

# Matrices aleatorias y la función zeta

J. Armando Domínguez Molina, Alfonso Rocha Arteaga  
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas  
Universidad Autónoma de Sinaloa

## Resumen

El propósito de este artículo es mostrar la relevancia de la teoría de matrices aleatorias en el estudio de algunos aspectos de la teoría de números. Con este fin ilustraremos numéricamente la relación que existe entre los huecos de los ceros de la función zeta de Riemann y la separación de los eigenvalores de matrices aleatorias unitarias o Hermitianas, la cual es una de las conexiones más importantes entre la teoría de matrices aleatorias y la teoría de números.

## 1 Introducción

Una *matriz aleatoria* es una matriz cuyas entradas son variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad. La teoría de matrices aleatorias trata principalmente del comportamiento límite de los eigenvalores de matrices aleatorias. Su estudio surgió en 1928 con Wishart [41] cuando usó las matrices aleatorias en el análisis de datos multivariados; y más tarde en los años 50's Wigner [40] las utilizó en física nuclear en el estudio de núcleos pesados, logrando explicar el comportamiento estadístico de los niveles de energía en términos de los eigenvalores a grandes dimensiones. Esto motivó el desarrollo en los años 60's de la teoría matemática del espectro de matrices aleatorias [23]; y pronto se dieron las primeras conexiones con algunas ramas de las matemáticas. Actualmente la teoría de matrices aleatorias tiene relaciones con el análisis funcional, teoría de números, probabilidad libre, combinatoria y gráficas [1], [3], [15], [19]. También tiene aplicaciones importantes en comunicación inalámbrica, teoría de la información, matemáticas financieras, redes neuronales [2], [7], [37].

En este artículo nos enfocaremos en la conexión entre la teoría de matrices aleatorias y la teoría de números, la cual fue conjeturada en 1973 por el físico Freeman Dyson y el matemático Hugh Montgomery. Esta conjetura descansa en la relación que existe entre los eigenvalores de matrices aleatorias unitarias (y complejas Hermitianas) y los ceros de la función zeta de Riemann. Específicamente ellos conjeturaron que la función

$$1 - \left( \frac{\text{sen } \pi x}{\pi x} \right)^2,$$

describe tanto los huecos entre los eigenvalores de estas matrices aleatorias como los huecos entre los ceros de función zeta.

Dyson encontró en 1962 que esta función describía los huecos entre los eigenvalores de dichas matrices aleatorias tratando de modelar los niveles de energía de núcleos pesados en física cuántica. Por su parte Montgomery en 1973 motivado por una cuestión en teoría de números, que no tenía que ver con la distribución de los números primos, conjeturó que esta función describía los huecos entre los ceros de la función zeta tratando de entender el comportamiento de los ceros. Para ese entonces ya se sabía que los ceros de la función zeta estaban íntimamente conectados con la distribución de los números primos a través de la hipótesis de Riemann, [4, Cap. 7]. Dicho de otra manera esta función revela en el fondo tanto la estructura del núcleo atómico como la sucesión de los números primos.

Con el propósito de motivar el interés en la teoría de matrices aleatorias y en la teoría de números, en este artículo nos proponemos mostrar numéricamente esta relación tan sorprendente e inexplicable entre los ceros de la función zeta y los eigenvalores de matrices aleatorias unitarias (y complejas Hermitianas). Para ello consideraremos únicamente matrices aleatorias unitarias provenientes de un ensamble circular unitario (CUE) y matrices aleatorias Hermitianas provenientes de un ensamble Gaussiano unitario (GUE). Los eigenvalores de estos ensambles de matrices aleatorias han sido bastante estudiados, originalmente con el enfoque de física nuclear en [23] y actualmente desde un punto de vista moderno en [1], [8], [13]. El comportamiento límite de la distribución de los eigenvalores, en el caso del CUE, presenta patrones importantes que aparecen en encriptación telefónica, en diversos problemas de física y en el estudio de operadores de Toeplitz, para una reseña sobre estas aplicaciones ver [9].

Existen estudios sobre algunas conexiones entre la teoría de matrices aleatorias y la teoría de números que tratan diferentes aspectos de la teoría de números utilizando la teoría de matrices aleatorias, véanse los libros [19], [24]; y las reseñas [20], [22].

En este trabajo se muestra experimentalmente que los ceros de la función zeta se comportan asintóticamente como los eigenvalores de matrices aleatorias del ensamble circular unitario y del ensamble Gaussiano unitario. En la Sección 2 se inicia con algunos conceptos preliminares sobre los ceros de la función zeta. Enseguida se muestra la aproximación numérica de los huecos de los ceros a la función  $1 - \left(\frac{\text{sen } \pi x}{\pi x}\right)^2$ , que como veremos representa la función de correlación por pares de eigenvalores de ambos ensambles. También se muestra la aproximación numérica de los huecos de ceros consecutivos a los huecos de eigenvalores consecutivos de ambos ensambles. En la Sección 3 se definen el ensamble de matrices aleatorias circular unitario y el ensamble Gaussiano unitario; y se realiza una comparación numérica entre los ceros de la función zeta y los eigenvalores de las matrices del ensamble circular unitario basada en el comportamiento asintótico de la traza. En la última sección comentamos algunos resultados que se han obtenido en esta dirección.

## 2 Ceros de la función zeta

En esta sección investigaremos experimentalmente cómo los ceros de la función zeta, de acuerdo a la predicción de la teoría de matrices aleatorias, se comportan como los eigenvalores de matrices aleatorias unitarias (y complejas Hermitianas) a grandes dimensiones. Comenzaremos con algunos conceptos preliminares de la teoría de números. La *función zeta de Riemann* se define como

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

para cualquier número complejo  $s = \sigma + i\gamma$  tal que  $\sigma > 1$ . Esta función ha sido bastante estudiada, [17], [36]. Se sabe que esta serie convergente es una función analítica que no tiene ceros en la región  $\sigma > 1$ . Esta función se extiende por continuación analítica a una función analítica para todo valor de  $s$  en el plano complejo, excepto en  $s = 1$  donde tiene un polo simple de residuo 1. Además, esta extensión de la función zeta, que también denotaremos por  $\zeta(s)$ , satisface la ecuación funcional

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

En la región  $\sigma < 0$  vemos de esta ecuación que  $\zeta(s)$  no tiene ceros excepto ceros simples en  $s = -2, -4, -6, \dots$ , debido a que  $\operatorname{sen}\frac{\pi s}{2}$  tiene ceros simples en  $s = -2, -4, \dots$ , y las funciones  $\Gamma(1-s)$  y  $\zeta(1-s)$  no tienen ceros en esta región. Todos los demás ceros de  $\zeta(s)$ , llamados *ceros no triviales*, están en la *banda crítica*  $0 \leq \sigma \leq 1$ .

En 1859 Riemann [30] estableció la hipótesis de que todos los ceros no triviales están sobre la *recta crítica*  $\sigma = \frac{1}{2}$ :

$$\text{si } \zeta(\sigma + i\gamma) = 0 \text{ donde } 0 \leq \sigma \leq 1 \text{ entonces } \sigma = \frac{1}{2}.$$

Desde entonces esta hipótesis, conocida como *la hipótesis de Riemann (HR)*, permanece sin poder ser demostrada. En dicho trabajo Riemann mostró que esta hipótesis estaba íntimamente conectada con la distribución de los números primos.

*El teorema de los números primos* trata sobre la distribución asintótica de los números primos, fue conjeturado por Gauss en 1849 y demostrado por Hadamard y Vallée Poussin en 1896. Este teorema establece que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\operatorname{Li}(x)} = 1$  donde  $\pi(x)$  es la cantidad de números primos menores o iguales a  $x$  y  $\operatorname{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$ . En 1901 von Koch [38] obtuvo, bajo HR, una estimación asintótica más fina para el error en el teorema de los números primos, demostrando que  $|\pi(x) - \operatorname{Li}(x)| \leq C\sqrt{x} \log x$  para  $x$  suficientemente grande. En 1976 Schoenfeld [33] probó que la hipótesis de Riemann implica  $|\pi(x) - \operatorname{Li}(x)| \leq \frac{1}{8\pi}\sqrt{x} \log x$  para  $x \geq 2,657$ . Recientemente Dudek 2015 [12] demostró bajo HR que para todo  $x \geq 2$  existe un número primo  $p$  tal que  $x - \frac{4}{\pi}\sqrt{x} \log x < p \leq x$ .

Hasta ahora todos los ceros no triviales que se conocen (poco más de  $10^{22}$ ) están sobre la recta crítica. De hecho Riemann demostró que hay una infinidad de ellos sobre esta recta, pero esto no significa que no haya ninguno fuera de ella.

Suponiendo que todos los ceros no triviales se encuentran sobre la recta crítica podemos escribirlos como

$$s_j = \frac{1}{2} + i\gamma_j, \quad \gamma_j \text{ real.} \quad (1)$$

Una cuestión natural es cómo varían a lo largo de esta recta o cómo varía su densidad conforme se van alejando por encima o por debajo del eje real. Se sabe [36] que el número de ceros sobre la recta crítica que están hasta una “altura”  $T$  por encima o por debajo del eje real es aproximadamente  $\frac{|T|}{2\pi} \log \frac{|T|}{2\pi}$ . Esto significa que los ceros se vuelven más densos en torno a la altura  $T$  con densidad local  $\log \frac{|T|}{2\pi}$  a medida que la parte imaginaria crece absolutamente. Aunque el número de ceros en torno a la altura  $T$  va creciendo lentamente (por ser proporcional a la función log) su tendencia es bastante irregular, por lo que el estudio de sus fluctuaciones se vuelve muy importante. Sea  $T > 0$  y consideremos los ceros ordenados de manera creciente  $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots$  sobre la recta crítica. *Los ceros normalizados*

$$\tilde{\gamma}_j = \frac{\gamma_j}{2\pi} \log \frac{\gamma_j}{2\pi}$$

tienen la propiedad de que  $\#\{\tilde{\gamma}_j \in [0, N]\} \simeq N$  para  $N$  grande. Un *hueco* entre los ceros normalizados es cualquier diferencia

$$\tilde{\gamma}_j - \tilde{\gamma}_k.$$

El trabajo de Montgomery [25] fue el primer paso importante para entender el comportamiento de los huecos entre los ceros de la función zeta. Bajo la hipótesis de que todos los ceros no triviales son de la forma (1) Montgomery dio argumentos heurísticos para conjeturar que, para  $0 < a < b$ ,

$$\frac{1}{N} \#\{(j, k) : 1 \leq j, k \leq N, \tilde{\gamma}_j - \tilde{\gamma}_k \in [a, b]\} \approx \int_a^b 1 - \left(\frac{\text{sen } \pi x}{\pi x}\right)^2 dx, \quad (2)$$

cuando  $N \rightarrow \infty$ . Luego de (2), no obstante que los ceros no son variables aleatorias, Montgomery señaló que su conjetura también se podía formular diciendo que la función  $1 - \left(\frac{\text{sen } \pi x}{\pi x}\right)^2$  es la función de correlación por pares de ceros de la función zeta. Esta formulación de la conjetura en términos de la física matemática fue motivada por Dyson, quien le había señalado previamente a Montgomery que dicha función, cuya gráfica es la curva continua de la Figura 1, era precisamente la función de correlación por pares de los eigenvalores de una matriz aleatoria Hermitiana tomada del ensamble Gaussiano unitario GUE ver [23, Pág. 118] o de una matriz aleatoria unitaria tomada de un ensamble circular unitario CUE ver [23, Pág. 203], cuando la dimensión de la matriz tiende a infinito.

Si ahora nos fijamos en los huecos entre ceros normalizados consecutivos

$$\tilde{\gamma}_{j+1} - \tilde{\gamma}_j$$

y los consideramos como variables aleatorias se debe tener, de acuerdo a la conjetura de Montgomery, que para  $0 < a < b$ ,

$$\frac{1}{N} \#\{j : 1 \leq j \leq N, \tilde{\gamma}_{j+1} - \tilde{\gamma}_j \in [a, b]\} \approx \int_a^b p(0, x) dx, \quad (3)$$

donde  $p(0, x)$  es la *función de densidad de probabilidad de Gaudin* la cual tiene una expresión complicada que no daremos aquí pero cuya gráfica es la curva continua de la Figura 2. Esta función  $p(0, x)$  es la función de densidad de probabilidad asintótica de los huecos de eigenvalores consecutivos del GUE que aparece en la ecuación 6.4.32 de [23]; y también lo es para el CUE, esto último se puede deducir de las ecuaciones 6.4.33 y 11.2.15 en [23].

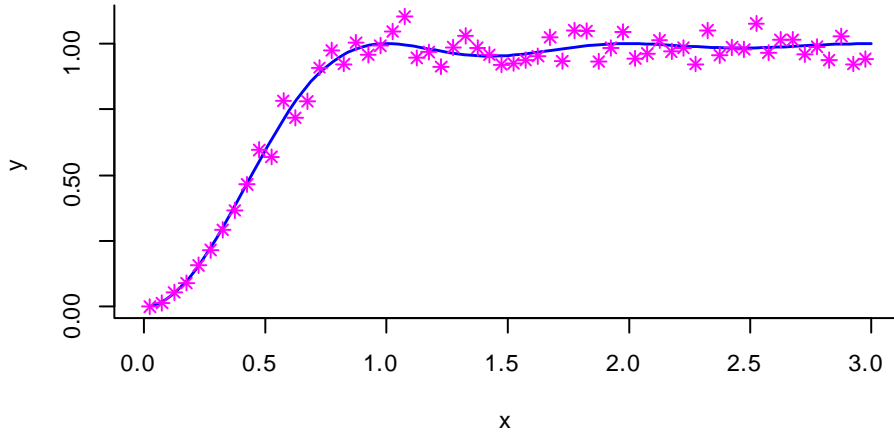


Figura 1: *Función de correlación por pares de ceros de la función zeta. Curva continua: predicción del CUE y GUE,  $y = 1 - \left(\frac{\text{sen } \pi x}{\pi x}\right)^2$ . Puntos: datos empíricos basados en los ceros  $\gamma_n$ ,  $10^{22} + 1 \leq n \leq 10^{22} + 10^4$ .*

Para investigar numéricamente (2) y (3) utilizamos como datos experimentales los valores de los ceros de la función zeta tomados del sitio web de Odlyzko [29]. Para evitar dificultades al manipular computacionalmente ceros del orden de  $10^{22}$  hemos trabajado, siguiendo a Odlyzko [26], con los huecos normalizados entre ceros consecutivos

$$\delta_n := (\gamma_{n+1} - \gamma_n) \frac{\log\left(\frac{\gamma_n}{2\pi}\right)}{2\pi},$$

en cuyo caso la conjetura (2) se reformula como

$$\frac{1}{M} \# \{(n, k) : N + 1 \leq n \leq N + M, k \geq 0, \delta_n + \dots + \delta_{n+k} \in [a, b]\} \approx \int_a^b 1 - \left(\frac{\text{sen } \pi x}{\pi x}\right)^2 dx,$$

cuando  $M, N \rightarrow \infty$  con  $M \geq N^\xi$  para algún  $\xi > 0$ , mientras que la conjetura (3) se reformula como

$$\frac{1}{M} \# \{n : N + 1 \leq n \leq N + M, \delta_n \in [a, b]\} \approx \int_a^b p(0, x) dx,$$

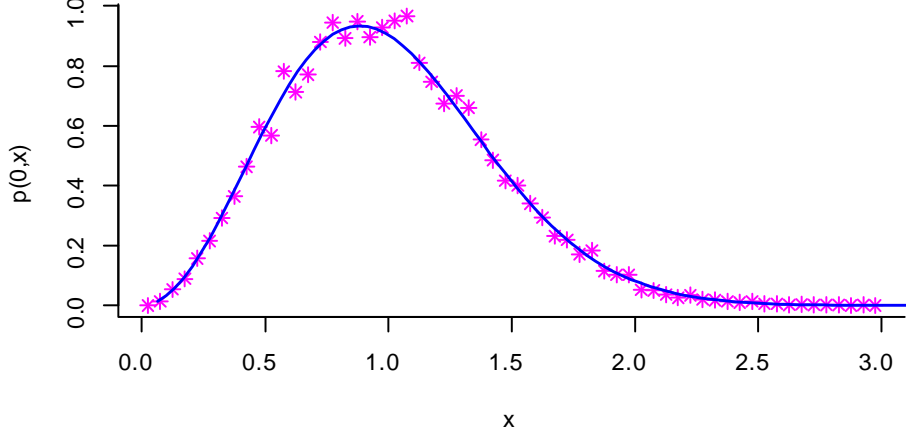


Figura 2: Función de densidad de los huecos normalizados  $\delta_n$ . Curva continua: predicción del CUE y GUE,  $p(0, x)$  es la función de densidad de probabilidad de Gaudin. Puntos: datos empíricos basados en los ceros  $\gamma_n$ ,  $10^{22} + 1 \leq n \leq 10^{22} + 10^4$ .

cuando  $M, N \rightarrow \infty$  con  $M \geq N^\xi$  para algún  $\xi > 0$ . Los cálculos numéricos se realizaron con los diez mil ceros posteriores al cero  $10^{22}$ , es decir con los ceros  $\frac{1}{2} + i\gamma_n$  donde  $10^{22} + 1 \leq n \leq 10^{22} + 10^4$  aquí  $N = 10^{22}, M = 10^4$ . La Figura 1 ilustra la aproximación a la función de correlación por pares de ceros de la función zeta. A cada intervalo  $[\alpha, \beta) = [0, 0.05), [0.05, 0.1), \dots, [2.95, 3)$  le corresponde un punto en la posición  $x = (\alpha + \beta) / 2$ ,

$$y = \frac{20}{10^4} \# \{ (n, k) : 10^{22} + 1 \leq n \leq 10^{22} + 10^4, \delta_n + \dots + \delta_{n+k} \in [\alpha, \beta) \}.$$

La curva continua corresponde a la predicción CUE (y GUE)  $y = 1 - \left(\frac{\text{sen } \pi x}{\pi x}\right)^2$ .

La Figura 2 corresponde al histograma de los espacios normalizados entre ceros consecutivos de la función zeta. A cada intervalo  $[\alpha_k, \beta_k)$ ,  $\alpha_k = k/20$ ,  $\beta_k = \alpha + 1/20$ ,  $k = 0, 1, \dots, 59$  le corresponde un punto en la posición  $x = (\alpha + \beta) / 2$ ,

$$y = \frac{20}{10^4} \# \{ n : 10^{22} + 1 \leq n \leq 10^{22} + 10^4, \delta_n \in [\alpha, \beta) \}.$$

La curva continua corresponde a predicción CUE (y GUE) donde los valores  $y = p(0, x)$  de la distribución de Gaudin fueron tomados de la Tabla A.15.1 en [23].

En ambos casos los cálculos numéricos se aproximan razonablemente a las predicciones CUE (y GUE) a pesar de haber utilizando tan sólo los  $10^4$  ceros posteriores al cero  $10^{22}$ . En Odlyzko [26], [27], [28] se analizan las aproximaciones numéricas de los ceros de la función zeta a la función de correlación por pares y a la distribución de Gaudin de estos ensambles, ambas aproximaciones van mejorando sustancialmente cuando se analizan los primeros  $10^5$

ceros, luego los  $10^5$  ceros posteriores al cero  $10^{12}$ ; y por último al considerar decenas de millones de ceros posteriores a los ceros  $10^{20}$  y  $10^{22}$ , al grado de que los puntos se ajustan de manera casi perfecta a las predicciones teóricas.

### 3 Eigenvalores de matrices aleatorias

En esta sección definiremos los ensambles circular unitario y Gaussiano unitario; y realizaremos una comparación numérica entre los ceros de la función zeta y los eigenvalores de las matrices del ensamble circular unitario, basada en el comportamiento asintótico de la traza.

Una *matriz unitaria* de  $N \times N$  es una matriz compleja  $U$  tal que  $UU^* = I_N$  es la matriz identidad. El conjunto  $\mathcal{U}_N$  de matrices unitarias de  $N \times N$  forma un grupo compacto con la multiplicación usual de matrices como la operación de grupo y con la topología inducida por el producto interior  $\text{tr}(UT^*)$ . A  $\mathcal{U}_N$  se le conoce como *el grupo unitario*.

Al equipar el conjunto de matrices unitarias  $\mathcal{U}_N$  con la única medida de probabilidad invariante ante la multiplicación de grupo  $\mathbf{P}_N$ , o en otras palabras con la *medida de Haar normalizada* [16], se convierte en un espacio de probabilidad. Este espacio de probabilidad  $(\mathcal{U}_N, \mathbf{P}_N)$  donde  $N = 1, 2, \dots$  es conocido desde el punto de vista de la física como *ensamble circular unitario CUE* debido a que la distribución  $\mathbf{P}_N$  es invariante bajo la multiplicación de grupo, es decir para cualquier conjunto Boreliano  $A$  de  $\mathcal{U}_N$  y  $U \in \mathcal{U}_N$ ,  $\mathbf{P}_N(A) = \mathbf{P}_N(AU)$ .

Una matriz aleatoria  $U : \Omega \rightarrow \mathcal{U}_N$  que tiene la distribución de Haar  $\mathbf{P}_N$  se dice que pertenece al ensamble circular unitario. Una realización de dicha matriz aleatoria unitaria  $U$  se interpreta como un elemento tomado al azar de  $\mathcal{U}_N$  con respecto a la distribución de Haar  $\mathbf{P}_N$ . En [10] se muestra como construir  $\Omega$  para dar el significado probabilístico preciso al hecho de tomar una matriz al azar del grupo unitario  $\mathcal{U}_N$  con respecto a la distribución de Haar  $\mathbf{P}_N$ . Ahí también se muestra dicha construcción para los otros dos *grupos compactos clásicos*: *el ortogonal*  $\mathcal{O}_N$  y *el simpléctico*  $\mathcal{U}_{Sp_{2N}}$ , donde  $\mathcal{O}_N$  es el subgrupo de  $\mathcal{U}_N$  que consiste de las matrices de  $N \times N$  reales y  $\mathcal{U}_{Sp_{2N}}$  es el subgrupo de  $\mathcal{U}_{2N}$  que consiste de las matrices  $X$  de  $2N \times 2N$  tales que  $X^T J X = J$  donde

$$J = \begin{pmatrix} O & -I_N \\ I_N & O \end{pmatrix}.$$

Dado que una matriz aleatoria unitaria  $U$  es diagonalizable sus eigenvalores, los cuales son aleatorios, están en el círculo unitario

$$e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_N} \tag{4}$$

con  $0 \leq \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N \leq 2\pi$ . Estos eigenvalores no son independientes, de hecho son fuertemente dependientes y la función de densidad de cada uno de ellos es uniforme  $\frac{1}{2\pi}$ . Si ordenamos los argumentos (o eigenángulos)

$$\theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_N,$$

los huecos normalizados entre eigenángulos consecutivos

$$\frac{N}{2\pi} (\theta_{j+1} - \theta_j)$$

son variables aleatorias idénticamente distribuidas y en el límite cuando  $N \rightarrow \infty$  tienen la distribución de Gaudin, este hecho se puede deducir de las ecuaciones 6.4.33 y 11.2.15 en [23]. La función de correlación por pares de  $U$  está dada en [23, Pág. 203].

Para comparar los ceros de la función zeta con los eigenvalores de una matriz aleatoria unitaria seguimos la estrategia de enrollar los ceros de la función zeta en el círculo unitario como en [6], [21]: se toma una cantidad determinada de ceros, se agrupan y los ceros de cada grupo se enrollan en el círculo unitario cuidando de preservar los huecos entre ellos. Consideremos números complejos de la forma  $\frac{1}{2} + i\gamma_j$  con  $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_M$ . Sus huecos consecutivos

$$h_j = \gamma_{j+1} - \gamma_j \quad 1 \leq j \leq M$$

los agrupamos en conjuntos de tamaño  $N$ . Cada conjunto de huecos lo mapeamos en el círculo unitario mediante

$$z_j = \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{t_j}{t_M} + X \right) \right] \quad 1 \leq j \leq N \quad (5)$$

donde  $t_j = h_1 + \dots + h_j$  es la suma acumulada de los huecos y  $X$  es una variable aleatoria uniforme en  $[0, 2\pi]$  generada de manera independiente para cada grupo, con el fin de darle a cada grupo una rotación independiente.

Compararemos (4) y (5) utilizando el siguiente resultado asintótico de la traza de una matriz del CUE en [6]: para una matriz aleatoria  $U \in \mathcal{U}_N$  con distribución de Haar,

$$\mathbf{P}_N (|\text{tr}U|^2 \geq t) \rightarrow e^{-t} \quad \text{uniformemente en } t \text{ cuando } N \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Para la comparación utilizamos los diez mil ceros consecutivos de la función zeta partiendo del cero  $10^{22} + 1$  tomados de [29], los agrupamos en 212 bloques de tamaño 47 y los enrollamos en el círculo unitario como se explicó anteriormente. Para cada bloque calculamos la “traza” como la suma de los 47 valores en el círculo unitario. Bajo la hipótesis de que los ceros (5) se comportan como los eigenvalores (4) los cuadrados de los módulos de cada suma deberían comportarse aproximadamente, de acuerdo a (6), como observaciones tomadas al azar de una variable aleatoria con distribución exponencial estándar. La Figura 3 muestra la aproximación del histograma de los cuadrados de la “traza” de estos 212 bloques a la curva continua que corresponde a la predicción exponencial estándar.

La justificación del número y tamaño de los bloques se debe a que la densidad de los ceros en torno a la altura  $T$  es aproximadamente  $\frac{1}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi}$  mientras que la de los eigenvalores de la matriz aleatoria unitaria es  $\frac{N}{2\pi}$ ; por lo que para que coincidan dichas densidades tomamos  $N = \lceil \log \frac{T}{2\pi} \rceil$ . Luego como el cero número  $10^{22} + 1$  está dado por

$$\frac{1}{2} + i \times (1, 370, 919, 909, 931, 995, 308, 226.68016095\dots) \cong \frac{1}{2} + i \times 0.137 \times 10^{22},$$



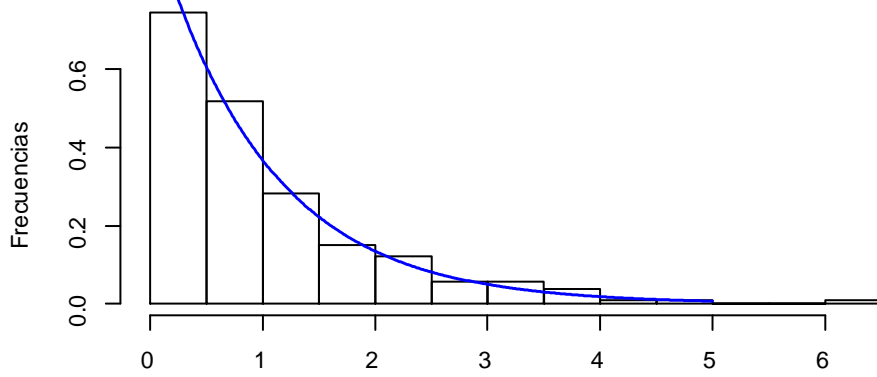


Figura 3: *Histograma de los cuadrados de las “trazas” de 212 bloques cada uno con 47 ceros enrollados en el círculo unitario. Curva continua: predicción exponencial estándar. Columnas: datos empíricos basados en los ceros  $\gamma_n$ ,  $10^{22} + 1 \leq n \leq 10^{22} + 10^4$ .*

y  $\log\left(\frac{0.137 \times 10^{22}}{2\pi}\right) \cong 46.83$ , los ceros a una altura  $T = 0.137 \times 10^{22}$  se deben comparar con realizaciones de elementos aleatorios de  $\mathcal{U}_{47}$ .

Coram y Diaconis [6] realizan dos pruebas de bondad de ajuste para la exponencial estándar y concluyen que hay fuerte evidencia a favor de la hipótesis de que las sumas de los bloques consecutivos de los ceros enrollados en el círculo unitario se comportan asintóticamente como las trazas de matrices con distribución de Haar, para  $N = 42$  con tamaño de muestra  $M = 1190$ . Más aún, ellos descartan con pruebas estadísticas más avanzadas que los ceros enrollados sigan la distribución de otros modelos en el círculo unitario como la distribución uniforme y la distribución “picked fence”.

**Observación.** Enseguida introducimos brevemente el GUE, que como se mencionó al inicio tiene la misma función de correlación por pares y la misma distribución asintótica de los huecos entre eigenvalores consecutivos que el CUE. Una *matriz Hermitiana* de  $N \times N$  es una matriz compleja  $H$  tal que  $H = H^*$ . Sea  $\mathcal{H}_N$  el espacio vectorial de las matrices Hermitianas de  $N \times N$  con la topología inducida por el producto interior  $\text{tr}(UT^*)$ . Definamos como  $\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \dots$  las distribuciones de las matrices aleatorias

$$\left( \begin{array}{cc} \xi_{11} & \frac{\xi_{12} + i\eta_{12}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\xi_{12} - i\eta_{12}}{\sqrt{2}} & \xi_{22} \end{array} \right) \in \mathcal{H}_2, \quad \left( \begin{array}{ccc} \xi_{11} & \frac{\xi_{12} + i\eta_{12}}{\sqrt{2}} & \frac{\xi_{13} + i\eta_{13}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\xi_{12} - i\eta_{12}}{\sqrt{2}} & \xi_{22} & \frac{\xi_{23} + i\eta_{23}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\xi_{13} - i\eta_{13}}{\sqrt{2}} & \frac{\xi_{23} - i\eta_{23}}{\sqrt{2}} & \xi_{33} \end{array} \right) \in \mathcal{H}_3, \dots$$

donde  $\xi_{ij}, \eta_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3, \dots$  es una familia de variables aleatorias independientes Gaussianas

con media 0 y varianza 1. Una matriz aleatoria  $X \in \mathcal{H}_N$  que tiene la distribución  $\mathbf{P}_N$  se dice que pertenece al *Ensamble Gaussiano Unitario* (GUE), ver [1], [10]. La terminología GUE, de acuerdo a la literatura física, se debe a que la distribución  $\mathbf{P}_N$  de estas matrices aleatorias es invariante bajo la multiplicación por el grupo unitario, es decir para cualquier conjunto Boreliano  $A$  en  $\mathcal{H}_N$  y  $U \in \mathcal{U}_N$ ,  $\mathbf{P}_N(A) = \mathbf{P}_N(AU)$ . Este ensamble a diferencia del CUE no es compacto. Sean  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$  los eigenvalores de una matriz aleatoria  $X$  de  $N \times N$  del GUE con la normalización  $\tilde{\lambda}_j = \frac{\sqrt{N}}{\pi} \lambda_j$ . La función correlación por pares de  $X$  está dada en [23, Pág. 118]. La distribución asintótica cuando  $N \rightarrow \infty$  de los huecos normalizados entre eigenvalores consecutivos  $\tilde{\lambda}_{j+1} - \tilde{\lambda}_j$  está dada por la distribución de Gaudin, véase la ecuación 6.4.32 de [23].

Recientemente Tao [35] demostró que la universalidad de este resultado asintótico del GUE es válida para ensambles más generales de matrices aleatorias Hermitianas, llamadas matrices de Wigner. Una *matriz de Wigner* es una matriz aleatoria  $X_N = (\xi_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$  donde  $\xi_{ij}$  para  $1 \leq i \leq j \leq N$  son variables aleatorias independientes con media 0 y varianza 1 tales que  $\xi_{ij} = \overline{\xi_{ji}}$  (en particular  $\xi_{ii}$  son reales). Bajo ciertas condiciones sobre los momentos de la matriz Wigner  $X_N$ , la distribución asintótica cuando  $N \rightarrow \infty$  de los huecos normalizados entre eigenvalores consecutivos  $\tilde{\lambda}_{j+1} - \tilde{\lambda}_j$  está dada por la distribución de Gaudin.

En esta dirección otro de los resultados asintóticos centrales en la teoría de matrices aleatorias es el teorema de Wigner, que establece que bajo ciertas condiciones sobre los momentos de la matriz de Wigner  $X_N$ , la *función de distribución espectral empírica*  $F_{X_N}(x) = \frac{1}{N} \# \{i : \lambda_i \leq x\}$  converge con probabilidad 1 a la función de *distribución del semi-círculo*

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - t^2} 1_{[-2,2]}(t) dt,$$

cuando  $N \rightarrow \infty$ , véase [1], [11], [34]. Esta distribución límite juega el mismo papel en la teoría de probabilidad libre como el que juega la distribución Gaussiana en la teoría de probabilidad clásica. Originalmente Wigner obtuvo este resultado en su trabajo [40], con el que logró explicar el comportamiento estadístico de los niveles de energía de un sistema físico en términos del comportamiento asintótico de los eigenvalores de matrices aleatorias simétricas reales de este tipo.

## 4 Discusión

Se inspeccionó experimentalmente la relación asintótica entre los ceros de la función zeta y las predicciones teóricas de los eigenvalores de matrices del CUE y GUE utilizando diez mil ceros a partir del cero  $10^{22}$ , no tanto por limitaciones computacionales sino porque no se tuvo acceso a más ceros experimentales; aún así se logró mostrar numéricamente esta relación tan interesante como insospechada, bajo la validez de la hipótesis de Riemann. Hay que señalar que la teoría de matrices aleatorias no es suficiente para responder a todas las preguntas acerca de la función zeta, es necesario desarrollar en paralelo la teoría de números,

ya que existen estudios donde la predicción de la teoría de matrices aleatorias se contrapone con resultados de teoría de números, por ejemplo al estudiar la varianza de los ceros sobre intervalos de longitud finita [6, Sec. 3.5].

Existen otras aplicaciones de la teoría de matrices aleatorias en distintos aspectos de la teoría de números en la dirección que hemos seguido aquí. En particular una aplicación consiste en estudiar los ceros de muchos tipos de “funciones zeta” llamadas funciones  $L$ . Estas funciones aparecen en la teoría de números no únicamente en el problema de la distribución de los números primos sino en problemas algebraicos, numéricos y analíticos. Todas estas funciones son extensiones de la función  $\zeta(s)$  con la cual comparten propiedades similares, por ejemplo tienen algunos ceros fácilmente identificables y los demás están en una “banda crítica”; y también se cree que todos estos ceros no triviales satisfacen la “hipótesis de Riemann generalizada”, es decir que se localizan en una “recta crítica”; para una breve introducción de estas propiedades ver [5]. Una descripción detallada del comportamiento estadístico de los ceros de las funciones  $L$  mediante la teoría de matrices aleatorias se presenta en Galindo [14].

Una pregunta análoga a la de Dyson y Montgomery es si los ceros de estas funciones zeta están predichos por las distribuciones provenientes de sistemas cuánticos caóticos. Este último término se refiere a un sistema cuántico cuyo análogo clásico es caótico. Las propiedades estadísticas del espectro (de energía) de un sistema cuántico caótico y las del espectro de un ensamble de matrices aleatorias son las mismas, de ahí que el caos cuántico represente una aplicación importante de la teoría de matrices aleatorias [39]. Rubinstein [31] muestra experimentalmente que las distribuciones de los ceros de varias funciones zeta concuerdan con las distribuciones de los niveles de energía de varios sistemas cuánticos caóticos. Katz y Sarnak [18] muestran experimentalmente que las distribuciones del mínimo y algunas otras estadísticas de los ceros de cada función zeta concuerdan con las de algunos modelos cuánticos caóticos.

Las aplicaciones de la teoría de matrices aleatorias a la teoría de números tienen en común: las funciones  $L$ . Asumiendo la validez de la hipótesis de Riemann generalizada se ha mostrado que los ceros de las funciones  $L$  se comportan asintóticamente como los eigenvalores de matrices aleatorias Hermitianas. Por ejemplo Rudnik y Sarnak [32] extendieron el resultado de Montgomery (2) a la denominada función  $n$ -correlación de ceros normalizados de  $\zeta(s)$  obteniendo como contraparte límite la función  $n$ -correlación de eigenvalores de una matriz del GUE. Más aún, probaron que este comportamiento universal es válido para las funciones  $L$ , obteniendo en particular que las funciones  $L$  poseen la misma función de correlación por pares del GUE. Por otra parte, los experimentos numéricos en Rubinstein [31] muestran evidencia que apoya la correspondencia entre estadísticas locales de los ceros de diversas funciones  $L$  y estadísticas locales de los eigenvalores de matrices del GUE. Esto ha llevado a formular la universalidad de la conjetura de Montgomery, denominada *conjetura de Montgomery-Odlyzco*, de que los huecos entre los ceros de funciones  $L$  son, estadísticamente, los mismos que los huecos entre eigenvalores de matrices del GUE, [14, Cap. 4].

Katz y Sarnak [18], [19] propusieron que los ceros de las funciones  $L$  se comportan estadísticamente como los eigenángulos de matrices aleatorias de cualquiera de los tres grupos

compactos clásicos  $\mathcal{O}_N$ ,  $\mathcal{U}_N$ ,  $\mathcal{U}_{Sp_{2N}}$ . Ellos demostraron que los huecos locales de los eigenvalores de una matriz aleatoria de cualquiera de los tres grupos compactos clásicos se comportan universalmente como los del GUE cuando  $N \rightarrow \infty$ , véase también [14, Cap. 2]. Por ejemplo, la función de correlación por pares del GUE es común a los tres.

Muchas de las conexiones que se estudian entre la teoría de matrices aleatorias y la teoría de números tienen aspectos heurísticos, sin embargo una de las que tiene fundamentos más sólidos es la relacionada con las funciones zeta de curvas sobre campos finitos, véase [19], [2, Cap. 24]. A cada función zeta sobre  $F_m[x]$  (los polinomios con coeficientes sobre un campo  $F_m$  que tiene  $m$  elementos) se le asocia una curva elíptica suave  $\xi$  geoméricamente conexa sobre  $F_m$ . A esta curva se le asocia a su vez un polinomio entero mónico  $P_\xi$  de grado  $2N$ , donde  $N$  es el género de  $\xi$ . Por ejemplo, bajo ciertas consideraciones sobre  $\xi$  el polinomio  $P_\xi$  se vuelve el polinomio característico de una matriz simpléctica de tamaño  $2N$ . Al permitir variar la curva  $\xi$  se generan ensambles de matrices  $X_N$ , es aquí donde se da la conexión con la teoría de matrices aleatorias. Estas matrices  $X_N$  se vuelven equidistribuidas con respecto a la medida de Haar normalizada sobre  $\mathcal{U}_{Sp_{2N}}$  cuando  $m \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, los ceros de las funciones zeta asociadas están distribuidos como los eigenvalores de las matrices aleatorias del grupo simpléctico  $\mathcal{U}_{Sp_{2N}}$ . De manera análoga, el grupo ortogonal y el grupo unitario tienen asociadas familias de curvas para las cuales se tiene la equidistribución.

## Bibliografía

- [1] Anderson, G. W., Guionnet, A., Zeitouni, O. *An Introduction to Random Matrices*, Cambridge, 2010.
- [2] Akeman, G., Baik, J., and Di Francesco, P. *The Oxford Handbook of Random Matrix Theory*, Oxford, 2011.
- [3] Blower, G. *Random Matrices: High Dimensional Phenomena*, LMS Lecture Notes Series 367, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [4] Borwein, P., Choi, S., Rooney B. and Weirathmueller, A. *The Riemann Hypothesis: A Resource for the Afficionado and Virtuoso Alike*, CMS Books in Mathematics, 2010.
- [5] Conrey, J. B. Families of  $L$  functions and 1 level densities, *In Recent perspectives on random matrix theory and number theory*, LMS Lecture Notes Series, 322, 225-249, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [6] Coram, M. and Diaconis, P. New tests or the correspondence between unitary eigenvalues and the zeros of Riemann's zeta function, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 36, 2883-2906, 2003.
- [7] Couillet, R. and Debbah, M. *Random Matrix Methods for Wireless Communications*, Cambridge University Press, 2011.

- [8] Deift, P. *Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann-Hilbert Approach*, Courant Lecture Notes in Mathematics, 3 Courant, New York, 1999.
- [9] Diaconis, P. Patterns in eigenvalues: The 70th Josiah Willard Gibbs lecture, *Bulletin of the Amer. Math. Soc.*, Vol. 40, No. 2, 155-178, 2003.
- [10] Diaconis, P. What is a random matrix?, *Notices of the Amer. Math. Soc.*, Vol. 52, No. 11, 1348-1349, 2005.
- [11] Domínguez Molina, J. A. y Rocha Arteaga, A. El teorema de Wigner para matrices aleatorias, *SMM Miscelánea Matemática*, 52, 31-51, 2011.
- [12] Dudek, A. W. On the Riemann hypothesis and the difference between primes. *International Journal of Number Theory*. Vol. 11, No. 03, 771-778, 2015.
- [13] Forrester, P. J. *Log-Gases and Random Matrices*, Princeton University Press, 2010.
- [14] Galindo López J. C. *Matrices Aleatorias y Funciones L*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2013.
- [15] Guionnet, A. *Large Random Matrices: Lectures on Macroscopic Asymptotics*, (École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXXVI 2006), Lecture Notes in Mathematics, Springer, 2009.
- [16] Halmos, P. R. *Measure Theory*, Springer-Verlag New York, 1974.
- [17] Karatsuba, A. and Voronin, S. *The Riemann zeta function*, Berlin: De Gruyter, 1991.
- [18] Katz, N. M. and Sarnak, P. Zeros of zeta functions and symmetry, *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.) **36**, 1-26, 1999.
- [19] Katz, N. M. and Sarnak, P. *Random matrices, Frobenius Eigenvalues and Monodromy*, AMS Colloquium Publications **45**, Amer. Math. Soc., 1999.
- [20] Keating, J. P. *L functions and the characteristic polynomials of random matrices. In Recent perspectives on random matrix theory and number theory, LMS Lecture Notes Series 322, pages 251-278. Cambridge University Press. Cambridge, 2005.*
- [21] Keating J. P. and Snaith N. C. Random matrix theory and  $\xi\left(\frac{1}{2} + it\right)$ , *Commun. Math. Phys.*, 214, 57-89, 2000
- [22] Keating J. P. and Snaith N. C. Random matrices and *L* functions, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 36 (12): 2859-81, 2003.
- [23] Mehta, M. L. *Random Matrices*. Third Edition. Elsevier, 2004.

- [24] Mezzadri, F. and Snaith N. C. *Recent Perspectives on Random Matrix Theory and Number Theory*, LMS Lecture Notes Series 322. Cambridge University Press. Cambridge, 2005.
- [25] Montgomery, H. L. The pair correlation of zeros of the zeta function, *Proc. Symp. Pure Math.*, 24, 181-193, 1973.
- [26] Odlyzko, A. M. On the distribution of spacings between zeros of the zeta function. *Mat. Comp.*, Vol. **48**, No. 177, 273-308, 1987.
- [27] Odlyzko, A. M. The 10<sup>20</sup>th zero of the Riemann zeta function and 70 million of its neighbors, preprint, 1989, <http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/unpublished/index.html>.
- [28] Odlyzko, A. M. The 10<sup>22</sup>-nd zero of the Riemann zeta function. *Dynamical, Spectral, and Arithmetic Zeta Functions*, M. van Frankenhuysen and M. L. Lapidus, eds., *Amer. Math. Soc., Cont. Math. Series*, No. 290, 139-144, 2001.
- [29] [http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/zeta\\_tables/index.html](http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/zeta_tables/index.html).
- [30] Riemann, B. Ueber die anzahl der primzahlen unter einer gegebenen grosse, *monatsberichte der berliner akademie*, november, 1859.
- [31] Rubinstein, M. *Evidence for a Spectral Interpretation of Zeros of L functions*, Thesis, Princeton University, 1998.
- [32] Rudnick, Z. and Sarnak, P. Zeros of principle L functions and random matrix theory, *Duke Math. Jnl.*, Vol. 81, 2, 269-322, 1996.
- [33] Schoenfeld, L. Sharper bounds for the Chebyshev Functions  $\theta(x)$  and  $\psi(x)$ . II. *Mathematics of computations*, Vol. 30, No. 134, 337-360, 1976.
- [34] Tao, T. *Topics in Random Matrix Theory*. Amer. Math. Soc., 2012.
- [35] Tao, T. The asymptotic distribution of a single eigenvalue gap of a Wigner matrix, *Probab. Theory Relat. Fields*, 157, 81-106, 2013.
- [36] Titchmarsh, E. *The Theory of the Riemann Zeta Function*, second ed., Oxford: Oxford University Press, 1986.
- [37] Tulino, A. M. and Verdú, S. *Random Matrix Theory and Wireless Communications*, now Pub. Inc., 2004.
- [38] von Koch, N. H. Sur la distribution des nombres premiers. *Acta Mathematica*, Vol 24, 159-182, 1901.
- [39] Weidenmüller, H. A. and Mitchell, G. E. Random matrices and chaos in nuclear physics: Nuclear structure, *Rev.Mod. Phys.*, Vol. 81, 2009.

- [40] Wigner, E. P. On the distributions of the roots of certain symmetric matrices. *Annals of Mathematics*, Vol. 67, No. 2, 325-327, 1958.
- [41] Wishart, J. The generalized product moment distribution in sample from a normal multivariate population, *Biometrika* **20A**, 32-52, 1928.