triangle$ tal que $\lim_{n\to\infty} R_{\mu_n^{(j)}} = R_{\mu^{(j)}}$ punto a punto en $\triangle \cup \overline{\triangle}$. Además tenemos de observaciones previas que $\dfrac{1}{\lambda} + R_{\mu_n^{(j)}}(\lambda) \to_{\triangleleft} \infty$ uniformemente en n cuando $\lambda \to 0, \lambda \in \triangle \cup \overline{\triangle}$. Contrayendo el ángulo si es necesario y de 3.5 se tiene que $\mathcal{R}_{\mu_n}$ está definido en $\Omega = \triangle \cup \overline{\triangle}$ para todo n y se tiene (1). (2) y (3) se siguen de tomar $G = G_\mu$, lo cual se tiene de la convergencia débil y la relación 3.5.

Recíprocamente, supongamos que se tiene (2) y (3), entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|\mathcal{R}_{\mu_n}(-iy, -iv)| < \epsilon \quad n \geq 1 \quad 0 < y, v < \delta.$$

Tomando ahora $v \to 0$, con y fijo y de los límites que vimos de la transformada R respecto a las marginales, se tiene que $(-iy)R_{\mu_n^{(1)}}(-iy) \to 0$ uniformemente en n cuando $y \to 0^+$. De nuevo de resultados en [14], la sucesión $\{\mu_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tensa; análogamente $\{\mu_n^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tensa. De las dos anteriores, se tiene que $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tensa, y como la transformada R caracteriza a la medida, todo límite débil μ de la sucesión $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está unicamente determinado por la convergencia puntual (2);

osease la sucesión *llena* μ_n converge débilmente a μ, (una medida en $\mathbb{R}^2$ se dice llena si su soporte no está contenido en una línea recta). ■

3.2.1 Sistemas de rango menor que uno de conmutación

Definición 3.2.8 Un espacio de probabilidad no conmutativo *implementado* es una tripleta $(\mathcal{A}, \varphi, \mathcal{P})$, donde $(\mathcal{A}, \varphi)$ es un espacio de probabilidad no conmutativo y $\mathcal{P} = \mathcal{P}^2 \in \mathcal{A}$ una variable idempotente, tal que $\mathcal{P}a\mathcal{P} = \varphi(a)\mathcal{P}$. Un C^*-espacio de probabilidad implementado $(\mathcal{A}, \varphi, \mathcal{P})$ satisface los requerimientos adicionales de que $(\mathcal{A}, \varphi)$ sea un C^*-espacio de probabilidad y $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$.

En un espacio de probabilidad implementado podemos ubicar variables de dos caras que "casi" conmutan y nos permiten trabajar con menos momentos. Vamos a definirlas.

Definición 3.2.9 Un *sistema con rango* ≤ 1 *de conmutación* en un espacio de probabilidad implementado $(\mathcal{A}, \varphi, \mathcal{P})$ es una familia de dos caras $((a_i)_{i\in I}, (b_j)_{j\in J})$ en $(\mathcal{A}, \varphi)$, tal que $[a_i, b_j] = \lambda_{ij}\mathcal{P}$ para algunos $\lambda_{ij} \in \mathbb{C},\ i \in I, j \in J$. Llamaremos a $(\lambda_{ij})_{i\in I, j\in J}$ la *matriz de coeficientes del sistema.*

Observación 3.2.10

- *La construcción GNS nos brinda un ejemplo de espacio de probabilidad implementado. Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un C^*-espacio de probabilidad no conmutativa y $(\mathcal{H}, \pi, \xi)$ tal representación (ver en [35] la construcción). Sea $\mathcal{P} \in B(\mathcal{H})$ la proyección sobre $\mathbb{C}\xi$ y $\tilde{A}$ la C^*-álgebra generada por $\pi(\mathcal{A})$ y $\mathcal{P}$, y $\tilde{\varphi}$ el operador $\langle \cdot\xi, \xi\rangle$ en $\tilde{A}$. Entonces $(\tilde{A}, \tilde{\varphi}, \mathcal{P})$ es un C^*-espacio de probabilidad implementado y π es un homomorfismo de $(\mathcal{A}, \varphi)$ a $(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\varphi})$ tal que $\tilde{\varphi}(\pi(a)) = \varphi(a)$.*
- *Un sistema bipartito en un espacio de probabilidad implementado es un sistema de rango ≤ 1 de conmutación con coeficientes $(\lambda_{ij})_{i\in I, j\in J} = 0$.*

Proposición 3.2.11 *Sean μ distribución de un sistema de rango ≤ 1 con conjunto de índices (I, J) y ν distribución de un sistema de rango ≤ 1 con conjunto de índices (K, L).*

a) Sea π la distribución de una familia de dos caras etiquetadas por $(I \coprod K, J \coprod L)$ tal que μ es la restricción de π a los índices (I, J) y ν la restricción de π a los índices (K, L). Si además μ y ν son bi-libres entonces π es la distribución de un sistema de rango ≤ 1 de conmutación y con matriz de coeficientes $((\lambda_{ij})_{i\in I, j\in J} + (\lambda_{kl})_{k\in K, l\in L})$, la suma directa de las matrices de coeficientes de los sistemas con distribuciones μ y ν.

b) Si $I = K, J = L$ entonces la convolución bi-libre aditiva es la distribución de un sistema de rango ≤ 1 de conmutación y matriz de coeficientes la suma de las matrices de coeficientes para los sistemas con distribuciones μ y ν.

Introducimos ahora la terminología de *bandas de sucesiones de índices.* Si (I, J) es un par de conjuntos de índices para un sistema de dos caras, una aplicación $\alpha : \{1, ..., m\} \to I \coprod J$ es llamada *sucesión de índices de longitud* m. Una *banda* en la sucesión de índices α es el máximo intervalo $[p, q]$, con $1 \leq p \leq q \leq m,\ p, q \in \mathbb{N}$, tal que $\alpha(r),\ p \leq r \leq q$ está en uno sólo de los conjuntos I y J. Una sucesión de índices que tiene n bandas se llamará n-*banda.* Será útil también decir que α *inicia a la izquierda* si $\alpha(1) \in I$ (análogamente si *inicia a la derecha*). De manera natural definimos que α *termina a la izquierda y derecha.* Si α tiene n bandas los correspondientes momentos no conmutativos serán llamados momentos de n-bandas y los correspondientes cumulantes de n-bandas. Por último la parte de la distribución de un sistema de dos caras que involucran momentos con bandas de tamaño menor que n será llamada distribución de n-bandas.

Proposición 3.2.12 *La distribución de un sistema con rango ≤ 1 de conmutación está completamente determinada por su distribución de 2-bandas iniciando a la izquierda y su matriz de coeficientes.*

Demostración. Sea $(\mathcal{A}, \varphi, \mathcal{P})$ un espacio de probabilidad implementado y sea $((z_i)_{i\in I}, (z_j)_{j\in J})$ un sistema de rango ≤ 1 de conmutación en $(\mathcal{A}, \varphi, \mathcal{P})$. Denotemos $IJ = \{(i_1, ..., i_p, j_1, ..., j_q) : p \geq 0,\ q \geq 0,\ i_1, ..., i_p \in I,\ j_1, ..., j_q \in J\}$ (tenemos un "vacío especial" cuando $p = q = 0$). Para $k \in I \coprod J$ definimos T_k en $\mathcal{A}$ como $T_k a = a z_k$ si $a \in \mathcal{A}$. Sea también $\mathcal{V} \subset \mathcal{A}$ el subespacio generado por $\mathcal{P} z_{i_1} \cdots z_{i_p} z_{j_1} \cdots z_{j_q}$ donde $(i_1, ..., i_p, j_1, ..., j_q) \in IJ$. $\mathcal{V}$ es T_k-invariante, pues si $k \in J$ entonces $(i_1, ..., i_p, j_1, ..., j_q, k) \in IJ$ y en ese caso $T_k \mathcal{P} z_{i_1} \cdots z_{i_p} z_{j_1} \cdots z_{j_q} = \mathcal{P} z_{i_1} \cdots z_{i_p} z_{j_1} \cdots z_{j_q} z_k \in \mathcal{V}$. Ahora bien, si $k \in I$ tenemos

$$\begin{aligned} T_k \mathcal{P} z_{i_1} \cdots z_{i_p} z_{j_1} \cdots z_{j_q} &= \mathcal{P} z_{i_1} \cdots z_{i_p} z_{j_1} \cdots z_{j_q} \\ &\quad + \sum_{t=1}^{q} \mathcal{P} z_{i_1} \cdots z_{i_p} z_{j_1} \cdots z_{j_{t-1}} [z_{j_t}, z_k] z_{j_{t+1}} \cdots z_{j_q} \\ &= \mathcal{P} z_{i_1} \cdots z_{i_p} z_{j_1} \cdots z_{j_q} \\ &\quad - \sum_{t=1}^{q} \varphi(z_{i_1} \cdots z_{i_p} z_{j_1} \cdots z_{j_{t-1}}) \lambda_{k,j_t} \mathcal{P} z_{j_{t+1}} \cdots z_{j_q}, \end{aligned}$$

ya que $[z_{j_t}, z_k] = -\lambda_{k,j_t} \mathcal{P}$ y $\mathcal{P} z_{i_1} \cdots z_{i_p} z_{j_1} \cdots z_{j_{t-1}} \mathcal{P} = \varphi(z_{i_1} \cdots z_{i_p} z_{j_1} \cdots z_{j_{t-1}}) \mathcal{P}$. Esto muestra la T_k-invarianza y más aún la formula para determinar $T_k \mathcal{P} z_{i_1} \cdots z_{i_p} z_{j_1} \cdots z_{j_q}$ está determinada por la distribución de 2-bandas que comienza a la izquierda y la matriz de coeficientes del sistema con rango ≤ 1 de conmutación. La prueba de la proposición se sigue de aplicar varias veces este hecho al calcular $\mathcal{P} z_{k_1} \cdots z_{k_r} = T_{k_r} \cdots T_{k_1} \mathcal{P}$ donde $k_1, ..., k_r \in I \coprod J$ y pasándolo a $\varphi(z_{k_1} \cdots z_{k_r})$ que está dado como: $\varphi(z_{k_1} \cdots z_{k_r}) \mathcal{P} = (T_{k_r} \cdots T_{k_1} \mathcal{P}) \mathcal{P}$. y como $T_{k_r} \cdots T_{k_1} \mathcal{P} \in \mathcal{V}$ el cálculo de $(T_{k_r} \cdots T_{k_1} \mathcal{P}) \mathcal{P}$ da un polinomio

$$\mathcal{P} z_{i_1} \cdots z_{i_p} z_{j_1} \cdots z_{j_q} \mathcal{P} = \varphi(z_{i_1} \cdots z_{i_p} z_{j_1} \cdots z_{j_q}) \mathcal{P},$$

y se tiene el resultado. ∎

Presentamos ahora algunos ejemplos no triviales.

1. Los sistemas duales en entropía libre (ver sección 5 de [52]) nos dan un ejemplo de sistema de rango ≤ 1 de conmutación. Dada una álgebra de Von Neumann con un estado-traza normal y fiel $(\mathcal{M}, \tau)$, y $I \in \mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ una $*$-subálgebra y $X_j = X_j^* \in \mathcal{M},\ 1 \leq j \leq n$, un sistema dual a $(X_1, ..., X_n; \mathcal{B})$ en $L^2(\mathcal{M}, \tau)$ es una n-tupla $(Y_1, ..., Y_n)$ de operadores $Y_j = Y_j^* \in B(L^2(\mathcal{M}, \tau)),\ 1 \leq j \leq n$ tal que $[\mathcal{B}, Y_j] = 0$ y $[X_j, Y_k] = i\delta_{jk} \mathcal{P}$ donde $\mathcal{P}$ es la proyección ortogonal sobre $\mathbb{C}\mathbf{1}$. Si $(b_k)_{k\in K}$ es una familia en $\mathcal{B}$, entonces $((X_1, ..., X_n) \coprod (b_k)_{k\in K}), (Y_1, ..., Y_n)$ es un sistema con rango ≤ 1 de conmutación en $(B(L^2(\mathcal{M}, \tau)), \langle \cdot \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle, \mathcal{P})$. La matriz de coeficientes en este caso es $\lambda_{pq} = i\delta_{pq}$ si $1 \leq p, q \leq n$ y $\lambda_{pk} = 0$ si $1 \leq p \leq n,\ k \in K$.

2. En la subsección 3.2.2, definiremos de manera breve los operadores hiponormales (para profundizar ver [18]). Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $T \in B(\mathcal{H})$ un operador hiponormal, con $T^*T - TT^* = \lambda\mathcal{P}$, $\lambda > 0$ y $\mathcal{P}$ es la proyección ortogonal sobre un conjunto unidimensional $\mathbb{C}\xi \in \mathcal{H}$, y $\|\xi\| = 1$. Consideremos en el espacio $(B(\mathcal{H}), \langle\cdot\xi, \xi\rangle, \mathcal{P})$, al par $(aT + bT^*, cT + dT^*)$, con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, entonces este par también es de rango ≤ 1 de conmutación y de hecho

$$[aT + bT^*, cT + dT^*] = -\det \Omega\lambda\mathcal{P},$$

donde

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

lo anterior es información importante en el estudio de operadores seminormales.

3. Un ejemplo más familiar nos lo brindan los espacios de Fock. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ el espacio de Fock libre, y $h, h^* : I \coprod J \to \mathcal{H}$ entonces $z_i = l(h(i)) + l^*(h^*(i))$, $i \in I$ y $z_j = r(h(j)) + r^*(h^*(j))$, $j \in J$ forman un sistema de rango ≤ 1 de conmutación en $(B(\mathcal{F}(\mathcal{H})), \tau_{\mathcal{H}}, \mathcal{P})$ donde $\mathcal{P}\eta = \langle \eta, \mathbf{1}\rangle\mathbf{1}$. En ese caso tenemos $[z_i, z_j] = (\langle h(j), h^*(i)\rangle - \langle h(i), h^*(j)\rangle)\mathcal{P}$.

Teorema 3.2.13 *[54, Teo. 4.1] Sea $\pi = ((a_i)_{i\in I}, (b_j)_{j\in J})$ una familia de dos caras en $(\mathcal{A}, \varphi)$.*

a) La distribución de π es igual a la de $\pi' = ((a'_i)_{i\in I}, (b'_j)_{j\in J})$ con $a'_i = a_i$ y $b'_j = 0$ si y sólo si los únicos cumulantes bi-libres no cero de π corresponden a la sucesión de índices α cuyo rango está en I. Análogo para el caso α con rango en J.

b) La distribución de π tiene la propiedad de que los únicos cumulantes bi-libres no cero corresponden a una sucesión de índices con rango en I o J si y sólo si las familias de variables aleatorias no conmutativas $((a_i)_{i\in I}$ y $(b_j)_{j\in J}$ son independientes en el sentido clásico en $(\mathcal{A}, \varphi)$.

Demostración.

a) Si $\alpha : \{1, ..., n\} \to I \coprod J$ para todo $k \in I \coprod J$ consideremos la *aplicación de grado* $k \mapsto \#\alpha^{-1}(k)$. Los cumulantes bi-libres son multi-homogéneos con aplicación de grado correspondiente a la sucesión de índices. En vista de eso, π' se obtiene de π, multiplicando b_i's por 0, se tiene que los cumulantes correspondientes se obtienen de π los cuales involucran los índices derechos por 0. Como los cumulantes determinan a la distribución se tienen las dos partes.

b) Considerese π' como en a) y π'' el análogo donde $a''_i = 0$ y $b''_j = b_j$. En vista de resultados del capítulo anterior, la suma bi-libre de π' y π'' consiste de copias independientes en el sentido clásico de $(a_i)_{i\in I}$ y $(b_j)_{j\in J}$ y en vista de la propiedad aditiva de sus cumulantes son 0 o bien los cumulantes libres de $(a_i)_{i\in I}$ o $(b_j)_{j\in J}$. De nuevo como los cumulantes determinan la distribución se tiene el resultado.

$\blacksquare$

Corolario 3.2.14 *Si μ y ν son distribuciones de familias de dos caras con variables izquierdas y derechas independientes en el sentido clásico y los mismos conjuntos de índices, entonces $\mu \boxplus\boxplus \nu$ es también una distribución con variables izquierdas y derechas independientes en el sentido clásico.*

3.2.2 Funciones principales

Comencemos con una lista de definiciones (se mencionan brevemente, para ahondar ver [18]).

Definición 3.2.15 *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in B(\mathcal{H})$*

i) T se dice positivo si $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, negativo si $-T$ es positivo. Si T es negativo o positivo se dice semidefinido.

ii) El auto-conmutador de T es el operador $[T^*, T] = T^*T - TT^*$.

iii) T es seminormal si su autoconmutador es semidefinido. T es normal si su autoconmutador es 0. Si el autoconmutador de T es positivo, decimos que T es hiponormal, si es negativo decimos que T es cohiponormal.

iv) Sea T seminormal, decimos que T es puro o completamente no-normal si el único subespacio $A \subset \mathcal{H}$ que cumple que $T|_A$ es normal es $A = \{0\}$.

v) Un operador puro es de clase-traza si $tr(\pi i[T^*, T]) < \infty$. Para un operador completamente no-normal de clase traza, tal que $Y = X + iY$, definimos su función principal g como la función de dos variables reales que cumple

$$tr(i[p(X,Y), q(X,Y)]) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}\right] g(x,y)dxdy,$$

para cualesquiera polinomios p, q en dos variables reales.

Estos operadores son importantes porque para ellos hay respuestas muy satisfactorias sobre el problema del subespacio invariante no trivial y también tienen un teorema espectral, además todo operador seminormal se puede descomponer como suma directa de un operador normal y un operador completamente no-normal, y conocer la función principal nos ayuda a obtener información acerca del espectro del operador. De hecho $\sigma(T) = supp(g)$.

En el artículo de Dykema [21], se trabaja con un operador que surge de los espacios de Fock y las distribuciones de límite central vistas en el capítulo 2, se obtiene su función principal y se enuncia el siguiente teorema

Teorema 3.2.16 *[21, Teo. 3.3] Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $v_1, v_2 \in \mathcal{H}$ vectores linealmente independientes, consideremos l, l^*, r, r^* los operadores aniquilación y creación izquierdos y derechos del espacio de Fock libre $\mathcal{F}(\mathcal{H})$. Sea $T = l(v_1) + l^*(v_1) + i(r(v_2) + r^*(v_2))$, si $Im\langle v_1, v_2\rangle \neq 0$, el espectro de T es el rectangulo cerrado*

$$\sigma(T) = \{\gamma + i\delta \in \mathbb{C} \ : \ |\gamma| \leq 2\|v_1\|, \ |\delta| \leq 2\|v_2\|\}.$$

El teorema anterior se demuestra usando la herramienta de operadores seminormales. Con la misma se demuestra el siguiente corolario.

Corolario 3.2.17 *El operador $T = l(v_1) + l^*(v_1) + i(r(v_2) + r^*(v_2))$ con las mismas hipótesis del teorema anterior es la suma de un operador normal más un operador compacto.*

Ejemplo 3.2.18 *Sean v_2 y u vectores ortogonales en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con $\|v_2\| = \|u\| = 1$ y sea $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \in \mathbb{C}$. Sea $v_1 \in \mathcal{H}$ definido como $v_1 = \alpha v_2 + u$. Supongamos que T es un operador acotado en el espacio de Fock libre $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ definido como antes, $T = l(v_1) + l^*(v_1) + i(r(v_2) + r^*(v_2))$. Entonces $[T^*, T] = 2\sqrt{2}P$, con P una proyección de $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ sobre un espacio unidimensional.*

Tomando la restricción de T^* a su parte pura $\overline{alg(T, T^*, \mathbf{1})\Omega}$, tenemos que T^* es un operador hiponormal completamente no-normal. Usando resultados del artículo [21] podemos obtener la función principal de T. Para cada par (δ, γ) tal que $|\delta| \leq 2$ y $|\gamma| \leq 2\sqrt{2}$, tenemos

$$
\begin{aligned}
g(\delta, \gamma) = {} & \frac{1}{\pi} Arg \left[1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i) \zeta(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}) \zeta(\delta) \right] \\
& + \frac{1}{\pi} Arg \left[1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i) \overline{\zeta(\frac{\gamma}{\sqrt{2}})} \zeta(\delta) \right] \\
& - \frac{1}{\pi} Arg \left[1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i) \zeta(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}) \zeta(\delta) \right] \\
& - \frac{1}{\pi} Arg \left[1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i) \overline{\zeta(\frac{\gamma}{\sqrt{2}})} \zeta(\delta) \right],
\end{aligned}
$$

donde $\zeta(t) = \dfrac{t - i\sqrt{4 - t^2}}{2}$ para $t \in [-2, 2]$. Como $Im\langle v_1, v_2 \rangle < 0$, tenemos $0 \leq g(\delta, \gamma) < 1$ para todo $(\delta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$. Luego $g(\delta, \gamma)$ se anula solamente cuando (δ, γ) está en los bordes del rectángulo $\{(\delta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |\gamma| \leq 2, \ |\delta| \leq 2\}$. La gráfica de la función principal de T es la siguiente

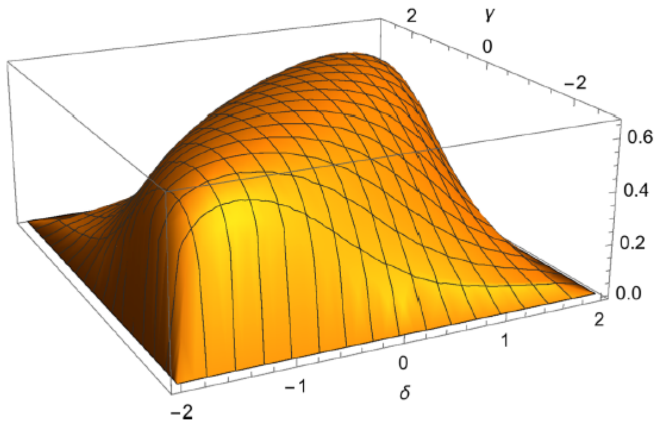


Figura 3.1: Función principal $g(\delta, \gamma)$ de T cuando $v_1 = \alpha v_2 + u$, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$ y $\|v_2\| = \|u\| = 1$, $u \perp v_1$

3.3 La transformada S

El objetivo de las secciones restantes es definir dos transformadas más, que se comportan "bien" con las otras convoluciones, y estudiar algunas de sus propiedades analíticas; se enunciarán teoremas que garantizan ese buen comportamiento, sin embargo no se demostrarán, para ello remitimos al lector a [55]. Empecemos por establecer un poco de notación: $G_{a,b}$ como antes denotará la transformada de Cauchy en dos variables de la distribución de (a,b), $K_a(z) = \frac{1}{z} + R_a(z)$ y $H_{a,b}(t,s) = \varphi\left[(1-ta)^{-1}(1-sb)^{-1}\right]$, con $s,t \in \mathbb{C}$. También en el primer capítulo vimos que para variables que cumplen que $\varphi(a) \neq 0$, existe la inversa de una serie de potencias muy específica. La inversa la denotamos χ_a y la transformada S está definida como $S_a(z) = \frac{1+z}{z}\chi_a(z)$. Además sea $h_a(t) = t^{-1}G_a(t^{-1})$.

Definición 3.3.1 Sea (a,b) una variable de dos caras en un espacio de probabilidad no conmutativo de Banach $(\mathcal{A},\varphi)$, tal que $\varphi(a) \neq 0$, $\varphi(b) \neq 0$. Definimos la *transformada S bi-libre* en dos variables como la función holomorfa en $(z,w) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$, con z,w cerca de 0 de la siguiente manera

$$\mathcal{S}_{a,b}(z,w) = \frac{z+1}{z}\frac{w+1}{w}\left[1 - \frac{1+z+w}{H_{a,b}(\chi_a(z),\chi_b(w))}\right], \tag{3.6}$$

y como esto involucra sólo la distribución conjunta $\mu_{a,b}$ de (a,b), también escribimos $\mathcal{S}_{\mu_{a,b}}(z,w)$ en vez de $\mathcal{S}_{a,b}(z,w)$.

La definición anterior tal vez sea poco intuitiva y no parece a simple vista darnos información importante; sin embargo, el siguiente teorema nos dice que tal definición es la correcta, pues la transformada S se comporta como se espera con la convolución multiplicativa.

Teorema 3.3.2 *[55, Teo. 2.1] Sean (a_1,b_1) y (a_2,b_2) un par de variables de dos caras bi-libre en un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A},\varphi)$ tal que $\varphi(a_1) \neq 0$, $\varphi(a_2) \neq 0$, $\varphi(b_1) \neq 0$, $\varphi(b_2) \neq 0$. Entonces tenemos*

$$\mathcal{S}_{a_1a_2,b_1b_2}(z,w) = \mathcal{S}_{a_1,b_1}(z,w)\mathcal{S}_{a_2,b_2}(z,w), \tag{3.7}$$

para $(z,w) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$ cerca de $(0,0)$.

En términos de la notación de las distribuciones podemos ver esto así: si (a_1,b_1) y (a_2,b_2) son un par de variables de dos caras bi-libre, donde las medias no se anulan, entonces

$$\mathcal{S}_{\mu_{a_1,b_1}\boxtimes\boxtimes\mu_{a_2,b_2}}(z,w) = \mathcal{S}_{\mu_{a_1,b_1}}(z,w)\mathcal{S}_{\mu_{a_2,b_2}}(z,w).$$

Tal como comentamos en la observación 2.4.6, en el artículo [31] se trabaja con medidas en $\mathbb{T}^2$, y también desarrollan la teoría analítica de la transformada S bi-libre, un resultado importante del artículo es el siguiente.

Teorema 3.3.3 *[31, Prop. 2.3] Sean $\mu_i = \mu_{(u_i,v_i)}$ medidas en $\mathbb{T}^2$, con u_i, v_i en $(B(\mathcal{H}),\varphi_\xi)$, y supongamos $\varphi_\xi(u_i) = 0 = \varphi_\xi(v_i)$, $i = 1,2$. Entonces,*

$$\mu_1 \boxtimes\boxtimes \mu_2 = m := \frac{d\theta}{2\pi} \otimes \frac{d\theta}{2\pi},$$

i.e. m es la distribución uniforme en $\mathbb{T}^2$ si y sólo si alguno de los momentos mixtos $\varphi_\xi(u_1v_1)$ o $\varphi_\xi(u_2v_2)$ es cero. En particular, siempre tenemos $\mu_{(u,v)}\boxtimes\boxtimes m = m$, siempre que $\varphi_\xi(u) = 0 = \varphi_\xi(v)$.

Se demuestra también en el mismo artículo que la transformada S caracteriza a las medidas en $\mathbb{T}^2$, en el sentido de que si $S_\mu = S_\nu$ entonces $\mu = \nu$ (bajo algunas condiciones). Además se caracteriza la convergencia débil de medidas en términos de un límite puntual de transformadas S, de manera parecida al análisis que hicimos con la transformada R. Por último se estudian todos los posibles límites débiles de sucesiones del tipo:

$$\mu_n = \delta_{\lambda_n} \boxtimes\boxtimes \mu_{n_1} \boxtimes\boxtimes \cdots \boxtimes\boxtimes \mu_{n_{k_n}}$$

y encuentran que esas medidas son las medidas de probabilidad $\boxplus\boxplus$- infinitamente divisibles en $\mathbb{T}^2$.

Mencionamos esto aquí pues, es de suma importancia este artículo, pero no se incluye el análisis detallado en la sección, pues el trabajo se hizo público en fechas muy cercanas a terminar esta tesis, se recomienda su lectura.

3.4 La transformada T

Definición 3.4.1 Sea (a, b) una variable de dos caras en un espacio de probabilidad no conmutativo de Banach $(\mathcal{A}, \varphi)$, tal que $\varphi(b) \neq 0$. Definimos la *transformada T bi-libre* en dos variables como la función holomorfa en $(z, w) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$, con z, w cerca de 0 como

$$\mathcal{T}_{a,b}(z, w) = \frac{w+1}{w}\left[1 - \frac{z}{F_{a,b}(K_a(z), \chi_b(w))}\right], \tag{3.8}$$

donde $F_{a,b}(t, s) = \varphi((t - a)^{-1}(1 - sb)^{-1})$, como esto involucra sólo la distribución conjunta $\mu_{a,b}$ de (a, b), también escribimos $\mathcal{T}_{\mu_{a,b}}(z, w)$ en vez de $\mathcal{T}_{a,b}(z, w)$.

De nuevo el siguiente teorema justifica la definición poco intuitiva de la transformada T.

Teorema 3.4.2 *[55, Teo. 3.1] Sean (a_1, b_1) y (a_2, b_2) un par de variables de dos caras bi-libre en un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \varphi)$ tal que $\varphi(b_1) \neq 0$, $\varphi(b_2) \neq 0$. Entonces tenemos*

$$\mathcal{T}_{a_1+a_2,b_1b_2}(z, w) = \mathcal{T}_{a_1,b_1}(z, w)\mathcal{T}_{a_2,b_2}(z, w), \tag{3.9}$$

para $(z, w) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$ cerca de $(0, 0)$.

En términos de la notación de las distribuciones podemos ver esto como sigue: si (a_1, b_1) y (a_2, b_2) un par de variables de dos caras bi-libre, donde las medias de las variables en las segundas caras no se anulan. Entonces tenemos

$$\mathcal{T}_{\mu_{a_1,b_1}\boxplus\boxtimes\mu_{a_2,b_2}}(z, w) = \mathcal{T}_{\mu_{a_1,b_1}}(z, w)\mathcal{T}_{\mu_{a_2,b_2}}(z, w).$$

3.5 Resultados analíticos

En las definiciones de las transformadas bi-libres S y T en las secciones anteriores, se pedía $z, w \neq 0$. Quitemos ahora esa restricción.

Proposición 3.5.1 *a) La transformada $\mathcal{S}_{a,b}(z,w)$ se extiende a una función holomorfa de (z,w) en una vecindad de $(0,0) \in \mathbb{C}^2$.*

b) La transformada $\mathcal{T}_{a,b}(z,w)$ se extiende a una función holomorfa de (z,w) en una vecindad de $(0,0) \in \mathbb{C}^2$.

Demostración.

a) Si $\varphi(a) \neq 0, \varphi(b) \neq 0$, tenemos por definición

$$\mathcal{S}_{a,b}(z,w) = \frac{z+1}{z}\frac{w+1}{w}\left[1 - \frac{1+z+w}{H_{a,b}(\chi_a(z),\chi_b(w))}\right],$$

definido originalmente para $(z,w) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$ cerca de $(0,0)$. Tenemos

$$H_{a,b}(t,s) = \sum_{p\geq 0,\ q\geq 0} t^p s^q \varphi(a^p b^q),$$

en una vecindad de $(0,0)$ y por tanto

$$H_{a,b}(t,s) = h_a(t) + h_b(s) - 1 + st\eta(s,t),$$

donde η es una función holomorfa de (s,t) en una vecindad de $(0,0)$. Usando que $h_a(\chi_a(z)) = z+1$ y $h_b(\chi_b(w)) = w+1$ tenemos

$$\mathcal{S}_{a,b}(z,w) = \frac{z+1}{z}\frac{w+1}{w}\left[\frac{\chi_a(z)\chi_b(w)\cdot\eta(\chi_a(z),\chi_b(w))}{H_{a,b}(\chi_a(z),\chi_b(w))}\right],$$

que da una función holomorfa en una vecindad de $(0,0)$ ya que $z^{-1}\chi_a(z)$ y $w^{-1}\chi_b(w)$ tienen singularidades removibles en 0, sus valores allí son $(\varphi(a))^{-1}$ y $(\varphi(b))^{-1}$ y más aún $H_{a,b}(\chi_a(0),\chi_b(0)) = 1$ y se tiene a).

b) Si $\varphi(b) \neq 0$, por definición

$$\mathcal{T}_{a,b}(z,w) = \frac{w+1}{w}\left[1 - \frac{z}{F_{a,b}(K_a(z),\chi_b(w))}\right],$$

para $(z,w) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$ cerca de $(0,0)$. Aquí,

$$F_{a,b}(t,s) = \varphi[(t\mathbf{1} - a)^{-1}(\mathbf{1} - sb)^{-1}] = \sum_{p\geq 0,\ q\geq 0} t^{-p-1}s^q\varphi(a^p b^q) = G_a(t) + s\theta(t,s),$$

donde θ es holomorfa en una vecindad de $(\infty,0) \in (\mathbb{C}\cup\{\infty\}) \times \mathbb{C}$. Como $G_a(K_a(z)) = z$, $K_a(z) = z^{-1}(1 + zR_a(z))$ es holomorfa cerca de 0 y $\chi_b(w) = w\hat{\chi}(w)$ donde $\hat{\chi}$ es holomorfa para una vecindad de 0, tenemos

$$\mathcal{T}_{a,b}(z,w) = \frac{w+1}{w}\left[\frac{\chi_b(w)z^{-1}\theta(K_a(z),\chi_b(w))}{z^{-1}F_{a,b}(K_a(z),\chi_b(w))}\right] = \left[\frac{(w+1)\hat{\chi}(w)z^{-1}\theta(K_a(z),\chi_b(w))}{z^{-1}F_{a,b}(K_a(z),\chi_b(w))}\right],$$

Además K_a es analítica desde una vecindad de 0 hasta una vecindad de ∞,

$$z^{-1}\theta(K_a(z), \chi_b(w)) = (\hat{\chi}(z))^{-1} \sum_{p\geq 0,\ q\geq 0} (K_a(z))^{-p}(\chi_b(w))^{-q}\varphi(a^p b^q),$$

es holomorfa en una vecindad de $(0,0)$. Por otro lado,

$$\sum_{p\geq 0,\ q\geq 0} z^p(\bar{K}(z))^{-p-1}(\chi_b(w))^q\varphi(a^p b^q),$$

es holomorfa en una vecindad de $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ y es igual a 1 cuando $z = w = 0$. Entonces el cociente $\mathcal{T}_{a,b}(z,w)$ se extiende a una función holomorfa en una de vecindad de $(0,0)$.

■

Ahora tenemos definidas las transformada S y transformada T en una vecindad de $(0,0)$. En cierto sentido las transformadas S y T se comportan "como covarianzas", es decir, son triviales en el caso que a, b se comportan como variables aleatorias independientes en el sentido clásico.

Proposición 3.5.2 *Sean a, b variables aleatorias en un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \varphi)$ tal que $\varphi(a^p b^q) = \varphi(a^p)\varphi(b^q)$ para todo $p, q \geq 0$, entonces si $\varphi(b) \neq 0$ tenemos $\mathcal{T}_{a,b}(z,w) = 1$ y si adicionalmente $\varphi(a) \neq 0$ entonces $\mathcal{S}_{a,b}(z,w) = 1$.*

Demostración. Bajo los supuestos de la proposición (factorización de momentos) tenemos $F_{a,b}(t,s) = G_a(t)h_b(s)$ y $H_{a,b}(t,s) = h_a(t)h_b(s)$, luego

$$F_{a,b}(K_a(z), \chi_b(w)) = G_a(K_a(z))h_b(\chi_b(w)) = z(w+1),$$

y

$$H_{a,b}(\chi_a(z), \chi_b(w)) = h_a(\chi_a(z))h_b(\chi_b(w)) = (z+1)(w+1),$$

esto da

$$T_{a,b}(z,w) = \frac{w+1}{w}\left[1 - \frac{z}{z(w+1)}\right] = 1,$$

y

$$S_{a,b}(z,w) = \frac{z+1}{z}\frac{w+1}{w}\left[1 - \frac{1+z+w}{(z+1)(w+1)}\right] = 1.$$

■

Para el caso de la transformada R, hay una parte que podemos llamar "reducida" y ésta es

$$\tilde{\mathcal{R}}_{a,b}(z,w) = 1 - \frac{zw}{G_{a,b}(K_a(z), K_b(w))},$$

que también tiene un comportamiento trivial bajo los supuestos de la proposición anterior. Esto porque bajo dichas condiciones tenemos $G_{a,b}(z,w) = G_a(z)G_b(w)$ y por tanto

$$G_{a,b}(K_a(z), K_b(w)) = G_a(K_a(z))G_b(K_b(w)) = zw,$$

en cuyo caso $\tilde{\mathcal{R}}_{a,b}(z,w) = 0$.
Los teoremas y resultados de las dos secciones anteriores, correspondientes a las transformadas S y T también tienen pruebas combinatorias y podemos encontrarlas en el artículo de Skoufranis [41].

Capítulo 4

Enfoque combinatorio de la probabilidad bi-libre

En el mismo año que Voiculescu define y desarrolla la teoría de probabilidad bi-libre, sale el artículo [33] de Mastnak y Nica, donde trabajan el lado combinatorio de esa teoría y definen un tipo de cumulantes combinatorios con una fórmula momento-cumulante para un nuevo conjunto de particiones; con esos cumulantes conjeturan que la independencia bi-libre es equivalente a que tales cumulantes combinatorios mixtos se anulen.

A pesar que el trabajo de Mastnak y Nica fue pionero en la parte combinatoria de la probabilidad bi-libre, en este capítulo seguiremos el trabajo de Charlesworth, Nelson y Skoufranis, [17], que además de presentar la parte combinatoria de manera más formal e intuitiva, demuestran que la independencia bi-libre sí es equivalente a que los cumulantes mixtos se anulen, como conjeturaron Mastnak y Nica, y que los cumulantes combinatorios son los cumulantes bi-libres que definió Voiculescu en [53].

Hemos visto que la relación (momentos) entre caras izquierdas (o derechas) de un par bi-libre se traduce en la noción usual de libertad (freeness), la cual queda descrita combinatoriamente en términos de cumulantes y particiones que no se cruzan. Los cumulantes bi-libres interpolan la situación, al considerar momentos con respecto a variables izquierdas y derechas a la vez, codificados por una aplicación χ.

Para esto, se consideran subconjuntos de la látiz de particiones que no se cruzan en el sentido de que ahora no se permite juntar bloques apilados con respecto a dicha aplicación χ.
De manera inesperada las relaciones de Bi-libertad se trasladan al aniquilamiento de cumulantes bi-libres mixtos.
Comenzamos el capítulo estableciendo algo de notación y definiendo los cumulantes combinatorios. Seguido de esto, se dedica una sección a la parte combinatoria formal de nuestro nuevo látiz. Por último con un complemento de Kreweras bi-libre se calculan cumulantes de productos.

4.1 Cumulantes combinatorios

Establezcamos un poco de notación primeramente. Dado

$$\chi : \{1, 2, ..., n\} \to \{l, r\},$$

sea $\{i_1 < ... < i_p\} = \chi^{-1}(l)$ y $\{j_1 < ... < j_{n-p}\} = \chi^{-1}(r)$ y considere $\sigma_\chi \in S_n$, (S_n es el conjunto de funciones biyectivas $\{1, 2, ..., n\} \mapsto \{1, 2, ..., n\}$) definida como

$$\sigma_\chi(k) = \begin{cases} i_k & k \leq p, \\ j_{n+1-k} & k > p. \end{cases}$$

La clase de particiones $\mathcal{P}^{(\chi)}(n) \subset \mathcal{P}(n)$, se define como $\mathcal{P}^{(\chi)}(n) = \{\sigma_\chi \cdot \pi | \pi \in NC(n)\}$, donde la aplicación se aplica a cada bloque de π.

Definición 4.1.1 Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espacio de probabilidad no conmutativo. Si existe una familia de funcionales multilineales

$$(\kappa_\chi : \mathcal{A}^n \to \mathbb{C})_{n \geq 1, \chi : \{1,\ldots,n\} \to \{\ell, r\}},$$

que cumplen la fórmula siguiente

$$\varphi(z_1 \cdots z_n) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}^{(\chi)}(n)} \left(\prod_{V \in \pi} \kappa_{\chi|_V}((z_1, \ldots, z_n)|V) \right),$$

para cada $n \geq 1$, $\chi \in \{\ell, r\}^n$, y $z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{A}$, entonces estos funcionales κ_χ serán llamados (ℓ, r)-cumulantes o *cumulantes combinatorios* de $(\mathcal{A}, \varphi)$.

De hecho la anterior definición se parece a las definiciones que conocemos de cumulantes libres, y fue definida por Mastnak y Nica en [33], el problema ahora es demostrar que esos cumulantes combinatorios y los cumulantes bi-libres que definimos en el capítulo 2 coinciden.

Definición 4.1.2 Sean z' y z'' familias de dos caras en $(\mathcal{A}, \varphi)$. Decimos que z' y z'' son *combinatoriamente bi-libres* si

$$\kappa_\chi \left(z_{\alpha(1)}^{\epsilon_1}, \ldots, z_{\alpha(n)}^{\epsilon_n} \right) = 0,$$

siempre que $\alpha : \{1, \ldots, n\} \to I \coprod J$, $\chi : \{1, \ldots, n\} \to \{\ell, r\}$ es tal que $\alpha^{-1}(I) = \chi^{-1}(\{\ell\})$, y $\epsilon_i \in \{', ''\}^n$ no es constante.

Nótese que la condición $\alpha^{-1}(I) = \chi^{-1}(\{\ell\})$ determina completamente a χ y por tanto podemos usar la notación

$$\kappa_\alpha(z) := \kappa_\chi \left(z_{\alpha(1)}, \ldots, z_{\alpha(n)} \right).$$

Entonces si z' y z'' son combinatoriamente bi-libres, es fácil ver que

$$\kappa_\alpha(z' + z'') = \kappa_\alpha(z') + \kappa_\alpha(z''),$$

i.e, κ_α tiene la propiedad cumulante.

Definición 4.1.3 Para los elementos definidos antes, $\alpha\colon \{1,\dots,n\} \to I \coprod J$, sea $\{i_1 < \cdots < i_p\} = \alpha^{-1}(I)$ y $\{j_1 < \cdots < j_{n-p}\} = \alpha^{-1}(J)$ y consideremos $s_\alpha \in S_n$ definido como

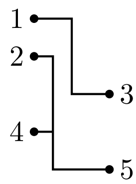
$$s_\alpha(k) = \begin{cases} i_k & \text{si } k \le p, \\ j_{n+1-k} & \text{si } k > p. \end{cases}$$

Decimos que una partición $\pi \in \mathcal{P}(n)$ es *bi-partición que no se cruza* (con respecto a α) si $s_\alpha^{-1} \cdot \pi \in NC(n)$. Denotamos el conjunto de tales particiones por $BNC(\alpha)$. Los elementos mínimo y máximo de $BNC(\alpha)$ son $0_\alpha := s_\alpha \cdot 0_n$ y $1_\alpha := s_\alpha \cdot 1_n$, respectivamente.

Como ejemplo de lo anterior consideremos $\alpha^{-1}(I) = \{1,2,4\}$, $\alpha^{-1}(J) = \{3,5\}$, y

$$\pi = \Big\{\{1,3\},\{2,4,5\}\Big\} = s_\alpha \cdot \Big\{\{1,5\},\{2,3,4\}\Big\},$$

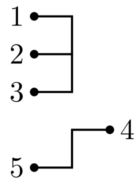
donde la operación $\cdot$ significa que se aplica la operación a cada bloque, entonces el diagrama que no se cruza bi-libre asociado a π es



Por otro lado si hubiéramos tomado otro funcional como $\alpha^{-1}(I) = \{4\}$, $\alpha^{-1}(J) = \{1,2,3,5\}$

$$\pi = \Big\{\{4,5\},\{1,2,3\}\Big\} = s_\alpha \cdot \Big\{\{1,5\},\{2,3,4\}\Big\},$$

y el diagrama es



4.2 Látiz de bi-particiones que no se cruzan

Sean z' y z'' un par bi-libre de familias de dos caras, $\chi : \{1,2,...,n\} \to \{\ell, r\}$ y $\epsilon \in \{','' \}^n$, a este último lo llamamos una *sombra* de la partición. Definimos recursivamente los diagramas $LR(\chi,\epsilon)$: para $n=1$ el diagrama consiste en dos segmentos verticales paralelos con un simple nodo, a la izquierda si $\chi(1)=\ell$ y a la derecha si $\chi(1)=r$; a tal nodo le asignamos la sombra $'$ o $''$ dependiendo del valor ϵ_1. Llamaremos *costillas* a las líneas horizontales que salen de los nodos y *espinas* a las líneas verticales que unen tales costillas. Para $n>1$, definimos $LR(\chi,\epsilon)$ como una extensión de un diagrama $D \in LR(\chi_0,\epsilon_0)$, donde $\chi_0 = \chi\mid_{\{2,\dots,n\}}$ y $\epsilon_0 = (\epsilon_2,...,\epsilon_n)$, al añadir una sombra en un nodo adicional sobre D, a la izquierda si $\chi(1)=\ell$ y a la derecha si $\chi(1)=r$, se extienden las espinas de D al nuevo espacio y si la espina más próxima comparte su sombra entonces se conecta al punto con una costilla, si no se conecta con otra que sí; en caso que ninguna comparta la sombra se deja aislado. Denotamos $LR_k(\chi,\epsilon) \subset LR(\chi,\epsilon)$ a los diagramas con exactamente k cuerdas extendiéndose hacia arriba, $1 \leq k \leq n$.

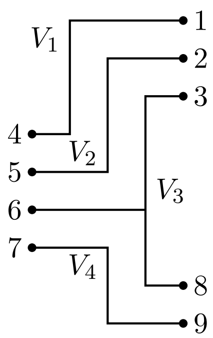
Sean χ y ϵ fijos, como arriba y $D \in LR_0(\chi,\epsilon)$. Sea $\alpha : \{1,2,\ldots,n\} \to I \coprod J$, definimos χ^α como $\chi^\alpha(k) = \ell$ si $\alpha(k) \in I$ y $\chi^\alpha(k) = r$ si $\alpha(k) \in J$. Luego, el conjunto de particiones que obtenemos de $LR_0(\chi,\epsilon)$, lo denotamos $BNC(\alpha,\epsilon)$. Denotamos por $BNC(\chi,\epsilon)$ al conjunto $BNC(\alpha,\epsilon)$, cuando $\chi = \chi^\alpha$.

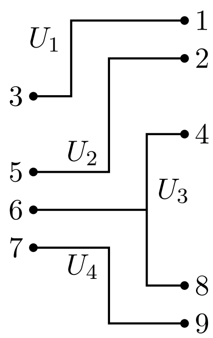
Definición 4.2.1 Sean V y W son bloques de algún $\pi \in BNC(\chi)$. Entonces V y W se dicen *apilados* si $\max(\min(V), \min(W)) \leq \min(\max(V), \max(W))$. En términos del diagrama correspondiente a π, las espinas de V y W no están del todo sobre o debajo una de la otra; existe algún nivel horizontal en que ambas están presentes. Dados bloques V y W, un tercer bloque U *separa* a V de W si apila a ambos, y su espina está entre las espinas de V y W. Nótese que V y W no necesitan estar apiladas entre ellas para tener un separador.

Equivalentemente, U está apilada por ambas V y W, y existe $j,k \in U$ tal que $s_\alpha^{-1}(V) \subseteq [s_\alpha^{-1}(j), s_\alpha^{-1}(k)]$ y $s_\alpha^{-1}(W) \cap [s_\alpha^{-1}(j), s_\alpha^{-1}(k)] = \emptyset$, o viceversa. Dados tres bloques apilados, uno siempre separa a los otros dos.

Finalmente, los bloques apilados V y W se dicen *enredados* si no hay bloque que los separe.

Como ejemplo veamos los siguientes diagramas.





En el primer diagrama, V_2 separa V_1 de V_3, y los tres se apilan entre sí. En el segundo diagrama, U_2 separa U_1 y U_3, pero U_1 y U_3 no están apilados entre ellos.

Definición 4.2.2 Sean $\pi, \sigma \in BNC(\chi)$ es tal que $\pi \leq \sigma$. Decimos que π es un *refinamiento lateral* de σ y escribimos $\pi \leq_{lat} \sigma$ si ningunos dos bloques apilados en π están contenidos en el mismo bloque de σ.

Se puede ver que en el caso en que α sólo va a I o sólo va a J, el refinamiento lateral es el refinamiento en reversa definido en el capítulo 1.

Lema 4.2.3 *Si $\pi \in BNC(\chi,\epsilon)$ entonces bloques apilados de la misma sombra en π deben ser separados. Consecuentemente, si $\sigma \in BNC(\alpha,\epsilon)$ y $\pi \leq \sigma$ entonces $\pi \leq_{lat} \sigma$.*

Los refinamientos laterales corresponden a hacer cortes horizontales a lo largo de las espinas de los bloques de π, entre sus costillas.

Definición 4.2.4 El látiz de *bi-particiones que no se cruzan* es

$$BNC := \bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{\chi:\{1,\ldots,n\} \to \{\ell,r\}} BNC(\chi),$$

donde la estructura de látiz de $BNC(\chi)$ es como arriba.

Siempre que hablamos de látices es natural hablar de un álgebra de funciones asociadas, llamada Álgebra de Incidencia.

Definición 4.2.5 El *álgebra de incidencia de* BNC, denotada por $IA(BNC)$, son todas las funciones de la forma

$$f : \bigcup_{n \geq 1} \left(\bigcup_{\chi:\{1,\ldots,n\} \to \{\ell,r\}} BNC(\chi) \times BNC(\chi) \right) \to \mathbb{C},$$

tal que $f(\pi, \sigma) = 0$ si $\pi \not\leq \sigma$ equipada con la definición usual de suma y la convolución (producto) definido como

$$(f * g)(\pi, \sigma) = \sum_{\pi \leq \rho \leq \sigma} f(\pi, \rho) g(\rho, \sigma),$$

para todo $\pi, \sigma \in BNC(\chi)$ y $f, g \in IA(BNC)$.

4.2.1 Inversión de Möbius en BNC

Con el fin de construir funciones multiplicativas en BNC, es necesario identificar la estructura de látiz de un intervalo como producto de intervalos completos.

Proposición 4.2.6 *Sea* $\pi, \sigma \in BNC(\chi)$ *tal que* $\pi \leq \sigma$. *El intervalo*

$$[\pi, \sigma] = \{\rho \in BNC(\chi) \, : \, \pi \leq_{lat} \rho \leq_{lat} \sigma\},$$

puede asociarse al producto de látices completos

$$\prod_{j=1}^{k} BNC(\beta_k),$$

para algún $\beta_k : \{1, \ldots, m_k\} \to \{\ell, r\}$ *así la estructura de látiz se conserva.*

Gracias a la proposición anterior podemos definir funciones multiplicativas de la siguiente manera.

Definición 4.2.7 Una función $f \in IA(BNC)$ se dice *multiplicativa* si siempre que $\pi, \sigma \in BNC(\chi)$ es tal que

$$[\pi, \sigma] \leftrightarrow \prod_{j=1}^{k} BNC(\beta_k),$$

donde la doble flecha se refiere a lo discutido en la proposición anterior, para algún $\beta_k : \{1, \ldots, m_k\} \to$

$\{\ell, r\}$, entonces

$$f(\pi, \sigma) = \prod_{j=1}^{k} f(0_{\beta_k}, 1_{\beta_k}).$$

Para una función multiplicativa $f \in IA(BNC)$, llamaremos a la colección $\{f([0_\chi, 1_\chi]) : n \geq 1, \chi : \{1, \ldots, n\} \to \{\ell, r\}\} \subseteq \mathbb{C}$ la *red multiplicativa* asociada a f. Nótese que para cualquier red $\Lambda = \{a_\chi : n \geq 1, \chi : \{1, \ldots, n\} \to \{\ell, r\}\} \subseteq \mathbb{C}$ hay exactamente una función multiplicativa f con red multiplicativa Λ.

Lema 4.2.8 *Si $f, g \in IA(BNC)$ son multiplicativas, entonces $f * g$ es multiplicativa.*

Consideremos ahora tres funciones multiplicativas muy importantes en la teoría de inversión de Möbius.

$$\delta_{BNC}(\pi, \sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi = \sigma, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

la cual es llamada la función delta en BNC y es el elemento identidad en $IA(BNC)$,

$$\zeta_{BNC}(\pi, \sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi \leq \sigma, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

que es llamada la función zeta en BNC, y μ_{BNC} que es llamada la función de Möbius en BNC y se define como

$$\mu_{BNC} * \zeta_{BNC} = \zeta_{BNC} * \mu_{BNC} = \delta_{BNC},$$

es claro que para ζ_{BNC} se puede construir una inversa izquierda y derecha (y por tanto bilateral) recursivamente. Es claro que δ_{BNC} es multiplicativa con $\delta_{BNC}(0_\chi, 1_\chi)$ igual a uno si $n = 1$ y cero otro caso, y ζ_{BNC} es multiplicativa con $\zeta_{BNC}(0_\chi, 1_\chi) = 1$ para todo χ. Además, se puede verificar que μ_{BNC} es multiplicativa y para cada $\pi, \sigma \in BNC(\chi)$

$$\mu_{BNC}(\pi, \sigma) = \mu(s_\chi^{-1} \cdot \pi, s_\chi^{-1} \cdot \sigma),$$

donde μ es la función de Möbius del látiz $NC(n)$.

Sean $T_1, \ldots, T_n$ en un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \varphi)$ y $\pi \in BNC(\chi)$ donde $\chi : \{1, \ldots, n\} \to \{\ell, r\}$ y $V_t = \{k_{t,1} < \cdots < k_{t,m_t}\}$ para $t \in \{1, \ldots, k\}$ que son los bloques de π, definimos

$$\varphi_\pi(T_1, \ldots, T_n) := \prod_{t=1}^{k} \varphi(T_{k_{t,1}} \cdots T_{k_{t,m_t}}),$$

y

$$\kappa_\pi(T_1, \ldots, T_n) := \sum_{\sigma \in BNC(\chi), \sigma \leq \pi} \varphi_\sigma(T_1, \ldots, T_n) \mu_{BNC}(\sigma, \pi),$$

donde $\varphi_\sigma(T_1, \ldots, T_n) = \prod_{V=\{i_1, \ldots, i_n\} \in \sigma} \varphi(T_{i_1} \cdots T_{i_n})$.Se puede probar que

$$\kappa_\pi(T_1, \ldots, T_n) = \prod_{t=1}^{k} \kappa_{\pi|_{V_t}}(T_{k_{t,1}} \cdots T_{k_{t,m_t}}),$$

donde $\kappa_{\pi|_{V_t}}$ debe ser pensado como la partición de un sólo bloque inducida por los bloques V_t de

π, y

$$\varphi(T_1 \dots T_n) = \sum_{\pi \in BNC(\chi)} \kappa_\pi(T_1, \dots, T_n).$$

En particular, $\kappa_{1_\chi} = \kappa_\chi$ son las funciones cumulantes bi-libres combinatorios.

Para una familia de dos caras $z = ((z_i)_{i\in I}, (z_j)_{j\in J})$, $\alpha : \{1, \dots, n\} \to I \coprod J$, y $\pi \in BNC(\alpha)$ denotamos

$$\varphi_\pi(z) := \varphi_\pi(z_{\alpha(1)}, \dots, z_{\alpha(n)}) \qquad \text{y} \qquad \kappa_\pi(z) := \kappa_\pi(z_{\alpha(1)}, \dots, z_{\alpha(n)}).$$

En particular, $\varphi_{1_\alpha}(z) = \varphi_\alpha(z)$ y $\kappa_{1_\alpha}(z) = \kappa_\alpha(z)$, donde cada cara consiste de un sólo elemento, digamos z_ℓ y z_r, definimos las cantidades de arriba para $\chi : \{1, \dots, n\} \to \{\ell, r\}$ remplazando α. En este caso sean $m_z, \kappa_z \in IA(BNC)$ las funciones multiplicativas con redes multiplicativas $(\varphi_\chi(z))_\chi$ y $(\kappa_\chi(z))_\chi$, respectivamente. Llamamos a m_z la *función momento* y a κ_z la *función cumulante bi-libre*. Así las fórmulas $m_z * \mu_{BNC} = \kappa_z$ y $\kappa_z * \zeta_{BNC} = m_z$ se tienen.

4.3 Principales resultados

A continuación presentamos un resultado cuya demostración puede encontrarse en [17] y es muy útil para demostrar el teorema principal del capítulo.

Proposición 4.3.1 *1. Sean z' y z'' un par de familias de dos caras en el espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \varphi)$. Entonces z' y z'' son bi-libres si y sólo si para toda función $\alpha\colon \{1, \dots, n\} \to I \coprod J$ y $\epsilon \in \{','' \}^n$ tenemos*

$$\varphi_\alpha(z^\epsilon) = \sum_{\pi \in BNC(\alpha)} \left[\sum_{\substack{\sigma \in BNC(\alpha,\epsilon) \\ \sigma \geq_{lat} \pi}} (-1)^{|\pi|-|\sigma|} \right] \varphi_\pi(z^\epsilon), \tag{4.1}$$

donde $z^\epsilon = \left(z^{\epsilon_1}_{\alpha(1)}, \dots, z^{\epsilon_n}_{\alpha(n)} \right)$.

2. Sea $\chi : \{1, \dots, n\} \to \{\ell, r\}$ y $\epsilon \in \{','' \}^n$. Entonces para todo $\pi \in BNC(\chi)$ tal que $\pi \leq \epsilon$,

$$\sum_{\substack{\sigma \in BNC(\chi,\epsilon) \\ \sigma \geq_{lat} \pi}} (-1)^{|\pi|-|\sigma|} = \sum_{\substack{\sigma \in BNC(\chi) \\ \pi \leq \sigma \leq \epsilon}} \mu_{BNC}(\pi, \sigma).$$

3. Sean z' y z'' un par de familias de dos caras en $(\mathcal{A}, \varphi)$. Entonces z' y z'' son bi-libres si y sólo si para toda función $\alpha\colon \{1, \dots, n\} \to I \coprod J$ y $\epsilon \in \{','' \}^n$ tenemos

$$\varphi_\alpha(z^\epsilon) = \sum_{\pi \in BNC(\alpha)} \left[\sum_{\substack{\sigma \in BNC(\alpha) \\ \pi \leq \sigma \leq \epsilon}} \mu_{BNC}(\pi, \sigma) \right] \varphi_\pi(z^\epsilon), \tag{4.2}$$

donde $z^\epsilon = \left(z^{\epsilon_1}_{\alpha(1)}, \dots, z^{\epsilon_n}_{\alpha(n)} \right)$.

Estamos listos para probar el teorema principal de este capítulo.

Teorema 4.3.2 *[17, Teo. 4.3.1] Sean $z' = ((z'_i)_{i\in I}, (z'_j)_{j\in J})$ y $z'' = ((z''_i)_{i\in I}, (z''_j)_{j\in J})$ un par de familias de dos caras en un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \varphi)$. Entonces z' y z'' son bi-libres si y sólo si son combinatoriamente bi-libres.*

Demostración. Supongamos que z' y z'' son bi-libres, y fijemos $\epsilon \in \{','' \}^n$. Por la proposición anterior, para $\alpha : \{1, \dots, n\} \to I \coprod J$ tenemos

$$\varphi_\alpha (z^\epsilon) = \sum_{\pi\in BNC(\alpha)} \left(\sum_{\substack{\sigma\in BNC(\alpha)\\ \pi\leq\sigma\leq\epsilon}} \mu_{BNC}(\pi, \sigma) \right) \varphi_\pi (z^\epsilon) .$$

Por tanto

$$\varphi_\alpha (z^\epsilon) = \sum_{\substack{\sigma\in BNC(\alpha)\\ \sigma\leq\epsilon}} \kappa_\sigma (z^\epsilon) .$$

Usando esa fórmula, procedemos inductivamente para mostrar que $\kappa_\sigma (z^\epsilon) = 0$ si $\sigma \in BNC(\alpha)$ y $\sigma \nleq \epsilon$. El caso base, cuando $n = 1$ es inmediato.

Para el caso base, supongamos $n = 2$ y $\epsilon_1 = \ '$ y $\epsilon_2 = \ ''$ (la otra elección de ϵ es análoga). Entonces, para cada $\alpha : \{1, 2\} \to I \coprod J$ con $\alpha(1) \in I \coprod J$ y $\alpha(2) \in I \coprod J$,

$$\kappa_{0_\alpha} \left(z^{\epsilon(1)}_{\alpha(1)}, z^{\epsilon(2)}_{\alpha(2)} \right) + \kappa_{1_\alpha} \left(z^{\epsilon(1)}_{\alpha(1)}, z^{\epsilon(2)}_{\alpha(2)} \right) = \varphi \left(z^{\epsilon(1)}_{\alpha(1)} z^{\epsilon(2)}_{\alpha(2)} \right) = \kappa_{0_\alpha} \left(z^{\epsilon(1)}_{\alpha(1)}, z^{\epsilon(2)}_{\alpha(2)} \right),$$

cuando $0_\alpha \leq \epsilon$ mientras $1_\alpha \nleq \epsilon$. Así $R_{1_\alpha} \left(z^{\epsilon(1)}_{\alpha(1)}, z^{\epsilon(2)}_{\alpha(2)} \right) = 0$ y el caso base está completo.

Como hipótesis de inducción, supongamos que el resultado se tiene para cada $\beta : \{1, \dots, k\} \to I \coprod J$ con $k < n$. Sea $\alpha : \{1, \dots, n\} \to I \coprod J$ Suponga que ϵ no es constante (en particular, $1_\alpha \nleq \epsilon$). Entonces

$$\sum_{\sigma\in BNC(\alpha)} \kappa_\sigma (z^\epsilon) = \varphi_\alpha (z^\epsilon) = \sum_{\substack{\sigma\in BNC(\alpha)\\ \sigma\leq\epsilon}} \kappa_\sigma (z^\epsilon) .$$

Por inducción, $\kappa_\sigma (z^\epsilon) = 0$ si $\sigma \in BNC(\alpha) \setminus \{1_\alpha\}$ y $\sigma \nleq \epsilon$. En consecuencia

$$\sum_{\sigma\in BNC(\alpha)} \kappa_\sigma (z^\epsilon) = \kappa_{1_\alpha} (z^\epsilon) + \sum_{\substack{\sigma\in BNC(\alpha)\\ \sigma\leq\epsilon}} \kappa_\sigma (z^\epsilon) .$$

Combinando esas dos ecuaciones tenemos $\kappa_{1_\alpha} (z^\epsilon) = 0$ que completa el paso inductivo.

Ahora supongamos que z' y z'' son combinatoriamente bi-libres. Entonces para cada α :

$\{1, \ldots, n\} \to I \coprod J$ y $\epsilon \in \{', ''\}^n$,

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha\left(z^\epsilon\right) &= \sum_{\sigma \in BNC(\alpha)} \kappa_\sigma\left(z^\epsilon\right) = \sum_{\substack{\sigma \in BNC(\alpha)\\ \sigma \leq \epsilon}} \kappa_\sigma\left(z^\epsilon\right) \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in BNC(\alpha)\\ \sigma \leq \epsilon}} \sum_{\substack{\pi \in BNC(\alpha)\\ \pi \leq \sigma}} \varphi_\pi\left(z^\epsilon\right) \mu_{BNC}(\pi, \sigma) \\ &= \sum_{\pi \in BNC(\alpha)} \left(\sum_{\substack{\sigma \in BNC(\alpha)\\ \pi \leq \sigma \leq \epsilon}} \mu_{BNC}(\pi, \sigma) \right) \varphi_\pi\left(z^\epsilon\right).\end{aligned}$$

Así la proposición anterior implica que z' y z'' son bi-libres.

■

Ya demostramos que la independencia bi-libre y la independencia bi-libre combinatoria son equivalentes. Ahora demostremos que los (ℓ, r)-cumulantes combinatorios y los cumulantes del capítulo 2, también coinciden.

Proposición 4.3.3 *Sea* $\alpha\colon \{1, \ldots, n\} \to I \coprod J$*. Para cada* $\epsilon \in \{', ''\}^n$ *definimos un polinomio* $P_{\alpha,\epsilon}$ *en las indeterminadas* X'_K *y* X''_K *etiquetadas por los conjuntos no vacíos* $K \subset \{1, \ldots, n\}$ *por la fórmula*

$$P_{\alpha,\epsilon} := \sum_{\pi \in BNC(\alpha,\epsilon)} \left[\sum_{\substack{\sigma \in BNC(\alpha)\\ \pi \leq \sigma \leq \epsilon}} \mu_{BNC}(\pi, \sigma) \right] \prod_{V \in \pi} X_V^{\epsilon(V)}.$$

Entonces para un par de familias de dos caras bi-libre z' *y* z'' *en* $(\mathcal{A}, \varphi)$ *tenemos*

$$\varphi_\alpha(z^\epsilon) = P_{\alpha,\epsilon}(z', z''),$$

donde $P_{\alpha,\epsilon}(z', z'')$ *se define evaluando* $P_{\alpha,\epsilon}$ *en* $X^\delta_{\{k_1 < \cdots < k_r\}} = \varphi(z^\delta_{\alpha(k_1)} \cdots z^\delta_{\alpha(k_r)})$, $\delta \in \{', ''\}$.

Mas aún, si definimos Q_α *como la suma de los* $P_{\alpha,\epsilon}$ *sobre todos las sombras posibles tenemos*

$$Q_\alpha = X'_{\{1,\ldots,n\}} + X''_{\{1,\ldots,n\}} + \sum P_{\alpha,\epsilon},$$

donde la suma es sobre todas las sombras no constantes ϵ*, y*

$$\varphi_\alpha(z' + z'') = Q_\alpha(z', z''),$$

donde $Q_\alpha(z', z'')$ *es* Q_α *evaluada en el mismo punto que los* $P_{\alpha,\epsilon}$ *de arriba.*

Demostración. La primera parte es inmediata de los resultados anteriores. La afirmación restante $Q_\alpha(z', z'')$ también es inmediata cuando expandimos el producto en el lado izquierdo. Todo lo que resta probar es que

$$Q_\alpha = X'_{\{1,\ldots,n\}} + X''_{\{1,\ldots,n\}} + \sum P_{\alpha,\epsilon},$$

que es equivalente a decir $P_{\alpha,\epsilon} = X^{\delta}_{\{1,\dots,n\}}$ donde ϵ es la sombra constante $\epsilon = (\delta, \dots, \delta)$, $\delta \in \{','' \}$.

La sombra induce la partición completa 1_α, y por tanto

$$\sum_{\substack{\sigma \in BNC(\alpha) \\ \pi \leq \sigma \leq \epsilon}} \mu_{BNC}(\pi, \sigma) = \sum_{\substack{\sigma \in BNC(\alpha) \\ \pi \leq \sigma \leq 1_\alpha}} \mu_{BNC}(\pi, \sigma) = \delta_{BNC}(\pi, 1_\alpha).$$

Entonces el único término de $P_{\alpha,\epsilon}$ con coeficiente no cero es el correspondiente a $\pi = 1_\alpha$. ■

Proposición 4.3.4 *Para todo* $\alpha\colon \{1, \dots, n\} \to I \coprod J$*, defina recursivamente los polinomios* R_α *en las incógnitas* X_K *etiquetadas por los conjuntos no vacíos* $K \subseteq \{1, \dots, n\}$ *por la fórmula*

$$R_\alpha = \sum_{\pi \in BNC(\alpha)} \mu_{BNC}(\pi, 1_\alpha) \prod_{V \in \pi} X_V.$$

Si X_K *es de grado* $|K|$*, entonces* R_α *es homogéneo con grado* n*.*

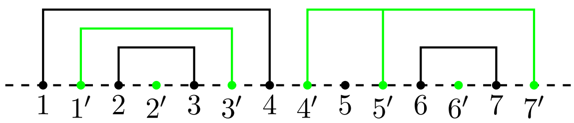
Para z *una familia de dos caras en* $(\mathcal{A}, \varphi)$*, si* $R_\alpha(z)$ *denota* R_α *evaluado en los* $X_{\{k_1 < \cdots < k_r\}} = \varphi(z_{\alpha(k_1)} \cdots z_{\alpha(k_r)})$ *entonces* $R_\alpha(z) = \kappa_\alpha(z)$*. Mas aún, si* z' *and* z'' *son bi-libres en* $(\mathcal{A}, \varphi)$ *entonces* $R_\alpha(z' + z'') = R_\alpha(z') + R_\alpha(z'')$*; i.e,* R_α *tiene la propiedad cumulante.*

Demostración. Vemos que $R_\alpha(z)$ y $\kappa_\alpha(z)$ son iguales. Entonces R_α tiene la propiedad cumulante simplemente porque κ_α la tiene. ■

Los polinomios $P_{\alpha,\epsilon}$, Q_α, y R_α son precisamente los polinomios universales, por lo anterior.

4.4 Cumulantes de la convolución multiplicativa bi-libre

Recordemos que si $\pi = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5\}, \{6, 7\}\}$, entonces el complemento de Kreweras (libre) $Kr(\pi) = \{\{1, 3\}, \{2\}, \{4, 5, 7\}, \{6\}\}$ es



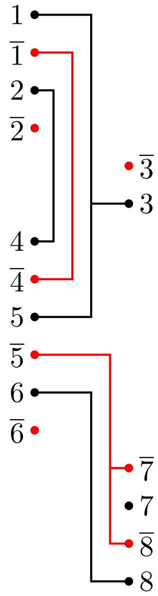
Ahora definamos el complemento de Kreweras bi-libre.

Definición 4.4.1 Para cada $\chi : \{1, \dots, n\} \to I \coprod J$ y $\pi \in BNC(\chi)$, el *complemento de Kreweras* de π, denotado por $K_{BNC}(\pi)$, es el elemento de $BNC(\chi)$ obtenido al aplicar s_χ al complemento de Kreweras en $NC(n)$ de $s_\chi^{-1} \cdot \pi$; explícitamente.

$$K_{BNC}(\pi) = s_\chi \cdot K_{NC}(s_\chi^{-1} \cdot \pi).$$

Nótese que $K_{BNC}(\pi)$ puede obtenerse tomando el diagrama correspondiente a π, colocando un nodo debajo de cada nodo izquierdo y por encima de cada nodo derecho de π, y dibujando el diagrama de partición que no se cruza bi-libre más grande en los nuevos nodos. Veamos un ejemplo de esto.

Ejemplo 4.4.2 *En el siguiente diagrama, si* π *es la bi-partición que no se cruza dibujada sobre los números* $1, 2, ..., 8$*, entonces* $K_{BNC}(\pi)$ *es la bi-partición que no se cruza dibujada sobre los números* *con barra superior* $\bar{1}, \bar{2}, ..., \bar{8}$.



Como K_{NC} es un ordenamiento en reversa y s_χ preserva el orden, K_{BNC} es una biyección de orden en reversa. Así $[\pi, 1_\alpha] \simeq [K_{BNC}(1_\alpha), K_{BNC}(\pi)] = [0_\alpha, K_{BNC}(\pi)]$ para todo $\pi \in BNC(\alpha)$. Así, si $f, g \in IA(BNC)$ son funciones multiplicativas, entonces

$$(f * g)(0_\alpha, 1_\alpha) = \sum_{\pi \in BNC(\alpha)} f(0_\alpha, \pi) g(0_\alpha, K_{BNC}(\pi)) = (g * f)(0_\alpha, 1_\alpha),$$

y por tanto $f * g = g * f$.

Ahora usamos el complemento de Kreweras bi-libre, tal como en el teorema 1.3.6, para examinar los cumulantes bi-libres de una familia de dos caras generada por productos de un par bi-libre de familias de dos caras.

Teorema 4.4.3 *[17, Teo. 5.2.1] Sean* $z' = (\{z'_\ell\}, \{z'_r\})$ *y* $z'' = (\{z''_\ell\}, \{z''_r\})$ *una familia de dos caras bi-libre y sea* $z = (\{z'_\ell z''_\ell\}, \{z''_r z'_r\})$. *Entonces*

$$\kappa_\chi(z) = \sum_{\pi \in BNC(\chi)} \kappa_\pi(z') \kappa_{K_{BNC}(\pi)}(z''),$$

para todo $\chi : \{1, \ldots, n\} \to \{\ell, r\}$.

Demostración. Recordemos la definición de función momento y función cumulante bi-libre m_x y κ_x, éstas están únicamente determinadas por los momentos y cumulantes de la familia (x), respectivamente. Como los cumulantes bi-libres son multiplicativos y por la estructura de la convolución multiplicativa de las funciones anteriores, es suficiente probar que $\kappa_z = \kappa_{z'} * \kappa_{z''}$. Usando las relaciones $m_z * \mu_{BNC} = \kappa_z$ y $\kappa_z * \zeta_{BNC} = m_z$, es suficiente demostrar $m_z = \kappa_{z'} * m_{z''}$.

Supongamos que $\chi : \{1, \ldots, n\} \to \{\ell, r\}$. Sea $\beta : \{1, \ldots, 2n\} \to \{\ell, r\}$ dado por $\beta(2k-1) = \beta(2k) = \chi(k)$. Tómese $\epsilon \in \{', ''\}^{2n}$ tal que $\epsilon_{2k-1} = \ '$ y $\epsilon_{2k} = \ ''$ si $k \in \chi^{-1}(\ell)$, y lo opuesto si

$k \in \chi^{-1}(r)$. Entonces

$$\begin{aligned}
m_z(0_\chi, 1_\chi) &= \varphi_\chi(z) = \varphi\left(z_{\chi(1)}^{\epsilon_1} z_{\chi(1)}^{\epsilon_2} \cdots z_{\chi(n)}^{\epsilon_{2n-1}} z_{\chi(n)}^{\epsilon_{2n}}\right) \\
&= \varphi\left(z_{\beta(1)}^{\epsilon_1} z_{\beta(2)}^{\epsilon_2} \cdots z_{\beta(2n-1)}^{\epsilon_{2n-1}} z_{\beta(2n)}^{\epsilon_{2n}}\right) \\
&= \sum_{\pi \in BNC(\beta,\epsilon)} \kappa_\pi^{(\beta)}(z^\epsilon).
\end{aligned}$$

Pero $\kappa_{BNC}(\pi) = S_\chi \cdot \kappa_{NC}(s_\chi^{-1} \cdot \pi)$, entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{\pi \in BNC(\beta,\epsilon)} \kappa_\pi^{(\beta)}(z^\epsilon) \\
&= \sum_{\pi_1 \in BNC(\chi)} \kappa_{\pi_1}(z') \sum_{\substack{\pi_2 \in BNC(\chi) \\ \pi_2 \leq K_{BNC}(\pi_1)}} \kappa_{\pi_2}(z'') \\
&= \sum_{\pi_1 \in BNC(\chi)} \kappa_{\pi_1}(z') \varphi_{K_{BNC}(\pi_1)}(z'') \\
&= (\kappa_{z'} * m_{z''})(0_\chi, 1_\chi),
\end{aligned}$$

y como m_z y $\kappa_{z'} * m_{z''}$ son funciones multiplicativas en todos los intervalos de BNC, se tiene el resultado. ■

Capítulo 5

Divisibilidad infinita y procesos de Lévy bi-libres

El presente capítulo aborda el tema de divisibilidad infinita bi-libre. En probabilidad clásica y libre, las distribuciones infinitamente divisibles aparecen como una generalización del teorema de límite central: son las distribuciones límite de sumas de variables aleatorias independientes o libres dentro de un arreglo triangular. La pregunta central que trataremos de resolver en este capítulo es la siguiente

Problema Central 5.0.1 *Sea $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas en $\mathbb{R}^2$ y $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de enteros positivos $k_n \to \infty$, y supongamos que cada μ_n es la distribución común en el sentido analítico de la sucesión finita $(a_{n1}, b_{n1}), (a_{n2}, b_{n2}), ..., (a_{nk_n}, b_{nk_n})$ de variables de dos caras bi-libres idénticamente distribuidas.* ***¿Cuál es la clase de todas las posibles distribuciones límite para la suma:***

$$S_n = (a_{n1}, b_{n1}) + (a_{n2}, b_{n2}), ... + (a_{nk_n}, b_{nk_n}) = (\sum_{j=1}^{k_n} a_{nj}, \sum_{j=1}^{k_n} b_{nj}),$$

y cuáles son las condiciones para que la ley (distribución) de S_n converge a una distribución límite específica?*.*

Para responder a esa pregunta, el capítulo comienza con unos teoremas límite y la definición de distribuciones infinitamente divisibles. Seguido de esto presentamos la versión más simple de la representación de Lévy-Hincin para la transformada R de distribuciones con soporte compacto, la cuál luego será generalizada para medidas de probabilidad en $\mathbb{R}^2$. Después de una discusión sobre transformadas R infinitamente divisibles, presentamos algunos ejemplos importantes y algunas caracterizaciones importantes. Finalizamos el capítulo exponiendo el tema de procesos de Lévy bi-libres.

5.1 Teoremas límite

Si (a, b) es una variable de dos caras en un C^*-espacio de probabilidad $(\mathcal{A}, \varphi)$, entonces los cumulantes bi-libres κ_n^χ de (a, b) dependen en general (como vimos en el capítulo anterior) de la aplicación

$\chi : [n] := \{1, 2, ..., n\} \to \{l, r\}$. En la mayor parte de éste capítulo estaremos interesados en el caso en que a, b son autoadjuntas y conmutan (caso bipartito); en tal caso, los cumulantes bi-libres son reales y κ_n^χ depende de χ pero sólo de $|\chi^{-1}(\{l\})|$ y $|\chi^{-1}(\{r\})|$, más aún la conmutatividad de a y b implica que todo cumulante bi-libre de (a, b) es en realidad un "cumulante libre especial", esto se aclara en el siguiente lema.

Lema 5.1.1 *Sea (a, b) una variable de dos caras en un C^*-espacio de probabilidad $(\mathcal{A}, \varphi)$ tal que $a = a^*$, $b = b^*$ y $[a, b] = 0$. Denotemos por $\kappa_{m,n}(a, b)$ a los siguientes cumulantes libres*

$$\kappa_{m,n}(a, b) = \kappa_{m+n}(\underbrace{a, ..., a}_{m \text{ veces}}, \underbrace{b, ..., b}_{n \text{ veces}}),$$

y los cumulantes bi-libres

$$\kappa_N^\chi(a, b) = \kappa_N^\chi(c_{\chi(1)}, ..., c_{\chi(N)}),$$

donde $\chi : [N] \to \{l, r\}$, $c_l = a$, $c_r = b$. Entonces, $\kappa_{m,n}(a, b) = \kappa_{m+n}^\chi(a, b)$ para todo $\chi : [m + n] \to \{l, r\}$ tal que $|\chi^{-1}(\{l\})| = m$ y $|\chi^{-1}(\{r\})| = n$.

Demostración.

Por las fórmulas momento-cumulante (libre y bi-libre), tenemos

$$\kappa_{m,n}(a, b) = \sum_{\pi \in NC(m+n)} \varphi_\pi(\underbrace{a, ..., a}_{m \text{ veces}}, \underbrace{b, ..., b}_{n \text{ veces}})\mu(\pi, \hat{1}_{m+n}),$$

y

$$\kappa_{m+n}^\chi(a, b) = \sum_{\pi \in BNC_\chi(m+n)} \varphi_\pi(c_{\chi(1)}, ..., c_{\chi(m+n)})\mu_\chi(\pi, \hat{1}_{m+n}),$$

donde μ y μ_χ denotan las funciones de Möbius en los látices $NC(m + n)$ y $BNC_\chi(m + n)$, respectivamente. Para cada partición $\pi \in NC(m + n)$, el diagrama correspondiente a la bipartición $\tilde{\pi} = \sigma_\chi \cdot \pi \in BNC_\chi(m + n)$ bajo la biyección $\sigma_\chi : NC(m + n) \to BNC_\chi(m + n)$ se obtiene re-etiquetando los números $1, ..., m + n$ en el diagrama de π como $i_1, ..., i_m, j_n, ..., j_1$ donde $\{i_1 < ... < i_m\} = \chi^{-1}(\{l\})$ y $\{j_1 < ... < j_n\} = \chi^{-1}(\{r\})$. Como a y b conmutan, tenemos

$$\varphi_\pi(\underbrace{a, ..., a}_{m \text{ veces}}, \underbrace{b, ..., b}_{n \text{ veces}}) = \varphi_{\tilde{\pi}}(c_{\chi(1)}, ..., c_{\chi(m+n)}),$$

para todo $\pi \in NC(m + n)$. Más aún, como

$$\mu_\chi(\tilde{\pi}, \hat{1}_{m+n}) = \mu(\sigma_\chi^{-1} \cdot \tilde{\pi}, \hat{1}_{m+n}) = \mu(\pi, \hat{1}_{m+n}),$$

para cada $\tilde{\pi} \in BNC_\chi(m + n)$, se sigue el resultado. ■

Antes de enunciar y demostrar nuestro primer teorema límite necesitamos el siguiente lema.

Lema 5.1.2 *Para cada $N \in \mathbb{N}$, sea $(\mathcal{A}_N, \varphi_N)$ un espacio de probabilidad no conmutativo con funcionales cumulantes κ^N. Sea (a_N, b_N) una variable de dos caras en $(\mathcal{A}_N, \varphi_N)$, tal que $[a_N, b_N] = 0$; entonces, los siguientes enunciados son equivalentes.*

1) Para todo $m, n \geq 0$ con $m + n \geq 1$, los límites $\lim_{N\to\infty} N \cdot \varphi_N(a_N^m b_N^n)$ *existe.*

2) Para todo $m, n \geq 0$ con $m + n \geq 1$, los límites $\lim_{N\to\infty} N \cdot \kappa_{m,n}^N(a_N, b_N)$ *existe.*

Y más aún, si 1) y 2) se cumplen, entonces tales límites coinciden.

Demostración. Por las fórmulas momento-cumulante, tenemos

$$\lim_{N\to\infty} N \cdot \varphi_N(a_N^m b_N^n) = \lim_{N\to\infty} N \cdot \sum_{\pi \in NC(m+n)} \kappa_\pi^N(a_N, b_N),$$

y

$$\lim_{N\to\infty} N \cdot \kappa_{m,n}^N(a_N, b_N) = \lim_{N\to\infty} N \cdot \sum_{\pi \in NC(m+n)} (\varphi_N)_\pi^N(a_N, b_N)\mu(\pi, \hat{1}_{m+n}).$$

Si el primer enunciado es cierto entonces los únicos términos no cero del lado derecho de la segunda ecuación corresponde a $\pi = \hat{1}_{m+n}$. Análogamente si el segundo enunciado es cierto los únicos términos no cero del lado derecho de la primera ecuación corresponde a $\pi = \hat{1}_{m+n}$. ■

- Diremos que un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \varphi)$ es bipartito para referirnos a que cada variable de dos caras que consideremos en él será bipartita.
- Una sucesión de variables de dos caras $\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ cada una en un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}_n, \varphi_n)$ converge en distribución a (a, b) en un espacio de probabilidad $(\mathcal{A}, \varphi)$ y escribimos $(a_n, b_n) \xrightarrow{dist} (a, b)$ si $\lim_{n\to\infty} \varphi_n((a_n)^m, (b_n)^k) = \varphi(a^m, b^k)$ para todo $m, k \in \mathbb{N}$.

Teorema 5.1.3 *[25, Teo. 3.1] Para cada $N \in \mathbb{N}$, sean $\{(a_{N;k}, b_{N;k})\}_{k=1}^N$ variables de dos caras en algún espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}_N, \varphi_N)$. Supongamos que $\mathcal{A}_N$ es bipartito y las variables $(a_{N,1}, b_{N,1}), ..., (a_{N,N}, b_{N,N})$ son bi-libres e idénticamente distribuidas. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. Existe una variable de dos caras (a, b) en algún espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \varphi)$ tal que $[a, b] = 0$ y

$$(\sum_{k=1}^N a_{N,k}, \sum_{k=1}^N b_{N,k}) \xrightarrow{dist} (a, b),$$

2. Para todo $m, n \geq 0$ con $m + n \geq 1$, el límite $\lim_{N\to\infty} N \cdot \varphi_N(a_{N;k}^m b_{N;k}^n)$ *existe y es independiente de k.*

Mas aún, si las afirmaciones se cumplen, entonces los cumulantes bi-libres de (a, b) están dados por

$$\kappa_{m+n}^\chi(a, b) = \lim_{N\to\infty} N \cdot \varphi_N(a_{N;k}^m b_{N;k}^n),$$

donde $\chi : [m + n] \to \{l, r\}$ satisface $|\chi^{-1}(\{l\})| = m$ y $|\chi^{-1}(\{r\})| = n$.

Demostración. Supongamos que 1. se cumple, denotemos por $\kappa^{N\chi}$ los funcionales cumulantes de $(\mathcal{A}_N, \varphi_N)$. Para $n, m \geq 0,\ n+m \geq 1$, tenemos

$$\begin{aligned}\varphi(a^m b^n) &= \lim_{N\to\infty} \varphi_N \left[(\sum_{k=1}^N a_{N;k})^m (\sum_{k=1}^N b_{N;k})^n \right] \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{r(1),\ldots,r(m),\\ s(1),\ldots,s(n)=1}}^N \varphi_N(a_{N;r(1)} \cdots a_{N;r(m)} b_{N;s(1)} \cdots b_{N;s(n)}) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{r(1),\ldots,r(m),\\ s(1),\ldots,s(n)=1}}^N \sum_{\tau \in BNC_\chi(m+n)} \kappa_\tau^{N\chi}(a_{N;r(1)}, \ldots, a_{N;r(m)}, b_{N;s(1)}, \ldots, b_{N;s(n)}) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{\tau\in BNC_\chi(m+n)} N^{|\tau|} \cdot \kappa_\tau^{N\chi}(a_{N;k}, b_{N;k}).\end{aligned}$$

Como el último límite no depende de k, sólo basta probar que $\lim_{N\to\infty} N^{|\tau|} \cdot \kappa_\tau^{N\chi}(a_{N;k}, b_{N;k})$ existe para todo $\tau \in BNC_\chi(m+n)$, porque tomando el caso $\tau = \hat{1}_{m+n}$ y por los lemas 5.1.1 y 5.1.2 se tendrá lo deseado. Procedemos entonces por inducción sobre m y n. Si $m=1$ y $n=0$

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} N \cdot \kappa_1^N(a_{N;k}) &= \lim_{N\to\infty} N \cdot \varphi(a_{N;k}) \\ &= \lim_{N\to\infty} \varphi(a_{N;1} + \cdots + a_{N;N}) = \varphi(a),\end{aligned}$$

el límite existe, similarmente cuando $m=0$ y $n=1$. Si $m=n=1$, tenemos

$$\varphi(ab) = \lim_{N\to\infty} (N^2 \cdot \kappa_1^N(a_{N;k})\kappa_1(b_{N;k}) + N \cdot \kappa_{1,1}^N(a_{N;k}, b_{N;k})),$$

y como $\varphi(ab)$, $\lim_{N\to\infty}(N \cdot \kappa_1^N(a_{N;k})$, $\lim_{N\to\infty}(N \cdot \kappa_1(b_{N;k})$ existen, se tiene la existencia de $\lim_{N\to\infty} N \cdot \kappa_{1,1}^N(a_{N;k}, b_{N;k})$. Como hipótesis de inducción asuma que el resultado es válido para todo $m \leq r$ y $n \leq s$ tal que $r+s \geq 1$. Si $m = r+1$ y $n = s$, se tiene

$$\begin{aligned}\varphi(a^{r+1}b^s) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{\tau\in BNC_\chi(r+s+1)} N^{|\tau|} \cdot \kappa_\tau^{N\chi}(a_{N;k} b_{N;k}) \\ &= \lim_{N\to\infty} (N \cdot \kappa_{r+1,s}^N(a_{N;k}, b_{N;k}) + L),\end{aligned}$$

donde

$$L = \sum_{\substack{\tau\in BNC_\chi(r+s+1)\\ \tau\neq\hat{1}_{r+s+1}}} N^{|\tau|} \cdot \kappa_\tau^{N\chi}(a_{N;k} b_{N;k}).$$

Por hipótesis de inducción, los límites

$$\lim_{N\to\infty} N^{|\tau|} \cdot \kappa_\tau^{\chi}(a_{N;k}, b_{N;k}),$$

existen para todo $\tau \in BNC_\chi(r+s+1)$ con $\tau \neq \hat{1}_{r+s+1}$ y también $\lim_{N\to\infty} L$ existe, tenemos la existencia de

$$\lim_{N\to\infty} N \cdot \kappa^N_{r+1,s}(a_{N;k}, b_{N;k}),$$

como se quería. El caso $m = r$ y $n = s+1$ es análogo.

Recíprocamente, suponga que se cumple 2. Para $m, n \geq 0$ tal que $m + n \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned} &\lim_{N\to\infty} \varphi_N((\sum_{k=1}^N a_{N;k})^m(\sum_{k=1}^N b_{N;k})^n) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{\tau\in BNC_\chi(m+n)} N^{|\tau|} \cdot \kappa^{N\chi}_\tau(a_{N;k}b_{N;k}). \end{aligned}$$

Por los lemas 5.1.1 y 5.1.2, tenemos

$$\lim_{N\to\infty} N^{|\tau|} \cdot \kappa^{N\chi}_\tau(a_{N;k}, b_{N;k}) = \lim_{N\to\infty} N^{|\tau|} \cdot (\varphi_N)_\tau(a_{N;k}, b_{N;k}),$$

para todo $\tau \in BNC_\chi(m+n)$; y todos existen. Es posible construir una variable de dos caras (a, b) en un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \varphi)$ tal que

$$\varphi(a^m b^n) = \lim_{N\to\infty} \varphi_N((\sum_{k=1}^N a_{N;k})^m(\sum_{k=1}^N b_{N;K})^n),$$

por ejemplo, $a = s,\ b = t$ en $\mathbb{C}[s,t]$ y definimos $\varphi(s^m t^n)$ como ese límite. Finalmente, cambiemos la notación denotemos κ^χ los funcionales cumulantes de $(\mathcal{A}, \varphi)$, y a los cumulantes libres y bi-libres de $(\mathcal{A}_N, \varphi_N)$ los denotamos c^N y c^χ respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} \varphi(a^m b^n) &= \sum_{\tau\in BNC_\chi(m+n)} \kappa^\chi_\tau(a, b) = \lim_{N\to\infty} \sum_{\tau\in BNC_\chi(m+n)} N^{|\tau|} \cdot c^\chi_\tau(a_{N;k}, b_{N;k}) \\ &= \sum_{\tau\in BNC_\chi(m+n)} \lim_{N\to\infty} N^{|\tau|} \cdot c^\chi_\tau(a_{N;k}, b_{N;k}). \end{aligned}$$

Por inducción sobre el número de argumentos en los cumulantes bi-libres, llegamos a que

$$\kappa^\chi_\tau(a, b) = \lim_{N\to\infty} N^{|\tau|} \cdot c^\chi_\tau(a_{N;k}, b_{N;k}),$$

para todo $\tau \in BNC_\chi(m+n)$. En particular, cuando $\tau = \hat{1}_{m+n}$, tenemos

$$\begin{aligned} \kappa^\chi_{m+n}(a, b) &= \lim_{N\to\infty} N \cdot c^\chi_{m+n}(a_{N;k}, b_{N;k}) \\ &= \lim_{N\to\infty} N \cdot c^N_{m+n}(a_{N;k}, b_{N;k}) \\ &= \lim_{N\to\infty} N \cdot \varphi_N(a^m_{N;k} b^n_{N;k}), \end{aligned}$$

aplicando nuevamente los lemas 5.1.1 y 5.1.2, completamos la prueba. ■

Demos la primera definición de divisibilidad infinita, por ahora para medidas con soporte compacto. Mas adelante en este capítulo daremos una definición para el caso general.

Definición 5.1.4 *i) Una variable de dos caras (a, b) en un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \varphi)$, se dice $\boxplus\boxplus$-Infinitamente Divisible si para todo $n \in \mathbb{N}$, existen variables de dos caras $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)$ en el mismo espacio $(\mathcal{A}, \varphi)$, bi-libres e idénticamente distribuidas tal que $(a_1 + ... + a_n, b_1 + ... + b_n)$ tiene la misma distribución que (a, b).*

ii) Equivalente a lo anterior, decimos que una medida de probabilidad con soporte compacto en $\mathbb{R}^2$ es $\boxplus\boxplus$-Infinitamente Divisible, si para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una medida de probabilidad con soporte compacto μ_n en $\mathbb{R}^2$ tal que $\mu = \underbrace{\mu_n \boxplus\boxplus \cdots \boxplus\boxplus \mu_n}_{n \text{ veces}} = (\mu_n)^{\boxplus\boxplus n}$.

Escribiremos $\mu \in ID(\boxplus\boxplus)$ en caso de que μ sea $\boxplus\boxplus$-*Infinitamente Divisible.* En el capítulo 1, demostramos el hecho que toda variable aleatoria infinitamente divisible libre puede verse (en distribución) como un arreglo muy específico de elementos del espacio de Fock libre (ver la proposición 1.5.6); retomamos ahora esa forma para tener nuestro primer ejemplo de distribuciones $\boxplus\boxplus$-infinitamente divisibles en términos del espacio de Fock; también calculemos con nuestra herramienta combinatoria los cumulantes bi-libres de esos arreglos.

Proposición 5.1.5 *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Para todo $f, g \in \mathcal{H}$, $T_1 = T_1^*$, $T_2 = T_2^* \in B(\mathcal{H})$, y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, sean a y b los operadores autoadjuntos*

$$a = l(f) + l^*(f) + \Lambda_l(T_1) + \lambda_1 \cdot \mathbf{1},$$
$$b = r(g) + r^*(g) + \Lambda_r(T_2) + \lambda_2 \cdot \mathbf{1}.$$

i) $[a, b] = 0$ si y sólo si $Im\langle f, g\rangle = 0, T_1 g = T_2 f$ y $[T_1, T_2] = 0$. Mas aún si a, b conmutan, la distribución $\mu_{(a,b)}$ de (a, b) es $\boxplus\boxplus$-infinitamente divisible.

ii) Si $[a, b] = 0$ entonces los cumulantes bi-libres de (a, b) son como sigue

$$\kappa_{1,0}(a, b) = \lambda_1, \quad \kappa_{0,1}(a, b) = \lambda_2,$$
$$\kappa_{m,0}(a, b) = \kappa_m(l^*(f), \Lambda_l(T_1), ..., \Lambda_l(T_1), l(f)) = \langle T_1^{m-2} f, f\rangle, \qquad m \geq 2,$$
$$\kappa_{0,n}(a, b) = \kappa_n(r^*(g), \Lambda_r(T_2), ..., \Lambda_r(T_2), r(g)) = \langle T_2^{n-2} g, g\rangle, \qquad n \geq 2,$$

y para $m, n \geq 1$,

$$\kappa_{m,n}(a, b) = \langle \Lambda_l(T_1)^{m-1} l(f)\Omega, \Lambda_r(T_2)^{n-1} r(g)\Omega\rangle = \langle T_1^{m-1} f, T_2^{n-1} g\rangle.$$

Demostración.

i) Sin pérdida de generalidad, asumamos que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Supongamos primero que a y b conmutan, como $l(f)r(g)\Omega = r(g)l(f)\Omega$ y $l(f)r(g)(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n) = r(g)l(f)(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n)$ para todo $\xi_1, ..., \xi_n \in \mathcal{H}$, $n \geq 1$ entonces

$$l(f)r(g) = r(g)l(f), \quad l^*(f)r^*(g) = r^*(g)l^*(f), \tag{5.1}$$

y también,

$$l(f)r^*(g)\Omega = 0, \quad r^*(g)l(f)\Omega = \langle f, g\rangle\Omega, \quad l(f)r^*(g) = r^*(g)l(f),$$

en $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \ominus \mathbb{C}\Omega$, que implica que el operador

$$A = l(f)r^*(g) + l^*(f)r(g) - r^*(g)l(f) - r(g)l^*(f),$$

es cero en $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \ominus \mathbb{C}\Omega$ y satisface $A\Omega = -2i(\langle f, g\rangle)\Omega$. Y también

$$l(f)\Lambda_r(T_2)\Omega = 0, \ \Lambda_r(T_2)l(f)\Omega = T_2 f, \ l(f)\Lambda_r(T_2) = \Lambda_r(T_2)l(f),$$

en $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \ominus \mathbb{C}\Omega$, y combinado con la condición

$$r(g)\Lambda_l(T_1)\Omega = 0, \ \Lambda_l(T_1)r(g)\Omega = T_1 g, \ r(g)\Lambda_l(T_1) = \Lambda_l(T_1)r(g),$$

en $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \ominus \mathbb{C}\Omega$, implican que el operador,

$$B = l(f)\Lambda_r(T_2) + \Lambda_l(T_1)r(g) - \Lambda_r(T_2)l(f) - r(g)\Lambda_l(T_1),$$

es cero en $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \ominus \mathbb{C}\Omega$ y satisface $B\Omega = T_1 g - T_2 f$. Además

$$l^*(f)\Lambda_r(T_2)\xi = \langle T_2\xi, f\rangle, \quad \Lambda_r(T_2)l^*(f)\xi = 0, \quad \text{con } \xi \in \mathcal{H},$$
$$\text{y}$$
$$l^*(f)\Lambda_r(T_2) = \Lambda_r(T_2)l^*(f) \qquad \text{en } \mathcal{F}(\mathcal{H}) \ominus \mathbb{C}\Omega,$$

y las identidades

$$\Lambda_l(T_1)r^*(g)\xi = 0, \quad r^*(g)\Lambda_l(T_1)\xi = \langle T_1\xi, g\rangle, \quad \Lambda_l(T_1)r^*(g) = r^*(g)\Lambda_l(T_1),$$

en $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \ominus \mathbb{C}\Omega$ y el operador

$$C = l^*(f)\Lambda_r(T_2) + \Lambda_l(T_1)r^*(g) - \Lambda_r(T_2)l^*(f) - r^*(g)\Lambda_l(T_1),$$

es cero en $\mathcal{F}(\mathcal{H})\ominus\mathbb{C}\Omega$ y cumple $C\xi = \langle \xi, (T_2 f - T_1 g)\rangle$, donde $\xi \in \mathcal{H}$. Finalmente, las condiciones

$$\lambda_l(T_1)\Lambda_r(T_2)\xi = T_1T_2\xi, \ \Lambda_r(T_2)\Lambda_l(T_1)\xi = T_2T_1\xi, \quad \text{para } \xi \in \mathcal{H},$$
$$\text{y}$$
$$\Lambda_l(T_1)\Lambda_r(T_2) = \Lambda_r(T_2)\Lambda_l(T_1) \quad \text{en } \mathcal{F}(\mathcal{H}) \ominus \mathbb{C}\Omega,$$

implican que el operador

$$D = \Lambda_l(T_1)\Lambda_r(T_2) - \Lambda_r(T_2)\Lambda_l(T_1),$$

es cero en $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \ominus \mathbb{C}\Omega$ y cumple que $D\xi = (T_1T_2 - T_2T_1)\xi, \ \xi \in \mathcal{H}$.

El resultado se sigue de los hechos anteriores y de que $ab - ba = A + B + C + D$. Para probar ahora que la distribución de (a, b) es infinitamente divisible bi-libre, fijemos $n \in \mathbb{N}$, y sea $\mathcal{H}_n = \underbrace{\mathcal{H} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}}_{n \text{ veces}}$, y sea

$$\tilde{a} = l\left[\frac{f \oplus \cdots \oplus f}{\sqrt{n}}\right] + l^*\left[\frac{f \oplus \cdots \oplus f}{\sqrt{n}}\right] + \Lambda_l(T_1 \oplus \cdots \oplus T_1),$$

y

$$\tilde{b} = r\left[\frac{g \oplus \cdots \oplus g}{\sqrt{n}}\right] + r^*\left[\frac{g \oplus \cdots \oplus g}{\sqrt{n}}\right] + \Lambda_r(T_2 \oplus \cdots \oplus T_2).$$

Entonces $[\tilde{a}, \tilde{b}] = 0$, y la distribución de (a, b) en $(B(\mathcal{F}(\mathcal{H})), \tau_{\mathcal{H}})$ es la misma que la de $(\tilde{a}, \tilde{b})$ en $(B(\mathcal{F}(\mathcal{H}_n), \tau_{\mathcal{H}_n})$. Nótese que $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$ pueden escribirse como

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= l\left[\frac{f \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0}{\sqrt{n}}\right] + l^*\left[\frac{f \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0}{\sqrt{n}}\right] + \Lambda_l(T_1 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0)\\ &+ \cdots + l\left[\frac{0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus f}{\sqrt{n}}\right] + l^*\left[\frac{0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus f}{\sqrt{n}}\right] + \Lambda_l(0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus T_1),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\tilde{b} &= r\left[\frac{g \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0}{\sqrt{n}}\right] + r^*\left[\frac{g \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0}{\sqrt{n}}\right] + \Lambda_r(T_2 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0)\\ &+ \cdots + r\left[\frac{0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus g}{\sqrt{n}}\right] + r^*\left[\frac{0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus g}{\sqrt{n}}\right] + \Lambda_r(0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus T_2),\end{aligned}$$

y por resultados anteriores cada sumando es bi-libre, y obviamente son idénticamente distribuidos.

ii) Las igualdades para los cumulantes en una variable $\kappa_1(a), \kappa_1(b), \kappa_m(a)$ y $\kappa_n(b)$ son resultados conocidos. Para demostrar la igualdad de $\kappa_{m,n}(a, b)$ usamos la notación del inciso anterior para $\mathcal{H}_N$. Observemos que las variables aleatorias

$$l(f), l^*(f), r(g), r^*(g), \Lambda_l(T_1), \Lambda_r(T_2) \quad \text{en } (B(\mathcal{F}(\mathcal{H})), \tau_{\mathcal{H}}),$$

tienen la misma distribución que las variables

$$\begin{gathered} l\left[\frac{f \oplus \cdots \oplus f}{\sqrt{N}}\right],\ l^*\left[\frac{f \oplus \cdots \oplus f}{\sqrt{N}}\right],\ r\left[\frac{g \oplus \cdots \oplus g}{\sqrt{N}}\right]\\ r^*\left[\frac{g \oplus \cdots \oplus g}{\sqrt{N}}\right],\ \Lambda_l(T_1 \oplus \cdots \oplus T_1),\ \Lambda_r(T_2 \oplus \cdots \oplus T_2) \ \text{ en } (B(\mathcal{F}(\mathcal{H}_N)), \tau_{\mathcal{H}_N},\end{gathered}$$

y las anteriores variables aleatorias son suma de N variables, donde los sumandos tienen la misma distribución conjunta que las variables

$$\frac{1}{\sqrt{N}} l(f), \frac{1}{\sqrt{N}} l^*(f), \frac{1}{\sqrt{N}} r(g), \frac{1}{\sqrt{N}} r^*(g), \Lambda_l(T_1), \Lambda_r(T_2) \quad \text{en } (B(\mathcal{F}(\mathcal{H})), \tau_{\mathcal{H}}).$$

Usando que los cumulantes son multilineales, vemos que cada sumando de $\kappa_{m,n}(a, b)$ es de la forma $\kappa_{m+n}(c_1,...,c_m,d_1,...,d_n)$, donde $c_i \in \{l(f), l^*(f), \Lambda_l(T_1)\}$ y $d_j \in \{r(g), r^*(g), \Lambda_r(T_2)\}$. Por nuestro primer teorema,

$$\kappa_{m+n}(c_1,...,c_m,d_1,...,d_n) = \lim_{N\to\infty} N \cdot \langle \tilde{c}_1 \cdots \tilde{c}_m \tilde{d}_1 \cdots \tilde{d}_n \Omega, \Omega\rangle,$$

donde

$$\tilde{c}_i \in \{\frac{l(f)}{\sqrt{N}}, \frac{l^*(f)}{\sqrt{N}}, \Lambda_l(T_1)\} \quad \text{y} \quad \tilde{d}_j \in \{\frac{r(g)}{\sqrt{N}}, \frac{r^*(g)}{\sqrt{N}}, \Lambda_r(T_2)\},$$

en correspondencia con c_i y d_j. Por definición de los elementos en el espacio de Fock, los únicos cumulantes no cero de $\kappa_{m,n}(a,b)$ son

$$\kappa_{m+n}(l^*(f), \underbrace{\Lambda_l(T_1),...,\Lambda_l(T_1)}_{m-1 \text{ veces}}, \underbrace{\Lambda_r(T_2),...,\Lambda_r(T_2)}_{n-1 \text{ veces}}, r(g)),$$

que es igual a

$$\lim_{N\to\infty} N \cdot \langle \frac{1}{\sqrt{N}} l^*(f) \lambda_l(T_1)^{m-1} \Lambda_r(T_2)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{N}} r(g)\Omega, \Omega\rangle = \langle T_1^{m-1} f, T_2^{n-1} g\rangle,$$

por la hipótesis de que a y b conmutan.

■

Lo anterior será útil más adelante, ahora discutamos la primera caracterización de las distribuciones infinitamente divisibles bi-libres: la representación de Lévy-Hincin.

5.2 Representación de Lévy-Hincin

Comenzamos con un resultado que relaciona la transformada R de una variable de dos caras en un C^*- espacio de probabilidad no conmutativo y la transformada R univariada de las caras.

Lema 5.2.1 *Para una variable de dos caras (a,b) bipartita y autoadjunta en un C^*-espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \varphi)$, tenemos*

$$\mathcal{R}_{(a,b)}(z,0) = z\mathcal{R}_a(z), \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_{(a,b)}(0,w) = w\mathcal{R}_b(w),$$

para z y w en una vecindad de 0.

Demostración. Demostremos la primera igualdad, la segunda es análoga. por la relación 3.5 es suficiente probar que

$$\lim_{w\to\infty} \frac{zw}{G_{(a,b)}(K_a(z), K_b(w))} = 1,$$

para $z \neq 0$ cerca de 0. Y como para (z,w) en una vecindad agujerada de $(0,0)$, tenemos

$$G_{(a,b)}(z^{-1}, w^{-1}) = w\varphi((z^{-1} - a)^{-1}(1 - wb)^{-1}),$$

entonces,

$$\frac{zw}{G_{(a,b)}(K_a(z),K_b(w))} = \frac{z(w\mathcal{R}_b(w)+1)}{\varphi((K_a(z)-a)^{-1}(1-\frac{b}{K_b(w)})^{-1})},$$

y como $\lim_{w\to 0} 1/K_b(w) = 0$ y $\lim_{w\to 0} w\mathcal{R}_b(w) = 0$, se sigue que

$$\lim_{w\to 0} \frac{zw}{G_{(a,b)}(K_a(z),K_b(w))} = \frac{z}{\varphi((K_a(z)-a)^{-1})} = \frac{z}{G_a(K_a(z))} = 1.$$

■

Una medida de probabilidad ν con soporte compacto en $\mathbb{R}$ es $\boxplus$-infinitamente divisible si y sólo si su transformada R tiene la forma

$$\mathcal{R}_\nu(z) = \kappa_1^\nu + \int_{\mathbb{R}} \frac{z}{1-zs} d\rho_\nu(s),$$

donde ρ_ν es llamada la medida de Lévy libre de ν, es una medida de Borel finita en $\mathbb{R}$, y κ_1^ν es el primer cumulante de ν. Tal representación es conocida como la representación de Lévy-Hincin libre. Comencemos la discusión sobre la representación de Lévy-Hincin bi-libre.

5.2.1 Primera forma: medidas con soporte compacto

Definición 5.2.2 *Consideremos una sucesión real de 2 variables $R = \{R_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$. Y definamos en $\mathbb{C}_0[s,t]$ (álgebra de polinomios conmutativos en las variables s y t, con término constante igual a cero) la forma sesquilineal $[\cdot,\cdot]_R$, como $[s^{m_1}t^{n_1}, s^{m_2}t^{n_2}]_R = R_{m_1+m_2,n_1+n_2}$*

i) R se dice condicionalmente positiva semi-definida (CPSD) si $[p,p]_R \geq 0$ para todo $p \in \mathbb{C}_0[s,t]$.

ii) R se dice condicionalmente acotada, si existe un número $L > 0$ tal que

$$|[s^m t^n p, p]_R| \leq L^{m+n} \cdot [p,p]_R,$$

para todo $p \in \mathbb{C}_0[s,t]$ y $m,n \geq 0$.

Teorema 5.2.3 *[25, Teo. 3.10] Sea μ una medida de probabilidad con soporte compacto en el plano, y $\kappa = \{\kappa_{m,n}^\mu\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ los cumulantes bi-libres de μ tal que $\kappa_{2,0}^\mu, \kappa_{0,2}^\mu > 0$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *La medida μ es $\boxplus\boxplus$-infinitamente divisible.*

2. *La 2-sucesión κ es CPSD y condicionalmente acotada.*

3. *Existen medidas de Borel positivas ρ_1 y ρ_2 con soporte compacto en $\mathbb{R}^2$ y una medida de Borel finita ρ en $\mathbb{R}^2$ que satisfacen*

$$|\rho(\{(0,0)\})|^2 \leq \rho_1(\{(0,0)\})\rho_2(\{(0,0)\}),$$
$$t[d\rho_1(s,t)] = s[d\rho(s,t)], \qquad s[d\rho_2(s,t)] = t[d\rho(s,t)],$$

tal que

$$\mathcal{R}_\mu(z,w) = z\mathcal{R}_1(z) + w\mathcal{R}_2(w) + \int\limits_{\mathcal{R}^2} \frac{zw}{(1-zs)(1-wt)} d\rho(s,t),$$

se tiene para (z,w) *en una vecindad de* $(0,0)$*, donde*

$$\mathcal{R}_1(z) = \kappa^\nu_{1,0} + \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{z}{1-zs} d\rho_1(s,t), \quad y$$

$$\mathcal{R}_2(w) = \kappa^\nu_{1,0} + \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{w}{1-wt} d\rho_2(s,t).$$

Si las afirmaciones anteriores se cumplen, entonces $\mathcal{R}_\mu$ *se extiende analíticamente a* $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^2$ *mediante las fórmulas anteriores.*

Haremos una demostración analítica de este teorema en la subsección 5.6.1.

Supongamos ahora que μ es una medida de probabilidad con soporte compacto en el plano. Si κ^μ es CPSD y $\kappa^\mu_{0,2} = 0$, entonces $\kappa^\mu_{m,n} = 0$ para cada (m,n) con $m+n \geq 2,\ n \geq 1$. En este caso, μ es la distribución de $(a, \kappa^\mu_{0,1} \cdot \mathbf{1})$, donde a es una variable aleatoria autoadjunta en algún C^*-espacio de probabilidad no conmutativo. En otras palabras, $\mu = \nu_a \times \delta_{\kappa^\mu_{0,1}}$, la medida producto de la distribución ν_a de a y $\delta_{\kappa^\mu_{0,1}}$. Si, además, κ^μ es condicionalmente acotada, entonces la 1-sucesión $\{\kappa^\mu_{m+2,0}\}_{m\geq 0}$ es una sucesión de un problema de momentos de Hausdorff en un intervalo acotado, y por tanto es determinada, lo que significa que existe una medida con soporte compacto ρ_1 en $\mathbb{R}$ que tiene por momentos a la sucesión (ver [1] para más detalles). Por tanto ν_a es $\boxplus$-infinitamente divisible, y la transformada R de μ está dada por

$$\mathcal{R}_\mu(z,w) = z\left[\kappa^\mu_{0,1} + \int\limits_{\mathcal{R}^2} \frac{z}{1-zs} d\rho_1(s)\right] + w\kappa^\mu_{0,1},$$

recíprocamente, cualquier función que tiene la forma del lado derecho de la última expresión es la transformada R bi-libre de alguna medida con soporte compacto. Aplicando esta observación a $\mathcal{R}_\mu/N$ para todo $N \in \mathbb{N}$ se tiene la infinita divisibilidad bi-libre de μ. En general, se puede ver (y lo veremos más adelante) que el producto de dos medidas con soporte compacto en $\mathbb{R}$, $\boxplus$-infinitamente divisibles es $\boxplus\boxplus$-infinitamente divisible.

Lema 5.2.4 *Supongamos que* $\{\mu_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de medidas en el plano con soporte compacto con la propiedad de que, para todo* $m,n \in \mathbb{N}$*, el límite*

$$M_{m,n} = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} s^m t^n d\mu_N(s,t),$$

existe y es un número finito. Si existe un número $L > 0$ *tal que* $|M_{m,n}| \leq L^{m+n}$ *para todo* $m,n \in \mathbb{N}$*, entonces la 2-sucesión* $M = \{M_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de momentos determinada,* *es decir existe una medida única en el plano cuyos momentos son $M_{m,n}$, y tal medida tiene soporte compacto (Ver [37] para más detalles).*

Demostración. Para todo $m_0, n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fijos, las 1-sucesiones $\alpha = \{M_{m,2n_0}\}_{m\geq 0}$ y $\beta = \{M_{2m_0,n} + R_{0,n}\}_{n\geq 0}$ cumplen todas las condiciones del problema de momentos de Hamburger (de nuevo citamos [1]). Luego, usando el hecho de que $|M_{m,n}| \leq L^{m+n}$, concluimos que las medidas representación de α y β son ambas de soporte compacto y por tanto son determinadas (i.e es única). ■

En la siguiente sección estableceremos resultados como los anteriores para medidas con soporte no necesariamente compacto.

5.3 Transformadas R infinitamente divisibles

Recordando la notación del problema central 5.0.1, sea ν_n la distribución de la suma S_n. Se tiene que $\mathcal{R}_{\nu_n} = k_n \mathcal{R}_{\mu_n}$ en un bi-disco centrado en $(0,0)$. Algunas condiciones necesarias para la convergencia de $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son inmediatas, por ejemplo, si la sucesión ν_n converge débilmente a una medida de probabilidad ν en $\mathbb{R}^2$ entonces

1. $\mu_n \Rightarrow \delta_{(0,0)}$, ya que existe un dominio común de definición Ω para todos los $\mathcal{R}_{\nu_n}$, y también para todos los $\mathcal{R}_{\mu_n}$, tal que $\mathcal{R}_{\mu_n} = \mathcal{R}_{\nu_n}/k_n = (\mathcal{R}_\nu + o(1)) \cdot o(1)$, cuando $n \to \infty$ en Ω y $\mathcal{R}_{\mu_n}(-iy, -iv) = \mathcal{R}_{\nu_n}(-iy, -iv)/k_n = o(1)$ uniformemente en n, cuando $y, v \to 0^+$. Así que, $\mu_n \Rightarrow \delta_{(0,0)}$. Esto implica también que $\mu_n^{(j)} = \mu_n \circ \pi_j^{-1} \Rightarrow \delta_0,\ j = 1, 2$ para las marginales. De hecho el recíproco también es cierto, si las marginales $\mu_n^{(j)} \Rightarrow \delta_0,\ j = 1, 2$ entonces $\mu_n \Rightarrow \delta_{(0,0)}$.

2. Para cada j, se tiene la convergencia débil $\nu_n^{(j)} \Rightarrow \nu^{(j)}$ para las marginales y por la proposición 3.2.5 tenemos

$$\nu_n^{(j)} = \underbrace{\mu_n^{(j)} \boxplus \mu_n^{(j)} \boxplus \cdots \boxplus \mu_n^{(j)}}_{k_n \text{ veces}},$$

por propiedades de la biyección de Bercovici-Pata se sigue que $\nu^{(j)}$ debe ser $\boxplus$-infinitamente divisible. Por otro lado, aplicando la transformada R unidimensional a la convergencia débil $\nu_n^{(j)} \Rightarrow \nu^{(j)}$, tenemos $\mu_n^{(j)} \Rightarrow \delta_0$. Denotemos $\nu = \nu_{\boxplus}^{\gamma,\sigma}$ para decir que ν (por ser $\boxplus$-infinitamente divisible) tiene representación de Lévy-Hincin (unidimensional) con par generador (γ, σ) entonces para la convergencia de $\nu_n^{(j)}$ es necesario y suficiente que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{k_n x}{1+x^2} d\mu_n^{(j)}(x) = \gamma,$$

y el límite débil unidimensional

$$\frac{k_n x^2}{1+x^2} d\mu_n^{(j)}(x) \Rightarrow \sigma,$$

se cumplan simultáneamente.

Así, asumiendo la convergencia débil de las marginales $\mu_n^{(j)}$ bajo convolución libre, la clave para comenzar a responder a la pregunta principal del capítulo es el siguiente teorema.

Teorema 5.3.1 *[30, Teo. 3.2] Sea $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}^2$, y sea k_n una sucesión de enteros tal que $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$. Para $j = 1, 2$, supongamos que $\nu_{jn} = [\mu_n^{(j)}]^{\boxplus k_n}$ converge débilmente a $\nu_{\boxplus}^{\gamma_j,\sigma_j}$, la medida $\boxplus$-infinitamente divisible determinada por el par generador (γ_j, σ_j). Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *El límite puntual $R(z, w) = \lim_{n\to\infty} k_n\mathcal{R}_{\mu_n}(z, w)$ existe para (z, w) en un dominio Ω donde todos los $\mathcal{R}_{\mu_n}$ están definidos.*

2. *El límite puntual*

$$D(z, w) = \lim_{n\to\infty} k_n \int_{\mathbb{R}^2} \frac{zwst}{(1 - zs)(1 - wt)}\, d\mu_n(s, t),$$

existe para todo $(z, w) \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^2$.

3. *Las medidas con signo finitas*

$$d\rho_n(s, t) = k_n \frac{st}{\sqrt{1 + s^2}\sqrt{1 + t^2}} d\mu_n(s, t),$$

convergen débilmente a una medida con signo finita ρ en $\mathbb{R}^2$.

Mas aún, si 1,2 y 3 se cumplen, entonces la función límite D tiene una representación integral única

$$D(z, w) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{zw\sqrt{1 + s^2}\sqrt{1 + t^2}}{(1 - zs)(1 - wt)} d\rho(s, t),$$

y tenemos

$$R(z, w) = z\mathcal{R}_{\nu_{\boxplus}^{\gamma_1,\sigma_1}}(z) + w\mathcal{R}_{\nu_{\boxplus}^{\gamma_2,\sigma_2}}(w) + D(z, w).$$

En particular, el límite $R(z, w)$ se extiende analíticamente a $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^2$

La demostración es extensa y puede encontrarse en [30].

Supongamos ahora que las sucesiones $\{\mu_n\}$ y $\{k_n\}$ cumplen la condición adicional

$$k_n\mathcal{R}_{\mu_n} = \mathcal{R}_{\nu_n}, \quad n \geq 1,$$

para alguna medida de probabilidad ν_n en $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo, esto ocurre para cualquier k_n cuando μ_n tiene soporte compacto, y tomamos ν_n como la convolución bi-libre de μ_n, k_n-veces con ella misma. En este caso tiene sentido investigar la convergencia de las medidas $\{\nu_n\}$. Con el siguiente corolario respondemos una parte de la pregunta central 5.0.1.

Corolario 5.3.2 (Criterio de Convergencia) *Consideremos todas las hipótesis del teorema 5.3.1. La sucesión ν_n converge débilmente a una medida de probabilidad en $\mathbb{R}^2$ si y sólo si las convoluciones libres de marginales $[\mu_n^{(j)}]^{\boxplus k_n}$ y las medidas con signo ρ_n convergen débilmente en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Mas aún, si $\nu_n \Rightarrow \nu$, $[\mu_n^{(j)}]^{\boxplus k_n} \Rightarrow \nu_{\boxplus}^{\gamma_j,\sigma_j}$, $j = 1, 2$ y $\rho_n \Rightarrow \rho$, entonces las marginales $\nu^{(j)} = \nu_{\boxplus}^{\gamma_j,\sigma_j}$, $j = 1, 2$ y además,*

$$G_\nu(z, w)\left[1 - G_{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+t^2}d\rho}(1/G_{\nu^{(1)}}(z), 1/G_{\nu^{(2)}}(w))\right] = G_{\nu^{(1)}}(z)G_{\nu^{(2)}}(w),$$

para $(z, w) \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^2$.

Demostración. Supongamos $\nu_n \Rightarrow \nu$ para alguna medida ν en $\mathbb{R}^2$. Como $\nu_n^{(j)} = [\mu_n^{(j)}]^{\boxplus k_n}$, por la proposición 3.2.5, tenemos $[\mu_n^{(j)}]^{\boxplus k_n} \Rightarrow \nu^{(j)}$, al tomar transformada R en el límite y en la sucesión y que la transformada R univariada es aditiva con la convolución $\boxplus$. Entonces el límite $\nu^{(j)}$ es $\boxplus$-infinitamente divisible y $\mu_n \Rightarrow \delta_{(0,0)}$. La convergencia de las medidas ρ_n es entonces consecuencia de la convergencia puntual $\mathcal{R}_{\nu_n} \to \nu$ por el teorema 5.3.1. Recíprocamente, supongamos la convergencia débil de $[\mu_n^{(j)}]^{\boxplus k_n}$ y $\{\rho_n\}$. La convergencia débil de las marginales implican que $\{\nu_n\}$ es tensa, por tanto para la convergencia deseada (por resultados de la transformada R) sólo hay que probar la convergencia puntual de $\mathcal{R}_{\nu_n}$, lo cual se sigue de que ρ_n converge débilmente (por el teorema 5.3.1). Además como vimos antes la transformada R de un límite ν tiene la representación integral

$$\mathcal{R}_\nu(z, w) = z\mathcal{R}_{\nu_{\boxplus}^{\gamma_1,\sigma_1}}(z) + w\mathcal{R}_{\nu_{\boxplus}^{\gamma_2,\sigma_2}}(w) + G_{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+t^2}d\rho}(1/z, 1/w),$$

para $(z, w) \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^2$. ■

Continuamos con nuestra investigación de la caracterización de las leyes límite. Sea $R = \lim_{n\to\infty} k_n\mathcal{R}_{\mu_n}$ el límite puntual del teorema 5.3.1. Entonces para cualquier entero $m \geq 2$, la función R/m es el límite de $\lfloor k_n/m\rfloor\mathcal{R}_{\mu_n}$. En otras palabras, el límite de $k_n\mathcal{R}_{\mu_n}$ se puede descomponer en una suma de m funciones idénticas del mismo tipo. Esta propiedad del límite R puede verse también de su representación integral

$$R(z, w)/m = z\mathcal{R}_{\nu_{\boxplus}^{\gamma_1/m,\sigma_1/m}}(z) + w\mathcal{R}_{\nu_{\boxplus}^{\gamma_2/m,\sigma_2/m}}(w) + G_{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+t^2}d\rho/m}(1/z, 1/w),$$

donde la quintupla $(\gamma_1, \gamma_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$ de números y medidas nos la da el teorema 5.3.1. En el siguiente teorema mostramos que todo límite integral de esa forma es una transformada R bi-libre.

Teorema 5.3.3 *[30, Teo. 3.6] Sean $\{\mu_n\}$ una sucesión de medidas de probabilidad y $\{k_n\}$ sucesión en $\mathbb{N}$, ambas satisfaciendo las hipótesis del teorema 5.3.1, y supongamos que $R = \lim_{n\to\infty} k_n\mathcal{R}_{\mu_n}$ existe en un dominio Ω. Entonces existe una única medida de probabilidad ν en $\mathbb{R}^2$ tal que $R = \mathcal{R}_\nu$ en Ω.*

En la sección anterior definimos la divisibilidad infinita bi-libre para medidas con soporte compacto. En base a los resultados anteriores eliminemos esa restricción.

Definición 5.3.4 Una transformada R bi-libre $\mathcal{R}_\nu$ en un dominio Ω se dice *infinitamente divisible* si para cada $m \in \mathbb{N}$ existe una medida de probabilidad μ_m en $\mathbb{R}^2$ tal que $\mathcal{R}_\nu = m\mathcal{R}_{\mu_m}$ en Ω. En ese caso, la medida ν se dice *infinitamente divisible bi-libre* o $\boxplus\boxplus$-infinitamente divisible.

5.4 Clases de distribuciones infinitamente divisibles

En esta sección presentaremos tres clases importantes de distribuciones infinitamente divisibles bi-libres, las Leyes gaussianas, Poisson compuestas y una más trivial los productos de marginales infinitamente divisibles.

5.4.1 Leyes gaussianas bi-libres

Sea (x_1, x_2) una variable de dos caras en un C^*-espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \varphi)$, supongamos que la variable es autoadjunta, bipartita y tiene distribución ν de límite central (definidas en el capítulo 2) con matriz de covarianzas

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix},$$

donde $a = \varphi(x_1^2)$, $b = \varphi(x_2^2)$, $c = \varphi(x_1x_2) = \varphi(x_2x_1)$, esa última igualdad pues el par es bipartito. Es fácil probar una desigualdad tipo Cauchy-Schwarz en los espacios de probabilidad no conmutativos (es uno de los primeros resultados de [35]), por lo que $|c|^2 \leq ab$.

Por otro lado, sea ν_2 la distribución límite, en la notación del teorema 5.3.1, considerando $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, y $\sigma_1 = a\delta_0$, $\sigma_2 = b\delta_0$ y $\rho = c\delta_{(0,0)}$. En ese caso, $\mathcal{R}_{\nu_{\boxplus}^{\gamma_1,\sigma_1}}(z) = az$, $\mathcal{R}_{\nu_{\boxplus}^{\gamma_2,\sigma_2}}(w) = bw$ y $D(z, w) = czw$, y por tanto

$$\mathcal{R}_{\nu_2}(z, w) = az^2 + bw^2 + czw.$$

Pero también

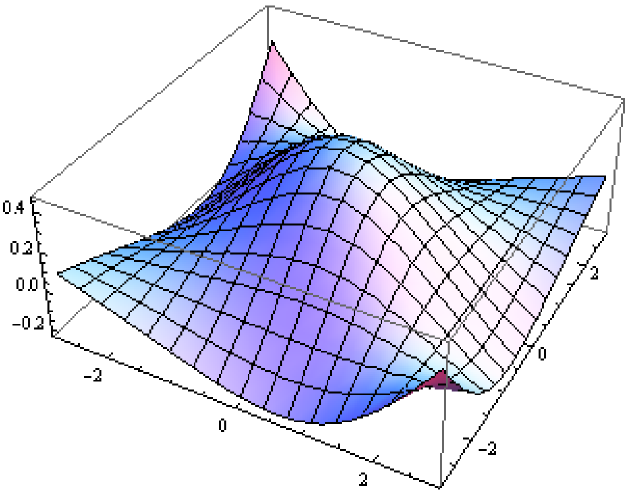
$$\mathcal{R}_{(a,b)}(z, w) = \sum_{\substack{m\geq 0 \\ n\geq 0 \\ m+n\geq 1}} R_{m,n}(a, b)z^m w^n.$$

Así que concluimos de las dos expresiones que los cumulantes de ν_2 de orden 1 y de orden ≥ 3 son cero y por tanto es una distribución de límite central con matriz de covarianzas Ω. Como la matriz de covarianzas determina de manera única a la distribución de límite central entonces $\nu_2 = \nu$. Por lo que podemos concluir que una distribución es distribución de límite central si y sólo si es un límite como el descrito en el párrafo anterior. Observe también que las marginales de ν tienen transformada R libre de una semicírculo.

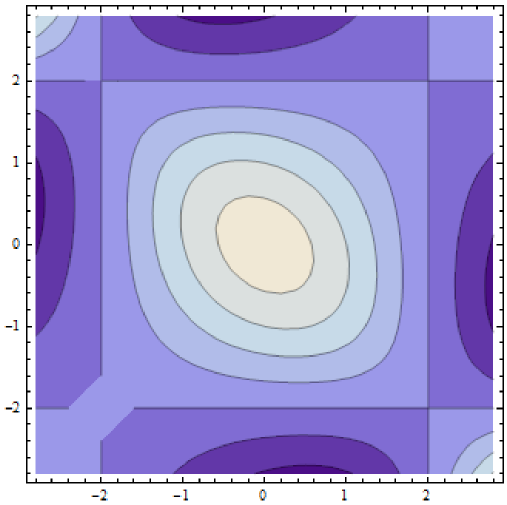
El criterio de convergencia del último corolario garantiza que la distribución ν tiene soporte compacto y es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue $dsdt$ en $\mathbb{R}^2$, siempre que $|c| < \sqrt{ab}$. El caso estándar $a = b = 1$, es el que corresponde al teorema de límite central bi-libre. Para el caso estándar, Huang y Wang obtienen en [30] una expresión, usando la fórmula de inversión con la que iniciamos el capítulo 3. Ellos obtienen para $|c| < 1$,

$$d\nu = \frac{1 - c^2}{2\pi^2} \frac{\sqrt{4 - s^2}\sqrt{4 - t^2}}{2(1 - c^2)^2 - c(1 + c^2)st + 2c^2(s^2 + t^2)}\, dsdt, \tag{5.2}$$

donde $-2 \leq s, t \leq 2$. Observemos que si las marginales son no correlacionadas es decir $c = 0$, obtenemos $\nu = \mathcal{S} \times \mathcal{S}$, la medida producto de dos leyes semicírculo estándar $\mathcal{S}$. Por tal motivo, a la medida ν de la expresión 5.2 la llamamos *distribución bisemicircular* o *bisemicírculo* con coeficiente de correlación c, y al caso $c = 0$ lo llamamos *bisemicírculo estándar*. El caso $|c| = 1$ corresponde a una medida de probabilidad que no es llena, i.e, con soporte concentrado en una linea recta en el plano. A continuación presentamos algunas gráficas de la densidad 5.2 para diferentes parámetros c.

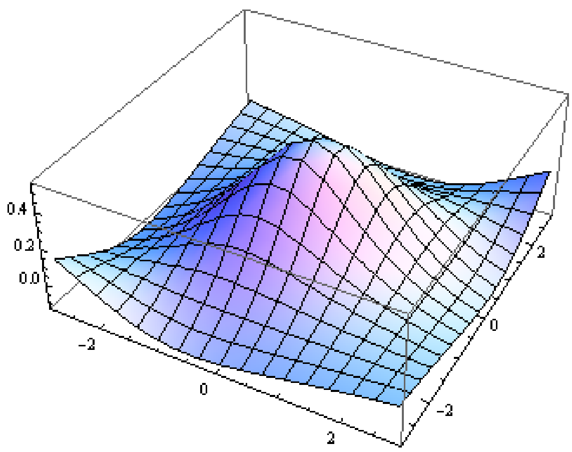


(a) Gráfica

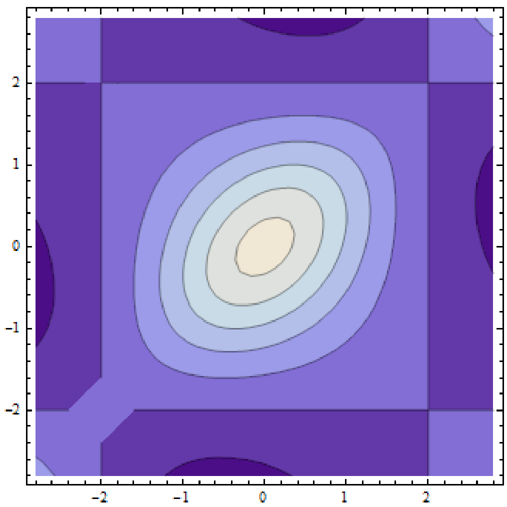


(b) Gráfica de contorno

Figura 5.1: Distribución bisemicírculo con $c = -1/3$

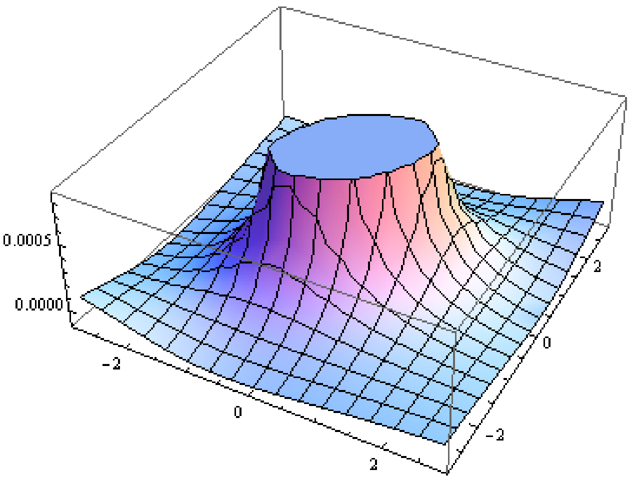


(a) Gráfica

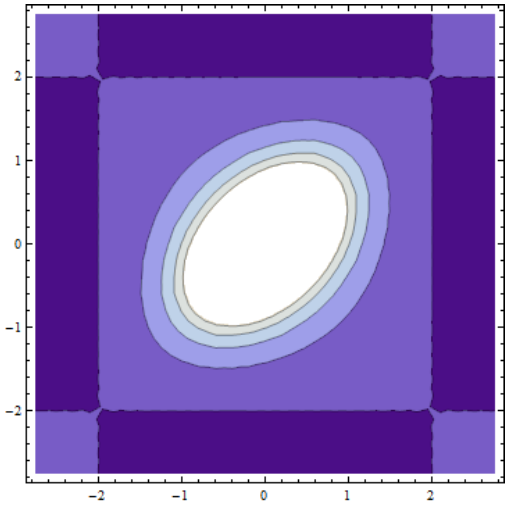


(b) Gráfica de contorno

Figura 5.2: Distribución bisemicírculo con $c = 1/2$

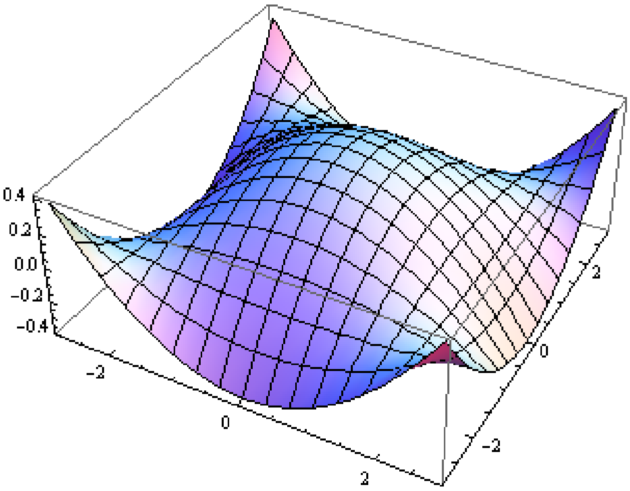


(a) Gráfica

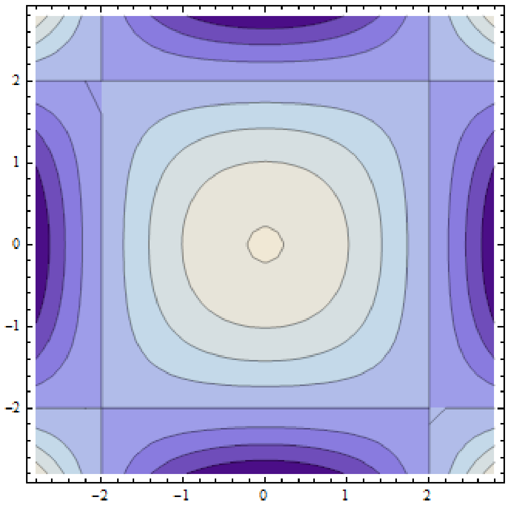


(b) Gráfica de contorno

Figura 5.3: Distribución bisemicírculo con $c = 0.999$



(a) Gráfica



(b) Gráfica de contorno

Figura 5.4: Distribución bisemicírculo estándar ($c = 0$)

Ahora consideremos $c \in [-1, 1]$ y Z_1, Z_2 dos variables aleatorias independientes en el sentido clásico e idénticamente distribuidas con distribución $(1/2)\delta_{-1} + (1/2)\delta_1$, y sea μ_n la distribución del vector aleatorio

$$(X_n, Y_n) = (\sqrt{(1+c)/2n}Z_1 - \sqrt{(1-c)/2n}Z_2, \sqrt{(1+c)/2n}Z_1 - \sqrt{(1-c)/2n}Z_2),$$

y como el dominio de atracción de la distribución normal estándar coincide con el de $\mathcal{S}$, la convergencia débil de marginales $[\mu_n^{(j)}]^{\boxplus n} \Rightarrow \mathcal{S}$ se tiene para $j = 1, 2$. Por otro lado, el límite puntual

$$D(z,w) = \lim_{n\to\infty} n\mathbb{E}\left[\frac{zwX_nY_n}{(1-zX_n)(1-wY_n)}\right] = czw = G_{c\delta_{(0,0)}}(1/z, 1/w),$$

implica la convergencia débil $\rho_n \Rightarrow c\delta_{(0,0)}$. Por lo que la distribución límite es precisamente la distribución bisemicírculo con parámetro c. El caso general para a, b se sigue de un argumento parecido, re-escalando.

Podemos considerar una familia un poco más amplia, que corresponde a los límites ν, obtenidos al considerar en el teorema 5.3.1 γ_1, γ_2 arbitrarios, y $\sigma_1 = a\delta_0$, $\sigma_2 = b\delta_0$ y $\rho = c\delta_{(0,0)}$. En ese caso, $\mathcal{R}_{\nu_{\boxplus}^{\gamma_1,\sigma_1}}(z) = \gamma_1 + az$, $\mathcal{R}_{\nu_{\boxplus}^{\gamma_2,\sigma_2}}(w) = \gamma_2 + bw$ y $D(z,w) = czw$, y por tanto

$$\mathcal{R}_\nu(z,w) = \gamma_1 z + \gamma_2 w + az^2 + bw^2 + czw.$$

A esta clase límite la llamamos *distribuciones gaussianas bi-libres* con media (γ_1, γ_2) y matriz de covarianzas

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}.$$

Obviamente las distribuciones bisemicirculares son distribuciones gaussianas bi-libres con media $(0,0)$ y matriz de covarianzas de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix},$$

Otra manera de obtener las distribuciones bisemicirculares es considerando el espacio de Fock libre.
Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y consideremos en el C^*-espacio de probabilidad $(B(\mathcal{F}(\mathcal{H})), \tau_{\mathcal{H}})$ las variables $a = l(f) + l^*(f)$ y $b = r(g) + r^*(g)$, donde $f, g \in \mathcal{H}$ son tal que $Im\langle f, g\rangle = 0$. Por la proposición 5.1.5, a, b conmutan y son $\boxplus$-infinitamente divisibles, además dedicamos un tiempo a demostrar que los únicos cumulantes de (a, b) que no se anulan son

$$\kappa_{2,0}^\mu = \|f\|^2, \quad \kappa_{0,2}^\mu = \|g\|^2, \quad \kappa_{1,1}^\mu = \langle f, g\rangle,$$

donde μ denota la distribución de (a, b). Entonces,

$$\mathcal{R}_\mu(z,w) = \|f\|^2 z^2 + \langle f, g\rangle zw + \|g\|^2 w^2,$$

y concluimos de la representación de Lévy-Hincin para medidas con soporte compacto que μ es $\boxplus\boxplus$-infinitamente divisible con $\rho_1 = \|f\|^2\delta_{(0,0)}$, $\rho_2 = \|g\|^2\delta_{(0,0)}$ y $\rho_1 = \langle f, g\rangle\delta_{(0,0)}$. Puede verse de esto que la distribución de (a, b) es bisemicircular, en el caso en que $\|f\| = \|g\| = 1$, con parámetro $\langle f, g\rangle$, que por la desigualdad de Cauchy-Schwarz cumple las condiciones anteriores. Esto generaliza lo ocurrido en el caso libre, en el cual sabemos que a, b son variables semicirculares.

5.4.2 Leyes Poisson compuestas

Sea $\lambda > 0$ y $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Para $N \in \mathbb{N}$, sea

$$\mu_N = (1 - \frac{\lambda}{N})\delta_{(0,0)} + \frac{\lambda}{N}\delta_{(\alpha,\beta)},$$

y sean $\{(a_{N;k}, b_{N;k})\}_{k=1}^{N}$ variables de dos caras bipartitas, bi-libres, idénticamente distribuidas y autoadjuntas con distribución μ_N en algún C^*-espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}_N, \varphi_N)$. Nótese que para $m, n \geq 0,\ m + n \geq 1$ tenemos

$$\kappa_{m,n} = N \cdot \varphi_N(a_{N;1}^m b_{N;1}^n) = N \cdot \frac{\lambda}{N}\alpha^m \beta^n = \lambda\alpha^m\beta^n.$$

Entonces por el teorema 5.1.3 existe una variable de dos caras bipartita (a, b) en algún espacio de probabilidad no conmutativa $(\mathcal{A}, \varphi)$ tal que los cumulantes bi-libres $\kappa_{m,n}^{(a,b)}$ de (a, b) coinciden con $\kappa_{m,n}$, y los momentos mixtos $\int_{\mathbb{R}^2} s^m t^n \, d\mu_N^{\boxplus\boxplus N}$ converge a $\varphi(a^m b^n)$ para $m, n \geq 0,\ N \to \infty$. Sea

$$\kappa_\pi(a, b) = \kappa_\pi(\underbrace{a, ..., a}_{m \text{ veces}}, \underbrace{b, ..., b}_{n \text{ veces}}),$$

para $\pi \in NC(m + n)$ y $L = \max\{1, \lambda, |\alpha|, |\beta|\}$. Entonces, usando la fórmula momento cumulante y las desigualdades $|\kappa_{m,n}| \leq (L^2)^{m+n}$ y el hecho de que $|NC(k)| = \mathcal{C}_k \leq 4^k$ (donde $\mathcal{C}_k$ es el k-ésimo número de Catalan), tenemos

$$|\varphi(a^m b^n)| \leq \sum_{\pi \in NC(m+n)} |\kappa_\pi(a, b)| \leq (L^2)^{m+n} \cdot |NC(m + n)| \leq (4L^2)^{m+n},$$

Y por tanto, la distribución del par (a, b) es alguna medida de probabilidad en el plano con soporte compacto μ y $\kappa_{m,n} = \kappa_{m,n}^{\mu}$. Finalmente, un simple cálculo muestra que

$$\begin{aligned} R_\mu(z, w) &= \sum_{m,n \geq 0,\ m+n \geq 1} \lambda(\alpha z)^m (\beta w)^n \\ &= \lambda z \left[\alpha + \frac{\alpha^2 z}{1 - \alpha z}\right] + \lambda w \left[\beta + \frac{\beta^2 w}{1 - \beta w}\right] + \frac{\lambda\alpha\beta z w}{(1 - \alpha z)(1 - \beta w)}, \end{aligned}$$

y por la fórmula tipo Lévy-Hincin para medidas con soporte compacto concluimos que μ es $\boxplus\boxplus$-infinitamente divisible con $\rho_1 = \lambda s^2 \delta_{(\alpha,\beta)},\ \rho_2 = \lambda t^2 \delta_{(\alpha,\beta)}$ y $\rho = \lambda st\delta_{(\alpha,\beta)}$. Observe también que la función

$$\mathcal{R}(z) = \lambda \left[\alpha + \frac{\alpha^2 z}{1 - \alpha z}\right],$$

es la transformada R (univariada) de la distribución de Poisson libre con tasa λ e intensidad de salto α. Lo anterior motiva a que llamemos a μ la *Distribución Poisson bi-libre* con tasa λ e intensidad de salto (α, β).

La idea ahora es generalizar lo anterior; sean $\lambda > 0$ un parámetro y $\mu \neq \delta_{(0,0)}$ una medida de probabilidad en $\mathbb{R}^2$. Consideremos,

$$\mu_n = (1 - \frac{\lambda}{n})\delta_{(0,0)} + (\frac{\lambda}{n})\mu, \quad n \geq 1.$$

Se puede ver que la convoluciones libres marginales $[\mu_n^{(j)}]^{\boxplus n}$, donde $\mu_n^{(j)} = (1-\lambda/n)\delta_0 + (\lambda/n)\mu^{(j)}$, convergen débilmente a una ley poisson compuesta libre con par generador

$$\gamma_j = \lambda \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{x}{1+x^2}\, d\mu^{(j)}(x), \qquad d\sigma_j(x) = \frac{\lambda x^2}{1+x^2}\, d\mu^{(j)}(x),$$

y las medidas con signo ρ_n converge débilmente en $\mathbb{R}^2$ a

$$\rho = \frac{\lambda st}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+t^2}}\, d\mu(s,t),$$

Entonces por el teorema 5.3.3 el límite $R = \lim_{n\to\infty} n\mathcal{R}_{\mu_n}$ existe y tiene representación integral $R(z,w) = \lambda[(1/zw)G_\mu(1/z,1/w) - 1]$ o equivalentemente

$$R(z,w) = -\lambda + \lambda \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1-zs)(1-wt)}\, d\mu(s,t) \quad z,w \notin \mathbb{R},$$

la última integral es de hecho la transformada R bi-libre de una única distribución de probabilidad $\nu_{\lambda,\mu}$, a tal distribución la llamamos *ley Poisson compuesta bi-libre* con tasa λ y saltos μ. Para demostrar la existencia de $\nu_{\lambda,\mu}$, procedemos por método de truncamiento. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea f_m una función continua con soporte compacto tal que $0 \leq f_m \leq 1$ y $f_m(s,t) = 1$ para $(s,t) \in K_m = \{(s,t) \ : \ |s| \leq m, |t| \leq m\}$ y f_m es cero en el complemento $\mathbb{R}^2 \setminus K_{m+1}$. Para m suficientemente grande, introducimos el siguiente truncamiento

$$d\mu^m = c_m f_m d\mu,$$

donde la constante de normalización c_m es elegida tal que $\mu^m(\mathbb{R}^2) = 1$. Por el teorema de convergencia dominada, $c_m \to 1$ y $\mu^m \Rightarrow \mu$ en $\mathbb{R}^2$ cuando $m \to \infty$. Nuestro corolario "criterio de convergencia" nos provee una ley ν_{λ,μ^m} cuya transformada está dada por

$$\mathcal{R}_{\nu_{\lambda,\mu^m}}(z,w) = \lambda[(1/zw)G_{\mu^m}(1/z,1/w) - 1], \quad z,w \in \mathbb{R},$$

y por tanto la convergencia débil $\mu^m \Rightarrow \mu$ implica que $\{\mathcal{R}_{\nu_{\lambda,\mu^m}}\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a la integral R y $\mathcal{R}_{\nu_{\lambda,\mu^m}}(-iy,-iv) \to 0$ uniformemente en m cuando $y,v \to 0^+$. Pero esto último garantizan que las distribuciones ν_{λ,μ^m} convergen débilmente a una única distribución límite $\nu_{\lambda,\mu}$ y $R = \mathcal{R}_{\nu_{\lambda,\mu}}$. Obviamente, la distribución de Poisson bi-libre es un caso particular de esta clase, al tomar $\mu = \delta_{(\alpha,\beta)}$.

5.4.3 Producto de medidas infinitamente divisibles

Todas las medidas "deltas de dirac" son infinitamente divisibles bi-libres. Una manera menos trivial de construir medidas infinitamente divisibles bi-libres es haciendo el producto de dos leyes

$\boxplus$-infinitamente divisibles. Esto es muy sencillo de ver, ya que si (γ_1, σ_1), y (γ_2, σ_2) son pares generadores entonces la fórmula de Lévy-Hincin unidimensional y nuestros resultados anteriores implican que la medida producto

$$\nu = \nu_{\boxplus}^{\gamma_1,\sigma_1} \otimes \nu_{\boxplus}^{\gamma_2,\sigma_2},$$

en $\mathbb{R}^2$ tiene transformada R bi-libre

$$R_\nu(z,w) = z\left[\gamma_1 + \int_{\mathbb{R}} \frac{z+s}{1-zs}\, d\sigma_1(s)\right] + w\left[\gamma_2 + \int_{\mathbb{R}} \frac{w+t}{1-wt}\, d\sigma_2(t)\right],$$

para $(z,w) \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^2$. Es obvio que $\mathcal{R}_\nu/m$ es la transformada R bi-libre de la correspondiente medida producto

$$\nu_{\boxplus}^{\gamma_1/m,\sigma_1/m} \otimes \nu_{\boxplus}^{\gamma_2/m,\sigma_2/m},$$

para todo $m \geq 2$.

5.5 Caracterizaciones importantes

Comenzamos esta sección con un teorema, que, junto con los resultados anteriores nos dan una respuesta completa al problema central 5.0.1.

Teorema 5.5.1 (Caracterización tipo Hincin) *[30, Teo. 3.9] Sea ν una medida de probabilidad en $\mathbb{R}^2$, y sea $\mathcal{R}_\nu$ su transformada R definida en un dominio Ω. La ley ν es infinitamente divisible bi-libre si y sólo si existen medidas de probabilidad μ_n en $\mathbb{R}^2$ y enteros positivos $k_n \to \infty$, tal que $[\mu_n^{(j)}]^{\boxplus k_n} \Rightarrow \nu^{(j)}$, $j = 1,2$ y $\mathcal{R}_\nu = \lim_{n\to\infty} k_n \mathcal{R}_{\mu_n}$ en Ω.*

Demostración. El "sólo si" es el resultado del teorema 5.3.1. Para el "si" debemos probar que el límite

$$\mathcal{R}_\nu/m = \lim_{n\to\infty} [k_n/m]\mathcal{R}_{\mu_n},$$

es una transformada R bi-libre, pero eso es consecuencia del teorema 5.3.3. ∎

En probabilidad libre, toda distribución infinitamente divisible es límite de distribuciones Poisson compuestas. Ese resultado es útil, y la prueba del teorema 5.3.3 nos hace pensar que ese resultado también es cierto en probabilidad bi-libre, para demostrarlo necesitamos un lema.

Lema 5.5.2 *Sean τ y τ' dos medidas de Borel finitas positivas en $\mathbb{R}^2$ que satisfacen*

$$\frac{t^2}{1+t^2} d\tau(s,t) = \frac{t^2}{1+t^2} d\tau'(s,t),$$

en la σ-álgebra de $\mathbb{R}^2$ y tienen las mismas marginales

$$\tau \circ \pi_1^{-1} = \tau' \circ \pi_1^{-1},$$

con respecto a la proyección $\pi_1(s,t) = s$. Entonces $\tau = \tau'$.

Demostración. Es suficiente probar el resultado para todo rectángulo abierto $E = I \times (a, b)$, donde $I, (a, b)$ intervalos (no necesariamente acotados en $\mathbb{R}$) y de hecho si $a > 0$ o $b < 0$, es inmediato. Si $a = 0$, por la continuidad de τ y τ' tenemos $\tau(E) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \tau(I \times (\epsilon, b)) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \tau'(I \times (\epsilon, b)) = \tau'(E)$. Similarmente si $b = 0$. Por otro lado, de la hipótesis de las marginales tenemos $\tau((a, b) \times \mathbb{R}) = \tau'((a, b) \times \mathbb{R})$ y por tanto se tiene el caso $(a, b) = (0, \infty)$ y $(a, b) = (-\infty, 0)$, y vemos que $\tau((a, b) \times \{0\}) = \tau'((a, b) \times \{0\})$. En general, si $c < 0 < d$ aplicando lo anterior a los conjuntos $(a, b) \times (0, d)$, $(a, b) \times \{0\}$ y $(a, b) \times (c, 0)$ se tiene el resultado. ■

Teorema 5.5.3 (Convergencia de leyes Poisson) *[30, Prop. 3.11] Sea ν una medida de probabilidad en $\mathbb{R}^2$. Entonces ν es infinitamente divisible bi-libre si y sólo si existen medidas μ_n en $\mathbb{R}^2$ y enteros positivos $k_n \to \infty$ tal que las leyes Poisson compuestas bi-libres ν_{k_n,μ_n} convergen débilmente a la medida ν.*

Demostración. La aproximación Poisson $\nu_{k_n,\mu_n} \Rightarrow \nu$ se tiene para una subsucesión de enteros siempre y cuando se tengan las convergencias débiles

$$\frac{k_n s^2}{1 + s^2} d\mu_n(s, t) \Rightarrow \tau_1, \quad \frac{k_n t^2}{1 + t^2} d\mu_n(s, t) \Rightarrow \tau_2,$$

y

$$\frac{k_n st}{\sqrt{1 + s^2}\sqrt{1 + t^2}} d\mu_n(s, t) \Rightarrow \rho,$$

sobre la misma subsucesión. Es fácil verificar que los límites débiles τ_1 y ρ deben satisfacer

$$\frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} d\tau_1(s, t) = \frac{s}{\sqrt{1 + s^2}} d\rho(s, t),$$

en $\mathbb{R}^2$. De hecho las hipótesis del lema anterior se satisfacen para cualquier límite débil τ y τ' de la sucesión $k_n s^2/(1 + s^2) d\mu_n$, por lo que $\tau = \tau'$. Similarmente para τ_2. De hecho las convergencias débiles se tienen sin pasar a las subsucesiones, tal como la aproximación de Poisson a ν. ■

Otras caracterizaciones importantes involucran semigrupos aditivos, pero eso lo discutiremos en la siguiente sección. También definimos la convolución bi-libre para medidas con soporte no necesariamente compacto, pero infinitamente divisibles.

5.6 Procesos de Lévy y semigrupos

Recordemos que la forma integral de la transformada R de una medida $\nu \in \mathcal{BID}$ (medidas infinitamente divisibles bi-libres) está dada por

$$\mathcal{R}_\nu(z, w) = z\mathcal{R}_{\nu_{\boxplus}^{\gamma_1,\sigma_1}}(z) + w\mathcal{R}_{\nu_{\boxplus}^{\gamma_2,\sigma_2}}(w) + G_{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+t^2}d\rho}(1/z, 1/w),$$

donde $\nu_{\boxplus}^{\gamma_j,\sigma_j}$, $j = 1, 2$ y ρ son las leyes límites del teorema 5.3.1. La quintupla $\Gamma(\nu) = (\gamma_1, \gamma_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$ es única para cada medida infinitamente divisible bi-libre y es independiente de las sucesiones $\{\mu_n\}$, $\{k_n\}$, que usemos para obtenerla. Al ser límites, tales quintuplas son cerradas bajo suma y multiplicación por escalar real componente a componente. Esto implica que la convolución bi-libre $\boxplus\boxplus$ se puede extender de medidas con soporte compacto a medidas infinitamente divisibles bi-libres; Para cada $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{BID}$, su convolución bi-libre $\nu_1 \boxplus\boxplus \nu_2$ se puede definir como la única distribución infinitamente divisible bi-libre tal que

$$\Gamma(\nu_1 \boxplus\boxplus \nu_2) = \Gamma(\nu_1) + \Gamma(\nu_2),$$

Pongamos esto en la siguiente proposición, de una manera más formal.

Proposición 5.6.1 (Convolución bi-libre aditiva generalizada) *Existe una operación binaria asociativa y conmutativa* $\boxplus\boxplus : \mathcal{BID} \times \mathcal{BID} \to \mathcal{BID}$*, tal que para cada* $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{BID}$*, la relación*

$$\mathcal{R}_{\nu_1 \boxplus\boxplus \nu_2} = \mathcal{R}_{\nu_1} + \mathcal{R}_{\nu_2},$$

se tiene en $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^2$.

Además, la aplicación Γ es inyectiva y débilmente continua, es decir, si $\Gamma(\nu_n) = (\gamma_{1n}, \gamma_{2n}, \sigma_{1n}, \sigma_{2n}, \rho_n)$ y $\Gamma(\nu) = (\gamma_1, \gamma_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$, entonces $\nu_n \Rightarrow \nu$ implica que $\gamma_{jn} \to \gamma_j$, $\sigma_{jn} \Rightarrow \sigma_j$ y $\rho_n \Rightarrow \rho$, cuando $n \to \infty$, para $j = 1, 2$. Sin embargo, la aplicación Γ no es sobreyectiva y su rango será estudiado más adelante.

Dada una medida $\nu \in \mathcal{BID}$, hemos visto que para cada $t > 0$, existe una única ley $\nu_t \in \mathcal{BID}$ tal que

$$\mathcal{R}_{\nu_t} = \lim_{n\to\infty} [tk_n] \mathcal{R}_{\mu_n} = t\mathcal{R}_\nu,$$

en $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^2$, donde $\mathcal{R}_\nu = \lim_{n\to\infty} k_n \mathcal{R}_{\mu_n}$ para algunos $\{\mu_n\}$, $\{k_n\}$ (como ya mencionamos la construcción de ν_t es independiente de esa elección). Fijando $\nu_0 = \delta_{(0,0)}$, tenemos

$$\Gamma(\nu_t) = t\Gamma(\nu),$$

y la familia resultante $\{\nu_t\}_{t\geq 0}$ forma un semigrupo débilmente continuo de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}^2$ bajo la convolución bi-libre (generalizada) $\boxplus\boxplus$ en el sentido que

$$\nu_{s+t} = \nu_s \boxplus\boxplus \nu_t, \quad s, t \geq 0,$$

y $\nu_t \Rightarrow \nu_0 = \delta_{(0,0)}$ cuando $t \to 0^+$. Recíprocamente, si $\{\nu_t\}_{t\geq 0}$ es un $\boxplus\boxplus$-semigrupo débilmente continuo de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}^2$, entonces cada ν_t es infinitamente divisible bi-libre. En particular, la ley ν_1 pertenece a la clase $\mathcal{BID}$ y genera al proceso $\{\nu_t\}_{t\geq 0}$ en términos de la transformada R bi-libre. Ponemos todo esto en la siguiente proposición, que nos da una caracterización más, aunque la demostración formal la haremos cuando definamos Procesos de Lévy bi-libres.

Proposición 5.6.2 (Propiedad de Incrustación) *Sea* ν *medida de probabilidad en* $\mathbb{R}^2$*. Entonces* $\nu \in \mathcal{BID}$ *si y sólo si existe un* $\boxplus\boxplus$*-semigrupo débilmente continuo* $\{\nu_t\}_{t\geq 0}$ *de medidas de probabilidad en* $\mathbb{R}^2$*, que satisface* $\nu_1 = \nu$ *y* $\mathcal{R}_{\nu_t} = t\mathcal{R}_\nu$ *en* $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^2$.

Notemos que las marginales $\{\nu_t^{(j)}\}_{t\geq 0}$ de un $\boxplus\boxplus$-semigrupo $\{\nu_t\}_{t\geq 0}$ forman también un semigrupo continuo respecto a la convolución libre en $\mathbb{R}$, y se tiene que

$$\mathcal{R}_{\nu_t^{(j)}}(z) = t\mathcal{R}_{\nu^{(j)}}(z), \quad Im(z) \neq 0,$$

para las transformadas R unidimensionales. El análisis armónico libre que hacen en [14] muestra que la dinámica del proceso $\{\nu_t^{(j)}\}_{t\geq 0}$ está gobernada por las ecuaciones diferenciales parciales complejas tipo Burgers

$$\partial_t G_{\nu_t^{(j)}}(z) + \mathcal{R}_{\nu_t^{(j)}}(G_{\nu_t^{(j)}}(z))\partial_z G_{\nu_t^{(j)}}(z) = 0,$$

en el plano superior, para $t \geq 0$, donde la derivada respecto al tiempo de $G_{\nu_t^{(j)}}(z)$ en $t = 0$ es igual a la transformada R unidimensional $R_{\nu^{(j)}}(z)$. Definamos ahora los procesos de Lévy bi-libres.

Definición 5.6.3 Un *Proceso de Lévy bi-libre* $(Z_t)_{t\geq 0}$ es una familia de variables de dos caras bipartitas y autoadjuntas en algún C^*-espacio (común) de probabilidad no conmutativo, esto es, $Z_t = (X_t, Y_t)$, donde $X_t = X_t^*,\ Y_t = Y_t^*$, y $[X_t, Y_t] = 0$, con las siguientes propiedades

i) $Z_0 = (0, 0)$.

ii) Para cualquier $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, los incrementos

$$Z_{t_0}, Z_{t_1} - Z_{t_0}, Z_{t_2} - Z_{t_1}, ..., Z_{t_n} - Z_{t_{n-1}},$$

son bi-libres, donde $Z_t - Z_s = (X_t - X_s, Y_t - Y_s)$.

iii) Para $s, t \geq 0$, la distribución de $Z_{s+t} - Z_s$ depende sólo de t.

iv) La distribución de Z_t tiende a $\delta_{(0,0)}$ débilmente cuando $t \to 0^+$.

Análogo al caso libre, tenemos la siguiente relación entre procesos de Lévy bi-libres y distribuciones $\boxplus\boxplus$-infinitamente divisibles.

Teorema 5.6.4 *[25, Teo. 4.2]*

1. *Sea $(Z_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Lévy bi-libre, y sea μ_t la distribución de Z_t, $t \geq 0$. Entonces, μ_1 es $\boxplus\boxplus$-infinitamente divisible, y para cada $T > 0$, las distribuciones $(\mu_t)_{0\geq t\geq T}$ tienen soportes uniformemente acotados. Mas aún, la familia $(\mu_t)_{t\geq 0}$ satisface la propiedad aditiva del semigrupo bi-libre*

$$\mu_s \boxplus\boxplus \mu_t = \mu_{s+t}, \quad s, t \geq 0,$$

y para cada $t \geq 0$, la identidad

$$\mathcal{R}_{\mu_t}(z, w) = t\mathcal{R}_{\mu_1}(z, w),$$

se tiene en una vecindad de $(0, 0)$.

2. *Para cada medida con soporte compacto en el plano $\mu \in \mathcal{BID}$, existe un proceso de Lévy bi-libre $(Z_t)_{t\geq 0}$ tal que la distribución de Z_1 es igual a μ.*

Demostración. Probemos la segunda afirmación. Sean $f, g \in \mathcal{H}$, espacio de Hilbert, y los operadores

$$a = l(f) + l^*(f) + \Lambda_l(T_1) + \kappa_{1,0}^{\mu},$$
$$b = r(g) + r^*(g) + \Lambda_r(T_2) + \kappa_{0,1}^{\mu},$$

en $B(\mathcal{H})$. Sean $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}_+, dx) \otimes \mathcal{H}$. Para cada conjunto de Borel I en $\mathbb{R}_+$, denotemos por χ_I la función $= 1$ en I y $= 0$ en otro caso, y M_I el operador multiplicación por χ_I en $B(L^2(\mathbb{R}_+, dx))$. Además sea

$$f_I = \chi_I \otimes f, \; g_I = \chi_I \otimes g, \; A_I = M_I \otimes T_1, \quad \text{y} \quad B_I = M_I \otimes T_2.$$

Consideremos ahora la familia $(Z_t)_{t\geq 0} = ((X_t, Y_t))_{t\geq 0}$, donde

$$\begin{aligned} X_t &= l(f_{[0,t]}) + l^*(f_{[0,t]}) + \Lambda_l(A_{[0,t]}) + t \cdot \kappa^{\mu}_{1,0}, \\ Y_t &= r(g_{[0,t]}) + r^*(g_{[0,t]}) + \Lambda_r(B_{[0,t]}) + t \cdot \kappa^{\mu}_{0,1}, \end{aligned}$$

son variables aleatorias autoadjuntas que conmutan en el C^*-espacio de probabilidad no conmutativo $(B(\mathcal{F}(\mathcal{K})), \tau_{\mathcal{K}})$. Claramente la primera y segunda condición de la definición de procesos de Lévy se cumplen para la familia $(Z_t)_{t\geq 0}$, ya que $\{L^2((t_j, t_{j+1}], dx) \otimes \mathcal{H}\}_{0\leq j\leq n-1}$ son espacios de Hilbert ortogonales. Además los cumulantes bi-libres de $Z_{s+t} - Z_s$ están dados por

$$\begin{aligned} \kappa_{m,n} &= \langle (M_{(s,s+t]} \otimes T_1)^{m-1}(\chi_{(s,s+t]} \otimes f), (M_{(s,s+t]} \otimes T_2)^{n-1}(\chi_{(s,s+t]} \otimes g)\rangle \\ &= \langle \chi_{(s,s+t]} \otimes T_1^{m-1} f, \chi_{(s,s+t]} \otimes T_2^{n-1} g\rangle \\ &= t\langle T_1^{m-1} f, T_2^{n-1} g\rangle = t\kappa^{Z_1}_{m,n}, \end{aligned}$$

para $m, n \geq 1$, donde $\kappa^{Z_1}_{m,n}$ denota los cumulantes bi-libres de Z_1, y

$$\begin{aligned} \kappa_{m,0} &= \langle (M_{(s,s+t]} \otimes T_1)^{m-2}(\chi_{(s,s+t]} \otimes f), (\chi_{(s,s+t]} \otimes f)\rangle \\ &\langle \chi_{(s,s+t]} \otimes T_1^{m-2} f, \chi_{(s,s+t]} \otimes f\rangle = t\kappa^{Z_1}_{m,0}, \end{aligned}$$

para $m \geq 0$. Similarmente, tenemos $\kappa_{0,n} = t\kappa^{Z_1}_{0,n}$, para $n \geq 2$. Y $\kappa_{1,0} = t\kappa^{Z_1}_{1,0}$. Y como los cumulantes de $Z_{s+t} - Z_s$ dependen sólo de t, entonces también la distribución de $Z_{s+t} - Z_s$, y se tiene la tercera afirmación. Notemos que eso demuestra también que los cumulantes bi-libres de Z_1 coinciden con los de μ. Para finalizar la prueba, falta demostrar que $\mu_t \Rightarrow \delta_{(0,0)}$ cuando $t \to 0^+$. Y como $\sup_{0\leq t\leq 1}\{\|X_t\|, \|Y_t\|\} < \infty$, sólo hay que probar que los momentos mixtos de μ_t convergen a 0, cuando $t \to 0^+$, pues los soportes de μ_t son uniformemente acotados. Usando el hecho que $\kappa^{Z_t}_{m,n} = t\kappa^{Z_1}_{m,n} \to 0$, cuando $t \to 0^+$, de donde se tiene el resultado.

Probemos ahora la primera afirmación, sea $(Z_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Lévy bi-libre con distribuciones $(\mu_t)_{t\geq 0}$. Entonces tenemos $Z_s - Z_0$ y $Z_{s+t} - Z_s$ son bi-libres y $Z_{t+s} = (Z_s - Z_0) + (Z_{s+t} - Z_s)$. Esto muestra que $\mu_s \boxplus\boxplus \mu_t = \mu_{s+t}$ para $s, t \geq 0$. Por la propiedad de semigrupo, μ_1 es $\boxplus\boxplus$-infinitamente divisible y por la afirmación que probamos antes existe un semigrupo aditivo bi-libre $(\nu_t)_{t\geq 0}$tal que $\nu_1 = \mu$, $\nu_t \Rightarrow \delta_{(0,0)}$ cuando $t \to 0^+$, y $\mathcal{R}_{\nu_t} = t\mathcal{R}_{\mu_1}$. Por la propiedad de semigrupo tenemos

$$\underbrace{\mu_{1/q} \boxplus\boxplus \cdots \boxplus\boxplus \mu_{1/q}}_{q \text{ veces}} = \underbrace{\nu_{1/q} \boxplus\boxplus \cdots \boxplus\boxplus \nu_{1/q}}_{q \text{ veces}},$$

para todo $q \in \mathbb{N}$; así, $q\kappa^{\mu_1/q}_{m,n} = q\kappa^{\nu_1/q}_{m,n}$ para todo $m, n \geq 0$, $m + n \geq 1$ por la aditividad de los cumulantes bi-libres, y el hecho de que los cumulantes bi-libres mixtos se anulan. Esto muestra que

$\mu_{1/q} = \nu_{1/q}$ para todo $q \in \mathbb{N}$ y así

$$\mu_{p/q} = \underbrace{\mu_{1/q} \boxplus\boxplus \cdots \boxplus\boxplus \mu_{1/q}}_{p \text{ veces}} = \underbrace{\nu_{1/q} \boxplus\boxplus \cdots \boxplus\boxplus \nu_{1/q}}_{p \text{ veces}} = \nu_{p/q},$$

para todo $p/q \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$. Por la propiedad de semigrupo de nuevo, la continuidad en 0 implica la continuidad en cualquier t, por lo que $\mu_t = \nu_t$ para todo $t \geq 0$. Entonces $\mathcal{R}_{\mu_t} = t\mathcal{R}_{\mu_1}$, como se quería. ∎

Terminamos mencionando que en el artículo de Gu, Huang y Mingo [25], hacen la prueba del siguiente teorema, utilizando *compresiones* $(p\mathcal{A}p, \varphi^{p\mathcal{A}p})$, tal como en el libro [35].

Teorema 5.6.5 *[25, Teo. 5.3] Sea μ una medida de probabilidad con soporte compacto en $\mathbb{R}^2$; entonces, existe un semigrupo aditivo $(\mu_t)_{t\geq 1}$ de medidas de probabilidad con soporte compacto en $\mathbb{R}^2$ tal que $\mu_1 = \mu$ y $\mu_s \boxplus\boxplus \mu_t = \mu_{s+t}$ para todo $s, t \geq 1$ y la aplicación $t \mapsto \mu_t$ es continuo con respecto a la topología débil-$*$ en las medidas de probabilidad en el plano.*

5.6.1 Representación de Lévy-Hincin: caso general

Empecemos asumiendo que ν es una medida con soporte compacto, y por tanto su transformada R $\mathcal{R}_\nu$ puede escribirse como una serie de potencias absolutamente convergente con coeficientes reales

$$\mathcal{R}_\nu(z, w) = \sum_{m,n\geq 0} \kappa_{m,n} z^m w^n,$$

en algún disco $\Omega = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \ : \ |z|, |w| < r\}$. Nótese que como $\kappa_{0,0} = 0, z\mathcal{R}_{\nu^{(1)}}(z) = \mathcal{R}_\nu(z, 0)$ y $w\mathcal{R}_{\nu^{(2)}}(w) = \mathcal{R}_\nu(0, w)$, entonces $\mathcal{R}_{\nu^{(1)}}$ y $\mathcal{R}_{\nu^{(2)}}$ también tienen una expresión convergente en series de potencias y son uniformemente acotadas en Ω y así, la propiedad de semigrupo muestra que $\mathcal{R}_{\nu_t^{(j)}}$, $j = 1, 2$ y $\mathcal{R}_{\nu_t}$ tienden a cero uniformemente en Ω cuando $t \to 0^+$. Por tanto existe $t_0 > 0$ tal que la identidad

$$G(t, K_t^{(1)}(z), K_t^{(2)}(w)) = \frac{zw}{1 + tz\mathcal{R}_1^{(1)}(z) + tw\mathcal{R}_1^{(2)}(w) - t\mathcal{R}_\mu(z, w)},$$

se cumple para $0 \leq t \leq t_0$ y $(z, w) \in \Omega^* = \Omega \setminus \{(0, 0)\}$, donde $G(t, z, w)$ es notación de lo siguiente

$$G(t, z, w) = G_{\nu_t}(z, w), \ K_t^{(1)}(z) = t\mathcal{R}_{\nu^{(1)}}(z) + 1/z, \ K_t^{(2)}(w) = t\mathcal{R}_{\nu^{(2)}}(w) + 1/w,$$

entonces la función $G(t, K_t^{(1)}(z), K_t^{(2)}(w))$ es una función C^1 en t y es holomorfa en (z, w) en el conjunto abierto $(0, t_0) \times \Omega^*$. Y tenemos la expresión

$$\partial_t G(t, K_t^{(1)}(z), K_t^{(2)}(w)) = -\mathcal{R}_{\nu^{(1)}}(z)\partial_z G(t, K_t^{(1)}(z), K_t^{(2)}(w))$$
$$-\mathcal{R}_{\nu^{(2)}}(w)\partial_w G(t, K_t^{(1)}(z), K_t^{(2)}(w)) + \frac{zw(\mathcal{R}_\nu(z, w) - z\mathcal{R}_{\nu^{(1)}}(z) - w\mathcal{R}_{\nu^{(2)}}(w))}{(1 + tz\mathcal{R}_{\nu^{(1)}}(z) + tw\mathcal{R}_{\nu^{(2)}}(w) - t\mathcal{R}_\nu(z, w))^2},$$

y también tenemos el límite $\nu_t \Rightarrow \delta_{(0,0)}$, así que

$$\lim_{t\to 0^+} \partial_z G(t, K_t^{(1)}(z), K_t^{(2)}(w)) = \lim_{t\to 0^+} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{-1}{(K_t^{(1)}(z)-x)^2(K_t^{(2)}-y)}\, d\nu_t(x,y) = -z^2 w,$$

y

$$\lim_{t\to 0^+} \partial_w G(t, K_t^{(1)}(z), K_t^{(2)}(w)) = -zw^2,$$

usando el teorema del valor medio, para cada $(z,w) \in \Omega^*$ la función

$$t \mapsto G(t, K_t^{(1)}(z), K_t^{(2)}(w)),$$

también es diferenciable por la derecha en $t = 0$, tomando también en cuenta que $\lim_{t\to 0^+} K_t^{(j)}(\lambda) = 1/\lambda,\ j = 1,2$ tenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.6.6 *La derivada por la derecha*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{G(t,1/z,1/w) - G(0,1/z,1/w)}{t} = zw\mathcal{R}_\nu(z,w),$$

para $(z,w) \in \Omega^*$.

Presentamos ahora (de nuevo), la fórmula de Lévy-Hincin para medidas con soporte compacto.

Teorema 5.6.7 (Fórmula de Lévy-Hincin para medidas con soporte compacto) *[30, Teo. 4.2] Sea ν una medida con soporte compacto en $\mathcal{BID}$, y sea $\{\nu_t\}_{t\geq 0}$ el $\boxplus\boxplus$-semigrupo generado por ν. Entonces existe una tripleta única (ρ_1, ρ_2, ρ), donde ρ_1, ρ_2 medidas de Borel positivas con soporte compacto y ρ medida de Borel con signo con soporte compacto en $\mathbb{R}^2$ tal que*

i) Las convergencias débiles

$$\frac{s^2}{\epsilon} d\nu_\epsilon(s,t) \Rightarrow \rho_1,\ \ \frac{t^2}{\epsilon} d\nu_\epsilon(s,t) \Rightarrow \rho_2,\ \ \frac{st}{\epsilon} d\nu_\epsilon(s,t) \Rightarrow \rho,$$

en $\mathbb{R}^2$ y los límites

$$\frac{1}{\epsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^2} s\,d\nu_\epsilon(s,t) \to \kappa_{1,0} \quad y \quad \frac{1}{\epsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^2} t\,d\nu_\epsilon(s,t) \to \kappa_{0,1},$$

se cumplen simultáneamente cuando $\epsilon \to 0^+$.

ii) Tenemos

$$\mathcal{R}_\nu(z,w) = \kappa_{1,0} z + \kappa_{0,1} w + \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{z^2}{1-zs} d\rho_1(s,t) + \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{w^2}{1-wt} d\rho_2(s,t)$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{zw}{(1-zs)(1-wt)} d\rho(s,t),$$

para $(z,w)\in(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^2\cup\{(0,0)\}$.

iii) La masa total $\rho_j(\mathbb{R}^2)$ *es igual a la varianza de la marginal* $\nu^{(j)}$, $j=1,2$, *el número* $\rho(\mathbb{R}^2)$ *es la covarianza de* ν, *y las medidas* ρ_1,ρ_2 *y* ρ *satisfacen*

$$td\rho_1 = sd\rho, \qquad sd\rho_2 = td\rho,$$
$$|\rho(\{(0,0)\})|^2 \leq \rho_1(\{(0,0)\})\rho_2(\{(0,0)\}).$$

Demostración. Tenemos la igualdad

$$\begin{aligned}
zw\mathcal{R}_\nu(z,w) &= \lim_{\epsilon\to 0^+}(1/\epsilon)[G(\epsilon,1/z,1/w)-G(0,1/z,1/w)]\\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\epsilon}\left[\int_{\mathbb{R}^2}\frac{zw}{(1-zs)(1-wt)}\,d\nu_\epsilon(s,t)-zw\right]\\
&= zw\left[\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\epsilon}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{zs}{1-zs}+\frac{wt}{1-wt}+\frac{zwst}{(1-zs)(1-wt)}\right)\,d\nu_\epsilon(s,t)\right],
\end{aligned}$$

en un bidisco Ω, el integrando es igual a cero para $(z,w)=(0,0)$. Haciendo $w=0$ tenemos

$$R_{\nu^{(1)}}(z) = (1/z)\mathcal{R}_\nu(z,0) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\epsilon}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{s}{1-zs}\,d\nu_\epsilon(s,t),$$

y tomando la parte imaginaria.

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{Im(z)}{|1-zs|^2}\frac{s^2}{\epsilon}\,d\nu_\epsilon(s,t) = Im(R_{\nu^{(1)}}(z)), \quad |z|<r.$$

Esto muestra que la familia $\{(1/\epsilon)s^2 d\nu_\epsilon : 0<\epsilon\leq t_0\}$ es uniformemente acotada en la norma de la variación total. De manera similar,

$$\begin{aligned}
R_{\nu^{(1)}}(z) &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\epsilon}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{t}{1-wt}\,d\nu_\epsilon(s,t)\\
\kappa_{0,1} &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\epsilon}\int_{\mathbb{R}^2} t\,d\nu_\epsilon(s,t),
\end{aligned}$$

Y el conjunto $\{(1/\epsilon)t^2 d\nu_\epsilon : 0<\epsilon\leq t_0\}$ es acotado en la norma de la variación total. Además por la desigualdad de Cauchy-Schwarz el conjunto $\{(1/\epsilon)std\nu_\epsilon : 0<\epsilon\leq t_0\}$ también es acotado, así que se tiene la existencia de las leyes límite ρ_1,ρ_2 y ρ, ya que la familia $\{\nu_\epsilon : 0\leq\epsilon\leq t_0\}$ es tensa y tiene soporte uniformemente acotado. Por lo anterior tenemos

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{zw}{(1-zs)(1-wt)}\frac{st}{\epsilon}\,d\nu_\epsilon(s,t) = \mathcal{R}_\nu(z,w)-zR_{\nu^{(1)}}(z)-wR_{\nu^{(2)}}(w),$$

Para $(z, w) \in \Omega$. De donde se obtiene la unicidad de ρ y el hecho de que $\rho(\mathbb{R}^2) = \kappa_{1,1}$ (covarianza de ν). La unicidad de ρ_1, ρ_2 también se tiene y las igualdades son evidentes. ■

Presentamos ahora el resultado principal de esta subsección, que tiene más ventajas que el teorema anterior, pues el soporte compacto no es necesario y nos provee una completa parametrización de la clase $\mathcal{BID}$, y la prueba puede verse en [30].

Teorema 5.6.8 (Representación de Lévy-Hincin bi-libre: Caso general) *[30, Teo. 4.3] Sea R una función holomorfa definida en el dominio producto $\Omega = (\Delta \cup \overline{\Delta}) \times (\Delta \cup \overline{\Delta})$ asociada a algún ángulo de Stolz Δ. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *Existe una ley $\nu \in \mathcal{BID}$ tal que $R = \mathcal{R}_\nu$ en Ω.*

2. *Existen $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, dos medidas de Borel finitas positivas ρ_1 y ρ_2 en $\mathbb{R}^2$, y una medida de Borel con signo finita ρ en $\mathbb{R}^2$ tal que*

$$t/\sqrt{1+t^2}d\rho_1 = s/\sqrt{1+s^2}d\rho,$$
$$s/\sqrt{1+s^2}d\rho_2 = t/\sqrt{1+t^2}d\rho,$$
$$|\rho(\{(0,0)\})|^2 \leq \rho_1(\{(0,0)\})\rho_2(\{(0,0)\}),$$

y la función R se extiende analíticamente a $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^2$, vía la fórmula

$$\mathcal{R}(z,w) = \gamma_1 z + \gamma_2 w + \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{z^2 + zs}{1 - zs} d\rho_1(s,t) + \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{w^2 + wt}{1 - wt} d\rho_2(s,t) + \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{zw\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+t^2}}{(1-zs)(1-wt)} d\rho(s,t).$$

En este caso, la quintupla $(\gamma_1, \gamma_2, \rho_1, \rho_2, \rho)$ es única, y se tienen las leyes marginales $\nu^{(j)} = \nu_{\boxplus}^{\gamma_j, \rho_j^{(j)}}$, $j = 1, 2$.

El caso ν soporte compacto se sigue del teorema anterior al hacer el cambio de variable $d\rho_1' = (1+s^2)d\rho_1$, $d\rho_2' = (1+t^2)d\rho_2$, $d\rho' = \sqrt{1+s^2}\sqrt{1+t^2}d\rho$ y

$$a_1 = \gamma_1 + \int\limits_{\mathbb{R}^2} s d\rho_1(s,t), \quad a_2 = \gamma_2 + \int\limits_{\mathbb{R}^2} t d\rho_2(s,t),$$

y la prueba del teorema (que podemos ver en [30]) anterior nos brinda una última caracterización de las distribuciones infinitamente divisibles bi-libres.

Corolario 5.6.9 *$\nu \in \mathcal{BID}$ si y sólo si $\nu = \mu_1 \boxplus\boxplus \mu_2 \boxplus\boxplus \mu_3$, donde μ_1 es alguna distribución gaussiana bi-libre, μ_2 es una medida producto de distribuciones infinitamente divisibles libres y μ_3 es una distribución Poisson compuesta bi-libre.*

5.7 Caso general: no bipartito

Desde que iniciamos el capítulo 3, y hasta antes de esta sección no habíamos hablado de variables de dos caras generales, pues la definición de las transformadas bi-libres (R, S, T) la hicimos para un tipo especial de variables de dos caras, variables cuya relación algebraica entre las variables izquierdas y derechas asegura que todos los momentos pueden ser calculados de los momentos de dos bandas ($\varphi(LR)$), y demostramos que los sistemas con rango ≤ 1 de conmutación (incluyendo, por supuesto las bipartitas) cumplían esa condición. El presente capítulo abordó la teoría de divisibilidad infinita bi-libre, pero considerando el caso bipartito; esto con el fin de usar todos los resultados de nuestro capítulo combinatorio y analítico, sin embargo, en el caso general (sin suponer nada en las variables de dos caras) también podemos asegurar algunas cosas, y el objetivo de esta sección es presentar los avances de la divisibilidad infinita en el caso general, y aunque no podremos usar los resultados del capítulo analítico, se tienen teoremas límite interesantes y procesos de Lévy. A continuación presentamos algunas definiciones y teoremas, cuyas demostraciones pueden encontrarse en [24], para el caso no bipartito.

Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espacio de probabilidad no conmutativo y para cada $N \in \mathbb{N}$ sea

$$\{(a_{l,N,1}, a_{r,N,1}), (a_{l,N,2}, a_{r,N,2}), ..., (a_{l,N,N}, a_{r,N,N})\},$$

una sucesión de variables de dos caras en $\mathcal{A}$, definamos $S_{h,N} = \sum_{i=1}^{N} a_{h,N,i}, \quad h \in \{l, r\}$ y $S_N = (S_{l,N}, S_{r_N})$.

Teorema 5.7.1 *[24, Teo. 2.3] La sucesión de variables de dos caras $\{S_N : N \geq 1\}$ converge en distribución a una variable de dos caras $b = (b_l, b_r)$ en un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{B}, \phi)$, cuando $N \to \infty$ si y sólo si para cada $n \geq 1$ y $\chi : \{1, 2, ..., n\} \to \{l, r\}$ el límite*

$$\lim_{N\to\infty} N\varphi(a_{\chi(1),N,1} a_{\chi(2),N,1} \cdots a_{\chi(n),N,1}),$$

existe. Mas aún si el límite existe entonces la distribución conjunta del par límite $b = (b_l, b_r)$ está determinada en términos de los cumulantes bi-libres

$$\kappa_\chi(b) = \kappa_{\chi,\mathbf{1}_n}(b_{\chi(1)}, b_{\chi(2)}, ..., b_{\chi(n)}) = \lim_{N\to\infty} N\varphi(a_{\chi(1),N,1} a_{\chi(2),N,1} \cdots a_{\chi(n),N,1}),$$

para $\chi : \{1, 2, ..., n\} \to \{l, r\}$.

Corolario 5.7.2 (teorema de límite central bi-libre) *Sea $z^{(n)} = ((z_i^{(n)})_{i\in I}, (z_j^{(n)})_{i\in J}), n \in \mathbb{N}$ una familia bi-libre de variables de dos caras idénticamente distribuidas en $(\mathcal{A}, \varphi)$ tal que $\varphi(z_k^{(n)}) = 0, \forall k \in I \coprod J$ y $n \in \mathbb{N}$. Sea $S_{N,k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} z_k^{(n)}$, para $k \in I \coprod J, N \in \mathbb{N}$ y $S_N = ((S_{N,i})_{i\in I}, (S_{N,j})_{j\in J})$ entonces $S_N \overset{distr}{\to} b$, donde b es una variable de dos caras en un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{B}, \phi)$ que tiene distribución gaussiana bi-libre centrada, tal que $\kappa(b_k b_l) = \varphi(z_k^{(n)} z_l^{(n)})$ para $k, l \in I \coprod J$ y $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Usando el teorema anterior

$$\kappa_{k,\mathbf{1}_n}(b) = \lim_{N\to\infty} N\varphi\left(\frac{z_{k(1)}^{(m)}}{\sqrt{N}} \frac{z_{k(2)}^{(m)}}{\sqrt{N}} \cdots \frac{z_{k(n)}^{(m)}}{\sqrt{N}}\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{N}{N^{n/2}} \varphi(z_{k(1)}^{(m)} z_{k(2)}^{(m)} \cdots z_{k(n)}^{(m)}) = \delta_{n,2}\varphi(z_{k(1)}^{(m)} z_{k(2)}^{(m)} \cdots z_{k(n)}^{(m)}).$$

■

Definición 5.7.3 Una variable de dos caras $a = (a_l, a_r)$ autoadjunta en un C^*-espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \varphi)$ tiene distribución *infinitamente divisible* si para cada $N \in \mathbb{N}$, existe una sucesión bi-libre de variables de dos caras idénticamente distribuidas $\{(a_{l,N,i}, a_{r,N,i}) : i = 1, 2, ..., N\}$ autoadjuntas en un C^*-espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}_N, \varphi_N)$ tal que

$$S_N = (S_{l,N}, S_{r,N}) = (\sum_{i=1}^{N} a_{l,N,i}, \sum_{i=1}^{N} a_{r,N,i}),$$

en $(\mathcal{A}_N, \varphi_N)$ tiene la misma distribución que $a = (a_l, a_r)$ en $(\mathcal{A}, \varphi)$.

Ahora el teorema principal de la sección.

Teorema 5.7.4 *[24, Teo. 3.7] Sea $a = (a_l, a_r)$ una variable de dos caras autoadjunta en un C^*-espacio de probabilidad $(\mathcal{A}, \varphi)$. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

1) a tiene distribución infinitamente divisible.

2) El conjunto de cumulantes $\{\kappa_\chi(a) : \chi : \{1, 2, ..., n\} \to \{l, r\},\ n \geq 1\}$ es condicionalmente positivo definido y condicionalmente acotado.

3) Para cada $N \in \mathbb{N}$, existe una familia bi-libre $\{(a_{l,N,i}, a_{r,N,i})\}$ de variables de dos caras que también son idénticamente distribuidas y autoadjuntas en un C^*-espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}_N, \varphi_N)$, tal que

$$\kappa_\chi(a) = \lim_{N\to\infty} N\varphi_N(a_{\chi(1),N,i}a_{\chi(2),N,i} \cdots a_{\chi(n),N,i}), \forall \chi : \{1, 2, ..., n\} \to \{l, r\},\ k \geq 1,$$

donde $1 \geq i \geq N$.

Como dijimos antes, también podemos definir procesos de Lévy para variables no bipartitas.

Definición 5.7.5 *Una familia $\{a_t = (a_{l,t}, a_{r,t}) : t \geq 0\}$ de variables de dos caras autoadjuntas en un C^*-espacio de probabilidad $(\mathcal{A}, \phi)$ es un Proceso de Lévy bi-libre si se satisfacen las siguientes condiciones.*

1. *$a_0 = (0, 0)$.*
2. *Si $0 \leq t_1 < ... < t_n$ entonces $a_{t_2} - a_{t_1}, ..., a_{t_n} - a_{t_{n-1}}$ son bi-libres, donde $a_t - a_s = (a_{l,t} - a_{l,s}, a_{r,t} - a_{r,s})$.*
3. *Para $0 < s < t$, la distribución de $a_t - a_s$ depende sólo de t-s.*
4. *La distribución μ_t de a_t converge a 0, cuando $t \to 0^+$.*

Y el último teorema, que nos relaciona las distribuciones infinitamente divisibles con los procesos de Lévy.

Teorema 5.7.6 *1. Sea $\{a_t = (a_{l,t}, a_{r,t}) : t \geq 0\}$ un proceso de Lévy bi-libre. Entonces a_1 tiene distribución infinitamente divisible bi-libre.*

2. Si $a = (a_l, a_r)$ tiene distribución infinitamente divisible bi-libre, entonces existe un proceso de Lévy bi-libre $\{b_t = (b_{l,t}, b_{r,t}) : t \geq 0\}$ en un C^*-espacio de probabilidad $(\mathcal{B}, \Phi)$ talque a y b_1 tienen la misma distribución.

Bibliografía

[1] Akhiezer, N. I. The classical moment problem and some related questions in analysis. *Hafner Publishing Co., New York* (1965).

[2] Anshelevich, M. Generators of Some Non-Commutative Stochastic Processes. *Probab. Theory Relat. Fields 157* (2013), 777–815.

[3] Applebaum, D., Rajarama, B., and Lindsay, J. K. J. Quantum Independent Increment Processes I: From Classical Probability to Quantum Stochastic Calculus. *Lectures Notes in Mathematics 1865* (2005).

[4] Arizmendi, O. Divisibilidad Infinita Libre de Medidas de Probabilidad. *Tesis de Licenciatura, Universidad de Guanajuato* (2008).

[5] Arizmendi, O., and Belinschi, S. Free Infinite Divisibility for Ultrasphericals. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics 16-1* (2013).

[6] Arizmendi, O., and Hasebe, T. Classical and free infinite divisibility for Boolean stable laws. *Proc. Amer. Math. Soc. 142-5* (2014), 1621–1632.

[7] Arizmendi, O., Hasebe, T., Lehner, F., and Vargas, C. Relations between cumulants in noncommutative probability. *Advances in Mathematics 282* (2015), 56–92.

[8] Arizmendi, O., and Pérez-Abreu, V. The S-transform for Symmetric Probability Measures with Unbounded Supports. *Proceedings of the American Mathematical Society 137* (2009), 3057–3066.

[9] Arizmendi, O., and Pérez-Abreu, V. On the non-classical Infinite Divisibility of Power Semicircle Distributions. *Communications on Stochastic Analysis 4* (2010), 161–178.

[10] Atzmon, A. A Moment Problem for positive measures on the unit disc. *Pacific Journal of Mathematics 59-2* (1975).

[11] Barndorff-Nielsen, E., Franz, U., Gohm, R., Kümmerer, B., and Thorbjørnsen, S. Quantum Independent Increment processes II: Structure of Quantum Lévy Processes, Classical Probability, and Physics. *Lectures Notes in Mathematics 1866* (2006).

[12] Barndorff-Nielsen, E., and Thorbjørnsen, S. Classical and Free Infinite Divisibility and Lévy Processes. *Springer-Verlag Berlin Heidelberg* (2006).

[13] Belinschi, S., Bercovici, H., Gu, Y., and Skoufranis, P. Analytic Subordination for Bi-free Convolution. *Preprint: http://arxiv.org/abs/1702.01673v1* (2017).

[14] Bercovici, H., and Voiculescu, D. Free convolutions of measures with unbounded support. *Indiana Univ. Math. J. 42(3)* (1993), 733–773.

[15] Charlesworth, I. An alternating moment condition for Bi-freeness. *Preprint* (2016), arXiv:1611.01262v1.

[16] Charlesworth, I., B.Nelson, and Skoufranis, P. Combinatorics of Bi-freeness with Amalgamation. *Commun. Math. Phys. 338* (2015), 801–847.

[17] Charlesworth, I., B.Nelson, and Skoufranis, P. On Two-faced Families of Noncommutative Random Variables. *Canad. J. Math. 67 (6)* (2015), 1290–1325.

[18] Clancey, K. Seminormal Operators. *Lecture Notes in Mathematics 742* (1979).

[19] Collins, B., Mingo, J., Sniady, P., and Speicher, R. Second Order Freeness and Fluctuations of Random Matrices: III. Higher Order Freeness and Free Cumulants. *Doc. Math. 12* (2007), 1–70.

[20] Conway, J. A Course in Functional Analysis. *Graduate Texts in Mathematics 97* (1996).

[21] Dykema, K., and Na, W. Principal Functions for Bi-free central limit distributions. *Integr. Equ. Oper. theory 85* (2016), 91–108.

[22] Freslon, A., and Weber, M. On bi-free de Finetti theorems. *Annales mathématiques Blaise Pascal 23 (1)* (2016), 21–51.

[23] Gao, M. Free Ornstein–Uhlenbeck Processes. *J. Math. Anal. Appl. 322* (2006), 177–192.

[24] Gao, M. Two-faced families of non-commutative random variables having bi-free infinitely divisible distributions. *Int. J. Math. 27 (4)* (2016), 1650037.

[25] Gu, Y., Huang, H., and Mingo, J. An analogue of the levy–hinchin formula for bi-free infinitely divisible distributions. *Preprint* (2015), arXiv:1501.05369v2.

[26] Gu, Y., and Skoufranis, P. Conditionally Bi-free Independence for Pairs of Algebras. *Preprint* (2016), arXiv:1609.07475.

[27] Gu, Y., and Skoufranis, P. Conditionally Bi-free Independence with Amalgamation. *Preprint* (2016), arXiv:1609.07820.

[28] Gu, Y., and Skoufranis, P. Bi-Boolean independence for pairs of Algebras. *Preprint: http://arxiv.org/abs/1703.03072v1* (2017).

[29] Huang, H., Hasebe, T., and Wang, J. Limit theorems for bi-free convolution. *preprint, arXiv: 1705.05523v1* (2017).

[30] Huang, H., and Wang, J. Analytic aspects of the bi-free partial R-transform. *J. Funct. Anal. 271* (2016), 922–957.

[31] Huang, H., and Wang, J. Harmonic Analysis for the bi-free partial S-transform. *preprint, arXiv:1705.06569* (2017).

[32] Manzel, S., and Schürmann, M. Non-Commutative Stochastic Independence and Cumulants. *Preprint* (2016), arXiv:1601.06779.

[33] Mastnak, M., and Nica, A. Double-ended queues and joint moments of left-right canonical operators on full Fock space. *Int. J. Math. 26 (2)* (2015), 1550016.

[34] Murphy, G. c^*-algebras and operator theory. *Academic press, inc* (1990).

[35] Nica, A., and R.Speicher. Lectures on the Combinatorics of Free Probability. *London Mathematical Society Lecture Notes 335, Cambridge University Press* (2006).

[36] N.Muraki. The five independences as natural products. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics 6* (2003), 337–371.

[37] Putinar, M. A Two-Dimensional Moment Problem. *Journal of Functional Analysis 80* (1988), 1–8.

[38] Putinar, M., and Vasilescu, F. Solving Moment Problems by Dimensional Extension. *Annals of Mathematics 149-3* (1999), 1087–1107.

[39] Ramsey, C. Faithfulness of Bi-free Product States. *Preprint: http://arxiv.org/abs/1703.05801v1* (2017).

[40] Skoufranis, P. Some Bi-Matrix Models for Bi-free Limit Distributions. *Preprint* (2015), arXiv:1506.01725.

[41] Skoufranis, P. A combinatorial Approach of Voiculescu's Bi-free Partial Transforms. *Pacif. J. of Math. 283 (2)* (2016), 419–447.

[42] Skoufranis, P. Independences and partial R-transforms in bi-free probability. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. 52 (3)* (2016), 1437–1473.

[43] Skoufranis, P. On operator-valued bi-free distributions. *Advances in Mathematics 303* (2016), 638–715.

[44] Skoufranis, P. A combinatorial Approach to the Opposite Bi-Free Partial S-Transform. *preprint, arXiv:1705.02857* (2017).

[45] Speicher, R. Free probability theory and non-crossing partitions. *Seminaire Lotharingien de Combinatoire (electronic) 39 B39c* (1997).

[46] Speicher, R., Bozejko, M., and Kümmerer, B. q -gaussian Processes: Non-commutative and Classical Aspects. *Commun. Math. Phys. 185* (1997), 129–154.

[47] Speicher, R., and Wysoczański, J. Mixtures of classical and free independence. *Arch. Math. 107* (2016), 445–453.

[48] Stanley, R. Enumerative Combinatorics. *cambridge studies in advanced mathematics 1* (2011).

[49] Stein, E., and Weiss, G. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. *Princeton University Press* (1971).

[50] Voiculescu, D. Symmetries of some reduced free product C^*-Algebras. *Operator Algebras and their connections with Topology and Ergodic theory, Springer Verlag 1132* (1985), 556–588.

[51] Voiculescu, D. Addition of certain non-commuting random variables. *Journal of Functional Analysis 66* (1986), 323–346.

[52] Voiculescu, D. The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory V. Noncommutative Hilbert Transforms. *Invent. math. 132* (1998), 189–227.

[53] Voiculescu, D. Free Probability for pair of Faces I. *Comm. Math. Phys. 332 (3)* (2014), 955–980.

[54] Voiculescu, D. Free Probability for Pair of Faces II: 2-variables bi-free partial R-transform and systems whit rank ≤ 1 commutation. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. 52 (1)* (2016), 1–15.

[55] Voiculescu, D. Free Probability for Pair of Faces III: 2-variables bi-free partial S- and T-transforms. *J. Funct. Anal. 270 (10)* (2016), 3623–3638.

[56] Voiculescu, D. Free Probability for Pair of Faces IV: Bi-free Extremes in the Plane. *J. Theor. Probab. DOI 10.1007/s10959-015-0635-7* (2016).

[57] Voiculescu, D., Dykema, K., and A.Nica. Free Random Variables. *American Mathematical Society CRM Monograph Series 1* (1992).

Índice Analítico