Probabilidad I

Agosto-diciembre 2010

Tarea 6

Entregar el Jueves 4 de noviembre del 2010

1. Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias independientes con distribución exponencial con parámetros $\lambda_1, ..., \lambda_n$, respectivamente. Prueba que $Y = \min(X_1, ..., X_n)$ tiene distribución exponencial con parámetro $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$. En particular si $\lambda_i = \lambda$, $i = 1, ..., n$, se tiene que Y tiene distribución exponencial $n\lambda$.

2. Este problema nos da una construcción del proceso de Poisson clásico a partir de la distribución exponencial. Sea $X_1, X_2, ...$ una sucesión de variables aleatorias independientes con la misma distribución exponencial con media $1/\lambda, \lambda > 0$, y para $n \geq 1$ sea $S_n = X_1 + ... + X_n$. Suponga que $t > 0$ y consideremos la variable aleatoria $N(t) = \max\{n > 0 : S_n \in [0, t]\}$ y $N(0) = 0$. Pruebe que $\{N(t) : t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson con intensidad λ.

3. Un sistema consta de n componentes. Cada componente sigue un tiempo de falla de acuerdo a una distribución exponencial con media $1/\lambda_i$, independiente de los otros componentes. Encuentre la distribución del tiempo de falla del sistema en los siguientes dos casos:

   (a) Sistema en paralelo: El sistema falla si y sólo si al menos un componente falla.

   (b) Sistema en serie: El sistema falla si y sólo si todos los componentes fallan.

4. En el curso hablamos de la importancia de la aproximación de Poisson y su carácter universal. El presente problema trata sobre la rapidez de convergencia en la aproximación de Poisson a la distribución binomial. Usemos la notación

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, ..., n$$

$$P(k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2....$$

   (a) Pruebe que se tiene la convergencia uniforme

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq 1} |P_n(k) - P(k; \lambda)| = 0.$$

   Sugerencia: Encuentre primero la estimación

$$\sum_{k=0}^{\infty} |P_n(k) - P(k; \lambda)| \leq \frac{2\lambda}{n} \min(2, \lambda) \leq 2\frac{\lambda^2}{n}.$$

(b) Demuestre que

$$\frac{\lambda^k}{k!}(1-\frac{k}{n})^k(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k} \leq P_n(k) \leq \frac{\lambda^k}{k!}(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}.$$

(c) Usando el hecho de que para $0 < t < 1$, $e^{-t/(1-t)} < 1 - t < e^{-t}$ concluya que

$$e^{-k^2/(n-k)-\lambda^2/(n-\lambda)}P(k;\lambda) < P_n(k) < P(k;\lambda)e^{k\lambda/n}.$$

(d) Sea $a_k = P_n(k)/P(k;\lambda)$. Muestre que a_k alcanza su valor máximo cuando k es el entero más grande tal que $k < \lambda + 1$.

(e) Interprete los resultados.

5. Dado que $N(t) = n$ y $0 < s < t$, calcule $\mathbb{P}(N(s) = k \mid N(t) = n)$ para $0 \leq k \leq n$.

6. Encuentre la función de densidad de $(T_k \mid N(t) = n)$ para $k < n$.

7. Pruebe que $(T_1 \mid N(t) = 1)$ tiene distribución uniforme $U(0, t)$.

8. Sea $\{N(t)\ ;\ t \geq 0\}$ un proceso de Poisson homogéneo de intensidad $\lambda > 0$, y sea $\{\xi_i\}_{i=0}^{\infty}$ una sucesión de ensayos Bernoulli de parámetro $0 < p < 1$ independientes de $\{N(t)\ ;\ t \geq 0\}$. Demuestre que si

$$Y(t) = \sum_{j=0}^{N(t)} \xi_j,$$

entonces $\{Y(t)\ ;\ t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson homogéneo de intensidad λp. De una interpretación de este resultado y mencione alguna situación en donde se aplique.

PARTE II
El Problema del Submarino

Se sugiere resolver esta parte de la tarea en equipos de dos o tres personas

Este ejercicio está relacionado al problema de mantenimientos no programados para los motores General Motors Co. de propulsión Diesel, del submarino U.S.S. Grampus. Los datos que aparecen al final son los tiempos de mantenimiento no programado del motor número cuatro, debido a que había fallado o estaba a punto de fallar. Los tiempos corresponden a las primeras 16000 horas de operación para este motor.

1. Busque en la red información sobre este submarino y haga un pequeño resumen. Por ejemplo, puede visitar el sitio http://www.navsource.org/archives/08/08207.htm

2. Análisis estadístico inicial. A partir de los datos:

   (a) Encuentre una estimación para la media de los tiempos entre mantenimiento no programados para el motor cuatro.

   (b) ¿Qué suposiciones hizo para encontrar esta estimación?

   (c) Use herramientas de Estadística del Curso de Elementos de Probabilidad y Estadística para analizar la distribución de los tiempos entre mantenimientos no programados de este motor. ¿Existe evidencia de que los tiempos entre mantenimientos no programados siguen una distribución exponencial?

   (d) Grafique la trayectoria del proceso de contéo asociado a estos datos.

3. **De ahora en adelante supondremos que el proceso puntual de tiempos de mantenimiento no programados para el motor cuatro es un proceso de Poisson**. ¿Es este modelo razonable para el problema? ¿Por qué?

4. Simule tantos procesos de Poisson como motores de propulsión Diesel tenga el submarino, de acuerdo a las características encontradas en el problema 2 y para cada una de las simulaciones repita los problema 2 (a), (c) y (d). ¿Qué conclusiones obtiene de comparar los resultados simulados y los reales?

5. Se desea ahora modelar los tiempos de mantenimiento no programados del submarino considerando como falla el hecho de que al menos uno de los motores de propulsión Diesel falla o está a punto de fallar, suponiendo que los motores de propulsión Diesel requieren mantenimiento no programado de manera independiente de acuerdo al mismo comportamiento estocástico. Para simplificar el problema y con los datos que tenemos, sólo supondremos mantenimientos no programados debidos a fallas (o cerca de fallar) de motores Diesel y no por otras fallas en el submarino (motores eléctricos, etc.). ¿Qué modelo propondría para este problema y cuáles son sus razones?

Teniendo en cuenta el modelo que propuso en el problema 5, contesten las siguientes preguntas:

6. Por razones estratégicas el submarino tiene que comenzar de inmediato una travesía de dos meses. Proponga y encuentre una cuantificación del riesgo asociado a esta travesía, por mantenimientos no programados del submarino.

7. La política de mantenimiento integral de garantía tipo B del submarino dice que se debe hacer un mantenimiento general en el momento del décimo mantenimiento no programado. ¿Cuál es el tiempo esperado del mantenimiento integral de garantía tipo B?

8. Un nuevo capitán se hace cargo del submarino y por razones de emergencia no tiene acceso a la bitácora de mantenimiento del submarino. ¿Cuántas horas deben esperar para que la probabilidad del próximo mantenimiento no programado del submarino sea mayor que 0.95?

9. ¿Cuántos mantenimientos no programados debemos esperar para el submarino en el primer año de operación, si sabemos que en 13000 horas de operación ocurren 43 mantenimientos no programados?

10. ¿Cuántos mantenimientos no programados para el submarino debemos esperar en 13000 horas? ¿Cuál es la varianza del número de mantenimientos no programados en 13000 horas? Explique las ventajas de contar con la información del problema 9.

11. ¿Cuál es el tiempo promedio del séptimo mantenimiento no programado entre los 43 tiempos de mantenimientos no programados en 13000 horas?

12. Encuentre el tiempo esperado entre mantenimientos no programados. ¿Cuál es la varianza asociada? ¿Explique las diferencias y ventajas de tener la información dada en el problema 11.

13. Agregue otras preguntas y consideraciones que usted considere importantes.

Tabla: Datos de tiempos de acciones de mantenimiento no programado para el motor número cuatro de propulsión Diesel, del submarino U.S.S. Grampus. En estos tiempos se le dio mantenimiento al motor, porque había fallado o porque estaba a punto de fallar. Estos tiempos se registraron para las primeras 16000 horas de operación.

0.860	1.258	1.317	1.412	1.897	2.011	2.122	2.439
3.203	3.298	3.902	3.910	4.000	4.247	4.411	4.456
4.517	4.899	4.910	5.676	5.755	6.137	6.221	6.311
6.613	6.975	7.335	8.158	8.498	8.690	9.042	9.330
9.394	9.426	9.872	10.191	11.511	11.575	12.100	12.126
12.368	12.681	12.795	13.399	13.668	13.780	13.877	14.007
11.028	14.035	14.173	14.173	11.449	11.587	14.610	15.070
16.000							