

## CURSO DE MATRICES ALEATORIAS

Agosto-Diciembre 2010

**Profesor:** [Víctor M. Pérez Abreu C.](#)

**Horario y lugar:** Lunes y miércoles de 9.30 a 10.50 hrs, salón K6 CIMAT.

**Sitio del Curso:** <http://www.cimat.mx:88/~pabreu/MatricesAleatorias.html>

**Clave Licenciatura:** TSE MAT 410. **Clave Maestría:** TSP III 90SPR03.

**Inicia:** Lunes 16 de agosto, a excepción de los alumnos del tercer semestre de la Maestría en Probabilidad y Estadística, para quienes el curso comienza el lunes 23 de agosto. Los días 16 y 18 de agosto se da una introducción a medida e integración.

### Reflexiones en prefacios e introducciones de algunos libros recientes y clásicos de Matrices Aleatorias:

**Log-Gases and Random Matrices, de Peter Forrester (2010):** *Often it is asked what makes a mathematical topic interesting. Some qualities which come to mind are usefulness, beauty, depth and fertility. Usefulness is usually measured by the utility of the topic outside mathematics. Beauty is an alluring quality of much mathematics, with the caveat that it is often something only a trained eye can see. Depth comes via the linking together of multiple ideas and topics, often seemingly removed from the original context. And fertility means that with a reasonable effort there are new results, some useful, some with beauty, and a few maybe with depth, still waiting to be found.*

**An Introduction to Random Matrices, de Greg W. Anderson, Alice Guionnet y Ofer Zeitouni (2010):** *The study of random matrices, and in particular the properties of their eigenvalues, has emerged from the applications, first in data analysis and later on as statistical models for heavy-nuclei atoms. Thus, the field of random matrices owes its existence to applications. Over the years, however, it became clear that models related to random matrices play an important role in areas of pure mathematics. Moreover, the tools used in the study of random matrices came themselves from different and seemingly unrelated branches of mathematics.*

**Tercera Edición del libro clásico Random Matrices, de Madan L. Mehta (2004):** *In the last decade following the publication of the second edition of this book the subject of random matrices found applications in many new fields of knowledge. In heterogeneous conductors (mesoscopy systems) where the passage of electric current may be studied by transfer matrices, quantum chromo dynamics characterized by some Dirac operator, quantum gravity modeled by some random triangulation of surfaces, traffic and communication networks, zeta function and L-series in number theory, even stock movements in financial markets, wherever imprecise matrices occurred, people dreamed of random matrices.*

**Random Matrix Theory: Invariant Ensembles and Universality, de Percy Deift y Dimitri Gioev (2009):** *There has been a great upsurge of interest in random matrix theory (RMT) in recent years. This upsurge has been fueled primary by the fact that an extraordinary variety of problems in physics, pure mathematics, and applied mathematics are now known to be modeled by RMT. By this we mean the following: Suppose we are investigating some statistical quantities  $\{a_k\}$  in a neighborhood of some point A, say. The  $a_k$ 's are to be compared with the eigenvalues  $\{l_k\}$ , in a neighborhood of some point L, of a matrix taken from some random matrix ensemble. If the statistics of the  $\{a_k\}$ 's, appropriately scaled, are described by the statistics of the  $\{l_k\}$ 's, appropriately scaled, then we say that the  $\{a_k\}$ 's are modeled by random matrix theory.*

### Conocimientos necesarios para el curso:

- 1) El curso está orientado principalmente a alumnos del tercer semestre de la Maestría en Probabilidad y Estadística del CIMAT, así como de semestres avanzados de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Guanajuato y de los otros posgrados del CIMAT.
- 2) Un aspecto interesante de la Teoría de Matrices Aleatorias es que su estudio requiere de varios temas de matemáticas. El curso será impartido de forma auto contenido en la medida de lo posible, cubriendo temas de análisis funcional, álgebra y combinatoria, así como probabilidad en espacios métricos y convergencia débil de medidas de probabilidad.
- 3) La primera semana se dará una muy breve introducción a la teoría de la medida e integración en espacios abstractos. Durante el desarrollo del curso se construirán ejemplos de medidas en espacios de matrices y las inducidas por sus valores propios.

### Objetivos del curso:

Que al final del curso el alumno sea capaz de:

- 1) Entender el tipo de problemas que estudia la teoría de matrices aleatorias.
- 2) Conocer los principales resultados asintóticos sobre valores propios de las matrices aleatorias de dimensión grande más comunes.
- 3) Dominar las herramientas de probabilidad libre para el estudio del espectro asintótico de matrices aleatorias.
- 4) Comprender algunas relaciones de la Teoría de Matrices Aleatorias con otras ramas de las matemáticas, como [teoría analítica de números](#), [combinatoria](#) y [polinomios ortogonales](#).
- 5) Enterarse de la importancia de la Teoría de Matrices Aleatorias en aplicaciones modernas, como en la [comunicación inalámbrica](#) y la [mecánica estadística](#).
- 6) Definir algunos temas para estudios o investigaciones posteriores.

### Evaluación del curso:

- 1) 60% de la calificación de tareas a lo largo del semestre.
  - a) Habrá seis Listas de Ejercicios, que corresponden a los temas 2-6 del contenido.
  - b) Se pedirá que algunos de los ejercicios se expongan en clase, pero no contará como exposición a la que se refiere la segunda forma de evaluación.
- 2) 40% de exposición de un tema a finales de noviembre o principios de diciembre.
  - a) El tema de exposición de cada alumno deberá estar definido a más tardar el día lunes 20 de septiembre.
  - b) Las exposiciones serán de 1 hora y 20 minutos y podrán ser usando el pizarrón o algún medio electrónico.
  - c) Se deberá elaborar un escrito de no más de 20 páginas sobre el tema de la exposición.

## Contenido tentativo del curso:

- 1) Breve introducción a [Medida e Integración](#). Medidas de probabilidad en espacios métricos Polacos.
- 2) Medida de Haar en grupos compactos clásicos y matrices aleatorias asociadas.
- 3) Matrices de Wigner y el Teorema de Wigner. Ley del semicírculo: momentos y números de Catalán. Combinatoria asociada a una prueba del [Teorema de Wigner](#): gráficas, árboles, trayectorias de Dick y particiones que no se cruzan.
- 4) Medidas Gaussianas en espacios de matrices y los ensambles clásicos GOE y GUE de matrices aleatorias Gaussianas. Distribución conjunta de valores propios para el GOE y el GUE. Rol de la medida de Haar en el teorema de descomposición espectral para GOE y GUE. Fórmula integral de Selberg. Polinomios de Hermite. Distribuciones de separaciones de valores propios y huecos. Rol de determinante de Fredholm. Distribución asintótica (Tracy-Widom I) para el valor propio máximo.
- 5) Ensamblados de matrices aleatorias de Wishart. Distribución conjunta de los valores propios y las matrices aleatorias en el teorema de descomposición espectral. Teorema de Marchenko-Pastur para el espectro asintótico y elementos para una de sus posibles demostraciones: transformada de Cauchy-Stieltjes, momentos de la distribución de Marchenko-Pastur. Distribución asintótica (Tracy-Widom II) para el valor propio máximo. Aplicaciones al estudio de matrices de covarianza muestral de dimensión grande y [capacidad de sistemas MIMO en comunicación inalámbrica](#).
- 6) Elementos de probabilidad libre y su rol en el estudio del espectro asintótico de matrices aleatorias. Herramientas analíticas y de análisis funcional: Algebras de operadores, propiedades espectrales,  $C^*$ -álgebras, álgebras de Von-Neumann, distribuciones de probabilidad en espacios algebraicos no conmutativos. Cálculo funcional no conmutativo. Independencia y convolución libre. Teorema del límite central libre. Independencia libre asintótica de matrices aleatorias. Espectro de la suma y el producto de matrices aleatorias en relación libre asintótica.
- 7) Temas selectos: Dependiendo del interés de los estudiantes, se podrían cubrir algunos otros temas tales como [procesos estocásticos puntuales obtenidos mediante determinantes](#), [matrices aleatorias y teoría analítica de números](#), [relación con polinomios ortogonales](#), matrices aleatorias no Hermitianas y la ley del círculo, [matrices aleatorias y combinatoria](#), procesos estocásticos con valores en matrices, aplicaciones en estadística multivariada, matrices aleatorias en conos, subordinadores matriciales, cálculo estocástico libre, aplicaciones en finanzas, entre otros.

## Por qué el énfasis en la probabilidad libre en el curso:

[De las notas de Terence Tao sobre Probabilidad Libre](#): *The significance of free probability to random matrix theory lies in the fundamental observation that random matrices which are independent in the classical sense, also tend to be independent in the free probability sense, in the large  $n$  limit  $n \rightarrow \infty$ . (This is only possible because of the highly non-commutative nature of these matrices; as we shall see, it is not possible for non-trivial commuting independent random variables to be freely independent.) Because of this, many tedious computations in random matrix theory, particularly those of an algebraic or enumerative combinatorial nature, can be done more quickly and systematically by using the framework of free probability, which by design is optimised for algebraic tasks rather than analytical ones.*

### **Bibliografía:**

Los temas 3-7 están en alguna de las siguientes referencias recientes:

- 1) [\*An Introduction to Random Matrices\*](#), de [Greg W. Anderson](#), [Alice Guionnet](#) y [Ofer Zeitouni](#). Cambridge Studies in Advanced Mathematics 118. Editorial Cambridge University Press, 2010.  
(Una versión electrónica en formato pdf de este libro se puede bajar en forma gratuita de la página personal de Ofer Zeitouni).
- 2) *Probabilidad Libre: Matrices Aleatorias y Representaciones de Grupos*. Octavio Arizmendi-Echegaray, Víctor Pérez-Abreu y Carlos Vargas Obieta. Monografía en Proceso.  
(Parte de la monografía se distribuirá cuando se cubra el tema de probabilidad libre. Se agradecerán comentarios y correcciones).
- 3) [\*Spectral Analysis of Large Dimensional Random Matrices\*](#). [Zhindong Bai](#) y [Jack W. Silverman](#). Springer Series in Statistics. Segunda Edición, 2009.  
(Este libro todavía no está en la biblioteca del CIMAT. El profesor tiene el libro).
- 4) Material del curso de [Matrices Aleatorias](#) del [blog de Terence Tao](#), 2009-2010.  
(En este blog Terence expone de manera clara varios de los temas que impartió recientemente en un curso de matrices aleatorias.)

Otras referencias se mencionan en el sitio del curso, como ligas en las secciones de objetivos y temas a cubrir del curso. En la oficina del profesor hay una sección especial con varios libros sobre matrices aleatorias.

En el sitio del curso se tendrá una sección con referencias de libros clasificados por temáticas, así como artículos panorámicos y expositivos en el tema.

### **Fechas importantes:**

- 1) **El lunes 20 de septiembre se tiene que tener definido el tema a exponer.**
- 2) **Los días lunes 1 y 15 de noviembre son día de asueto de acuerdo al Calendario Escolar del CIMAT.**
- 3) **El curso termina el miércoles 8 de diciembre.**