

# *El arte de la conjetura* de Jacobo Bernoulli ¿300 Años de pasado o futuro?

Víctor M. Pérez Abreu C.  
CIMAT

**XXVIII Foro Nacional de Estadística**

26 de septiembre de 2013

- I. Gestación, parto y llanto eterno del Ars Conjectandi.
- II. Por qué es obra fundamental.
- IV. Explicar "a la" Jacobo Bernoulli su resultado de oro.
- VI. El fracaso de Jacobo Bernoulli.
- V. Jacobo Bernoulli el Visionario.

- I. Contexto en que se escribe el libro.
- II. Hacia el Ars Conjectandi.
- III. Contenido y visión de la obra.
- IV. ¿Qué tenía en mente Jacobo Bernoulli?
- V. Estadística y Probabilidad en el libro.
- VI. Impacto.
- VII. Lecturas sugeridas.

# I. Contexto: Siglo XVII

- Guerras religiosas e intolerancia religiosa, basadas en dogmas.
- Origen de la física clásica, determinismo y pensamiento mecanicista
  - Galileo Galilei (1564-1642)
  - René Descartes (1596-1650)
  - Isaac Newton (1642-1727)
- Desarrollo del cálculo infinitesimal
  - Disputa entre Newton y Gottfried Leibniz (1646-1716)
  - Contribuciones de Jacobo y Johann Bernoulli y relación con Leibniz
- Astronomía moderna
  - Johannes Hevelius (1608-1687): Observaciones de la luna y cometas
  - Christiaan Huygens (1629-1695): Anillo de Saturno
  - Giovanni Cassini (1625-1712): satélites de Saturno, distancia a Marte.
  - John Flamsteed (1646-1719): eclipses solares en 1666 y 1668, observatorio de Greenwich.



# I. Contexto: Siglo XVII

- Jacobo Bernoulli estudió el cometa Kirch y publicó en 1681:

# I. Contexto: Siglo XVII

- Jacobo Bernoulli estudió el cometa Kirch y publicó en 1681:
  - Las trayectorias de los cometas pueden reducirse a leyes fundamentales

# I. Contexto: Siglo XVII

- Jacobo Bernoulli estudió el cometa Kirch y publicó en 1681:
  - Las trayectorias de los cometas pueden reducirse a leyes fundamentales
  - Predijo el regreso del cometa Kirch para mayo 17 de 1719.

# I. Contexto: Siglo XVII

- Jacobo Bernoulli estudió el cometa Kirch y publicó en 1681:
  - Las trayectorias de los cometas pueden reducirse a leyes fundamentales
  - Predijo el regreso del cometa Kirch para mayo 17 de 1719.
- Los cometas no son señales divinas de dios.

# I. Contexto: Siglo XVII

- Jacobo Bernoulli estudió el cometa Kirch y publicó en 1681:
  - Las trayectorias de los cometas pueden reducirse a leyes fundamentales
  - Predijo el regreso del cometa Kirch para mayo 17 de 1719.
- Los cometas no son señales divinas de dios.
- Fideísmo

# I. Contexto: Siglo XVII

- Jacobo Bernoulli estudió el cometa Kirch y publicó en 1681:
  - Las trayectorias de los cometas pueden reducirse a leyes fundamentales
  - Predijo el regreso del cometa Kirch para mayo 17 de 1719.
- Los cometas no son señales divinas de dios.
- Fideísmo
  - Piere Bayle (1647-1706): Sobre el cometa Kirch en 1682 (anónimo).

# I. Contexto: Siglo XVII

- Jacobo Bernoulli estudió el cometa Kirch y publicó en 1681:
  - Las trayectorias de los cometas pueden reducirse a leyes fundamentales
  - Predijo el regreso del cometa Kirch para mayo 17 de 1719.
- Los cometas no son señales divinas de dios.
- Fideísmo
  - Piere Bayle (1647-1706): Sobre el cometa Kirch en 1682 (anónimo).
  - Blaise Pascal (1623-1662)

# I. Contexto: Siglo XVII

- Jacobo Bernoulli estudió el cometa Kirch y publicó en 1681:
  - Las trayectorias de los cometas pueden reducirse a leyes fundamentales
  - Predijo el regreso del cometa Kirch para mayo 17 de 1719.
- Los cometas no son señales divinas de dios.
- Fideísmo
  - Piere Bayle (1647-1706): Sobre el cometa Kirch en 1682 (anónimo).
  - Blaise Pascal (1623-1662)
- Otros científicos de la época:



# I. Contexto: Siglo XVII

- Jacobo Bernoulli estudió el cometa Kirch y publicó en 1681:
  - Las trayectorias de los cometas pueden reducirse a leyes fundamentales
  - Predijo el regreso del cometa Kirch para mayo 17 de 1719.
- Los cometas no son señales divinas de dios.
- Fideísmo
  - Piere Bayle (1647-1706): Sobre el cometa Kirch en 1682 (anónimo).
  - Blaise Pascal (1623-1662)
- Otros científicos de la época:
  - Robert Boyle (1627-1691): Un fundador de la química moderna

# I. Contexto: Siglo XVII

- Jacobo Bernoulli estudió el cometa Kirch y publicó en 1681:
  - Las trayectorias de los cometas pueden reducirse a leyes fundamentales
  - Predijo el regreso del cometa Kirch para mayo 17 de 1719.
- Los cometas no son señales divinas de dios.
- Fideísmo
  - Piere Bayle (1647-1706): Sobre el cometa Kirch en 1682 (anónimo).
  - Blaise Pascal (1623-1662)
- Otros científicos de la época:
  - Robert Boyle (1627-1691): Un fundador de la química moderna
  - Robert Hooke (1635-1703): Gravitación, microscopía.

# I. Contexto: Siglo XVII

- Jacobo Bernoulli estudió el cometa Kirch y publicó en 1681:
  - Las trayectorias de los cometas pueden reducirse a leyes fundamentales
  - Predijo el regreso del cometa Kirch para mayo 17 de 1719.
- Los cometas no son señales divinas de dios.
- Fideísmo
  - Piere Bayle (1647-1706): Sobre el cometa Kirch en 1682 (anónimo).
  - Blaise Pascal (1623-1662)
- Otros científicos de la época:
  - Robert Boyle (1627-1691): Un fundador de la química moderna
  - Robert Hooke (1635-1703): Gravitación, microscopía.
  - Johannes Hudde (1628-1704): abogado y matemático.

# I. Contexto: Siglo XVII

- Jacobo Bernoulli estudió el cometa Kirch y publicó en 1681:
  - Las trayectorias de los cometas pueden reducirse a leyes fundamentales
  - Predijo el regreso del cometa Kirch para mayo 17 de 1719.
- Los cometas no son señales divinas de dios.
- Fideísmo
  - Piere Bayle (1647-1706): Sobre el cometa Kirch en 1682 (anónimo).
  - Blaise Pascal (1623-1662)
- Otros científicos de la época:
  - Robert Boyle (1627-1691): Un fundador de la química moderna
  - Robert Hooke (1635-1703): Gravitación, microscopía.
  - Johannes Hudde (1628-1704): abogado y matemático.
- Inicios de la historia de la teoría matemática de la probabilidad

# I. Contexto: Siglo XVII

- Jacobo Bernoulli estudió el cometa Kirch y publicó en 1681:
  - Las trayectorias de los cometas pueden reducirse a leyes fundamentales
  - Predijo el regreso del cometa Kirch para mayo 17 de 1719.
- Los cometas no son señales divinas de dios.
- Fideísmo
  - Piere Bayle (1647-1706): Sobre el cometa Kirch en 1682 (anónimo).
  - Blaise Pascal (1623-1662)
- Otros científicos de la época:
  - Robert Boyle (1627-1691): Un fundador de la química moderna
  - Robert Hooke (1635-1703): Gravitación, microscopía.
  - Johannes Hudde (1628-1704): abogado y matemático.
- Inicios de la historia de la teoría matemática de la probabilidad
  - 1660 (1552): El libro de juegos de Gerolano Cardano (1501-1576)

# I. Contexto: Siglo XVII

- Jacobo Bernoulli estudió el cometa Kirch y publicó en 1681:
  - Las trayectorias de los cometas pueden reducirse a leyes fundamentales
  - Predijo el regreso del cometa Kirch para mayo 17 de 1719.
- Los cometas no son señales divinas de dios.
- Fideísmo
  - Piere Bayle (1647-1706): Sobre el cometa Kirch en 1682 (anónimo).
  - Blaise Pascal (1623-1662)
- Otros científicos de la época:
  - Robert Boyle (1627-1691): Un fundador de la química moderna
  - Robert Hooke (1635-1703): Gravitación, microscopía.
  - Johannes Hudde (1628-1704): abogado y matemático.
- Inicios de la historia de la teoría matemática de la probabilidad
  - 1660 (1552): El libro de juegos de Gerolano Cardano (1501-1576)
  - 1654: Cartas entre Blaise Pascal y Pierre Fermat (1601-1662).

# I. Contexto: Siglo XVII

- Jacobo Bernoulli estudió el cometa Kirch y publicó en 1681:
  - Las trayectorias de los cometas pueden reducirse a leyes fundamentales
  - Predijo el regreso del cometa Kirch para mayo 17 de 1719.
- Los cometas no son señales divinas de dios.
- Fideísmo
  - Piere Bayle (1647-1706): Sobre el cometa Kirch en 1682 (anónimo).
  - Blaise Pascal (1623-1662)
- Otros científicos de la época:
  - Robert Boyle (1627-1691): Un fundador de la química moderna
  - Robert Hooke (1635-1703): Gravitación, microscopía.
  - Johannes Hudde (1628-1704): abogado y matemático.
- Inicios de la historia de la teoría matemática de la probabilidad
  - 1660 (1552): El libro de juegos de Gerolano Cardano (1501-1576)
  - 1654: Cartas entre Blaise Pascal y Pierre Fermat (1601-1662).
  - 1657: Tratado sobre juegos de azar, Christiaan Huygens (1629-1695).

# I. Contexto: Jacobo Bernoulli

Caracter difícil, complejo, meticuloso, rigurista, perfeccionista, visionario

- Fecha nacimiento polémica: 6-enero-1655 vs 27-diciembre-1654.



# I. Contexto: Jacobo Bernoulli

Caracter difícil, complejo, meticuloso, rigurista, perfeccionista, visionario

- Fecha nacimiento polémica: 6-enero-1655 vs 27-diciembre-1654.
- Universidad de Basilea.

# I. Contexto: Jacobo Bernoulli

Caracter difícil, complejo, meticuloso, rigurista, perfeccionista, visionario

- Fecha nacimiento polémica: 6-enero-1655 vs 27-diciembre-1654.
- Universidad de Basilea.
  - 1676: Se gradua en filosofía y teología.

# I. Contexto: Jacobo Bernoulli

Caracter difícil, complejo, meticuloso, rigurista, perfeccionista, visionario

- Fecha nacimiento polémica: 6-enero-1655 vs 27-diciembre-1654.
- Universidad de Basilea.
  - 1676: Se gradua en filosofía y teología.
  - 1683: Enseña mecánica y física experimental.

# I. Contexto: Jacobo Bernoulli

Caracter difícil, complejo, meticuloso, rigurista, perfeccionista, visionario

- Fecha nacimiento polémica: 6-enero-1655 vs 27-diciembre-1654.
- Universidad de Basilea.
  - 1676: Se gradua en filosofía y teología.
  - 1683: Enseña mecánica y física experimental.
  - 1687: Profesor de Matemáticas.

# I. Contexto: Jacobo Bernoulli

Caracter difícil, complejo, meticuloso, rigurista, perfeccionista, visionario

- Fecha nacimiento polémica: 6-enero-1655 vs 27-diciembre-1654.
- Universidad de Basilea.
  - 1676: Se gradua en filosofía y teología.
  - 1683: Enseña mecánica y física experimental.
  - 1687: Profesor de Matemáticas.
  - 1691: Protesta, es corrido y obligado a disculparse. Es reinstalado.

# I. Contexto: Jacobo Bernoulli

Caracter difícil, complejo, meticuloso, rigurista, perfeccionista, visionario

- Fecha nacimiento polémica: 6-enero-1655 vs 27-diciembre-1654.
- Universidad de Basilea.
  - 1676: Se gradua en filosofía y teología.
  - 1683: Enseña mecánica y física experimental.
  - 1687: Profesor de Matemáticas.
  - 1691: Protesta, es corrido y obligado a disculparse. Es reinstalado.
  - 1692: Decano (**Conferencia inaugural: *De arte combinatoria***)

# I. Contexto: Jacobo Bernoulli

Caracter difícil, complejo, meticuloso, rigurista, perfeccionista, visionario

- Fecha nacimiento polémica: 6-enero-1655 vs 27-diciembre-1654.
- Universidad de Basilea.
  - 1676: Se gradua en filosofía y teología.
  - 1683: Enseña mecánica y física experimental.
  - 1687: Profesor de Matemáticas.
  - 1691: Protesta, es corrido y obligado a disculparse. Es reinstalado.
  - 1692: Decano (**Conferencia inaugural: *De arte combinatoria***)
  - 1700-1701: Rector

# I. Contexto: Jacobo Bernoulli

Caracter difícil, complejo, meticuloso, rigurista, perfeccionista, visionario

- Fecha nacimiento polémica: 6-enero-1655 vs 27-diciembre-1654.
- Universidad de Basilea.
  - 1676: Se gradua en filosofía y teología.
  - 1683: Enseña mecánica y física experimental.
  - 1687: Profesor de Matemáticas.
  - 1691: Protesta, es corrido y obligado a disculparse. Es reinstalado.
  - 1692: Decano (**Conferencia inaugural: *De arte combinatoria***)
  - 1700-1701: Rector
- Estudia matemáticas durante sus viajes después de graduarse:



# I. Contexto: Jacobo Bernoulli

Caracter difícil, complejo, meticuloso, rigurista, perfeccionista, visionario

- Fecha nacimiento polémica: 6-enero-1655 vs 27-diciembre-1654.
- Universidad de Basilea.
  - 1676: Se gradua en filosofía y teología.
  - 1683: Enseña mecánica y física experimental.
  - 1687: Profesor de Matemáticas.
  - 1691: Protesta, es corrido y obligado a disculparse. Es reinstalado.
  - 1692: Decano (**Conferencia inaugural: *De arte combinatoria***)
  - 1700-1701: Rector
- Estudia matemáticas durante sus viajes después de graduarse:
  - 1676-1680: Suiza y Francia.

# I. Contexto: Jacobo Bernoulli

Caracter difícil, complejo, meticuloso, rigurista, perfeccionista, visionario

- Fecha nacimiento polémica: 6-enero-1655 vs 27-diciembre-1654.
- Universidad de Basilea.
  - 1676: Se gradua en filosofía y teología.
  - 1683: Enseña mecánica y física experimental.
  - 1687: Profesor de Matemáticas.
  - 1691: Protesta, es corrido y obligado a disculparse. Es reinstalado.
  - 1692: Decano (**Conferencia inaugural: *De arte combinatoria***)
  - 1700-1701: Rector
- Estudia matemáticas durante sus viajes después de graduarse:
  - 1676-1680: Suiza y Francia.
  - 1681-1683: Holanda e Inglaterra.

# I. Contexto: Jacobo Bernoulli

Caracter difícil, complejo, meticuloso, rigurista, perfeccionista, visionario

- Fecha nacimiento polémica: 6-enero-1655 vs 27-diciembre-1654.
- Universidad de Basilea.
  - 1676: Se gradua en filosofía y teología.
  - 1683: Enseña mecánica y física experimental.
  - 1687: Profesor de Matemáticas.
  - 1691: Protesta, es corrido y obligado a disculparse. Es reinstalado.
  - 1692: Decano (**Conferencia inaugural: *De arte combinatoria***)
  - 1700-1701: Rector
- Estudia matemáticas durante sus viajes después de graduarse:
  - 1676-1680: Suiza y Francia.
  - 1681-1683: Holanda e Inglaterra.
- Contribuciones en Matemáticas no en *El arte de la conjetura*

# I. Contexto: Jacobo Bernoulli

Caracter difícil, complejo, meticoloso, rigurista, perfeccionista, visionario

- Fecha nacimiento polémica: 6-enero-1655 vs 27-diciembre-1654.
- Universidad de Basilea.
  - 1676: Se gradúa en filosofía y teología.
  - 1683: Enseña mecánica y física experimental.
  - 1687: Profesor de Matemáticas.
  - 1691: Protesta, es corrido y obligado a disculparse. Es reinstalado.
  - 1692: Decano (**Conferencia inaugural: *De arte combinatoria***)
  - 1700-1701: Rector
- Estudia matemáticas durante sus viajes después de graduarse:
  - 1676-1680: Suiza y Francia.
  - 1681-1683: Holanda e Inglaterra.
- Contribuciones en Matemáticas no en *El arte de la conjetura*
  - Cálculo infinitesimal, isoperimetría, cálculo de variaciones.

# I. Contexto: Jacobo Bernoulli

Caracter difícil, complejo, meticuloso, rigurista, perfeccionista, visionario

- Fecha nacimiento polémica: 6-enero-1655 vs 27-diciembre-1654.
- Universidad de Basilea.
  - 1676: Se gradúa en filosofía y teología.
  - 1683: Enseña mecánica y física experimental.
  - 1687: Profesor de Matemáticas.
  - 1691: Protesta, es corrido y obligado a disculparse. Es reinstalado.
  - 1692: Decano (**Conferencia inaugural: *De arte combinatoria***)
  - 1700-1701: Rector
- Estudia matemáticas durante sus viajes después de graduarse:
  - 1676-1680: Suiza y Francia.
  - 1681-1683: Holanda e Inglaterra.
- Contribuciones en Matemáticas no en *El arte de la conjetura*
  - Cálculo infinitesimal, isoperimetría, cálculo de variaciones.
  - Geometría analítica, coordenadas polares.

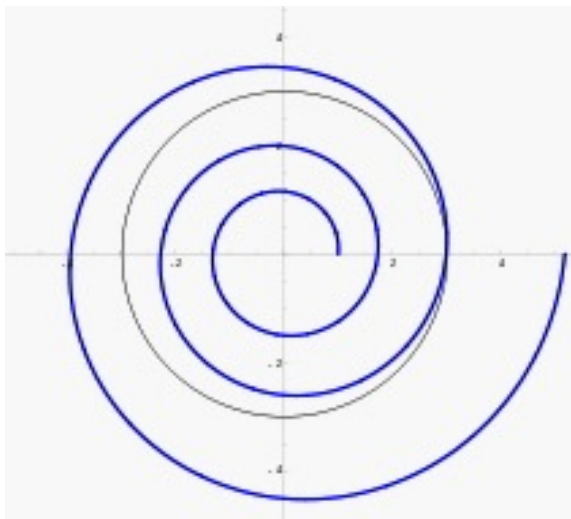
# I. Contexto: Jacobo Bernoulli

Caracter difícil, complejo, meticuloso, rigurista, perfeccionista, visionario

- Fecha nacimiento polémica: 6-enero-1655 vs 27-diciembre-1654.
- Universidad de Basilea.
  - 1676: Se gradúa en filosofía y teología.
  - 1683: Enseña mecánica y física experimental.
  - 1687: Profesor de Matemáticas.
  - 1691: Protesta, es corrido y obligado a disculparse. Es reinstalado.
  - 1692: Decano (**Conferencia inaugural: *De arte combinatoria***)
  - 1700-1701: Rector
- Estudia matemáticas durante sus viajes después de graduarse:
  - 1676-1680: Suiza y Francia.
  - 1681-1683: Holanda e Inglaterra.
- Contribuciones en Matemáticas no en *El arte de la conjetura*
  - Cálculo infinitesimal, isoperimetría, cálculo de variaciones.
  - Geometría analítica, coordenadas polares.
  - Series infinitas, espiral logarítmica.

# I. Contexto: Jacobo Bernoulli

## Espiral logarítmica



## II. Hacia el Ars Conjectandi

- Por qué estudió Jacobo la incertidumbre



## II. Hacia el Ars Conjectandi

- Por qué estudió Jacobo la incertidumbre
- ¿Por qué el nombre?

## II. Hacia el Ars Conjectandi

- Por qué estudió Jacobo la incertidumbre
- ¿Por qué el nombre?
  - *Ars cogitandi* (1662), Libro 4: Decisiones bajo incertidumbre por analogía con juegos de azar.

## II. Hacia el Ars Conjectandi

- Por qué estudió Jacobo la incertidumbre
- ¿Por qué el nombre?
  - *Ars cogitandi* (1662), Libro 4: Decisiones bajo incertidumbre por analogía con juegos de azar.
- Etapas de estudio y preparación de *El arte de la conjetura*

## II. Hacia el Ars Conjectandi

- Por qué estudió Jacobo la incertidumbre
- ¿Por qué el nombre?
  - *Ars cogitandi* (1662), Libro 4: Decisiones bajo incertidumbre por analogía con juegos de azar.
- Etapas de estudio y preparación de *El arte de la conjetura*
  - 1684-1685: Problemas de juegos de azar propuestos por Huygens.

## II. Hacia el Ars Conjectandi

- Por qué estudió Jacobo la incertidumbre
- ¿Por qué el nombre?
  - *Ars cogitandi* (1662), Libro 4: Decisiones bajo incertidumbre por analogía con juegos de azar.
- Etapas de estudio y preparación de *El arte de la conjetura*
  - 1684-1685: Problemas de juegos de azar propuestos por Huygens.
  - 1685-1686: Probabilidades no son conocidas a priori, tienen que ser determinadas a posteriori.

## II. Hacia el Ars Conjectandi

- Por qué estudió Jacobo la incertidumbre
- ¿Por qué el nombre?
  - *Ars cogitandi* (1662), Libro 4: Decisiones bajo incertidumbre por analogía con juegos de azar.
- Etapas de estudio y preparación de *El arte de la conjetura*
  - 1684-1685: Problemas de juegos de azar propuestos por Huygens.
  - 1685-1686: Probabilidades no son conocidas a priori, tienen que ser determinadas a posteriori.
  - 1687-1689: Cálculo de probabilidades.

## II. Hacia el Ars Conjectandi

- Por qué estudió Jacobo la incertidumbre
- ¿Por qué el nombre?
  - *Ars cogitandi* (1662), Libro 4: Decisiones bajo incertidumbre por analogía con juegos de azar.
- Etapas de estudio y preparación de *El arte de la conjetura*
  - 1684-1685: Problemas de juegos de azar propuestos por Huygens.
  - 1685-1686: Probabilidades no son conocidas a priori, tienen que ser determinadas a posteriori.
  - 1687-1689: Cálculo de probabilidades.
  - 1686: Carta a un amigo sobre juegos de tenis real.

## II. Hacia el Ars Conjectandi

- Por qué estudió Jacobo la incertidumbre
- ¿Por qué el nombre?
  - *Ars cogitandi* (1662), Libro 4: Decisiones bajo incertidumbre por analogía con juegos de azar.
- Etapas de estudio y preparación de *El arte de la conjetura*
  - 1684-1685: Problemas de juegos de azar propuestos por Huygens.
  - 1685-1686: Probabilidades no son conocidas a priori, tienen que ser determinadas a posteriori.
  - 1687-1689: Cálculo de probabilidades.
  - 1686: Carta a un amigo sobre juegos de tenis real.
- 1687-1705: **Cartas entre Leibniz y Jacobo.**



## II. Hacia el Ars Conjectandi

- Por qué estudió Jacobo la incertidumbre
- ¿Por qué el nombre?
  - *Ars cogitandi* (1662), Libro 4: Decisiones bajo incertidumbre por analogía con juegos de azar.
- Etapas de estudio y preparación de *El arte de la conjetura*
  - 1684-1685: Problemas de juegos de azar propuestos por Huygens.
  - 1685-1686: Probabilidades no son conocidas a priori, tienen que ser determinadas a posteriori.
  - 1687-1689: Cálculo de probabilidades.
  - 1686: Carta a un amigo sobre juegos de tenis real.
- 1687-1705: **Cartas entre Leibniz y Jacobo.**
- 1690-1705: ¿Falta de un ejemplo convincente?

## II. Hacia el Ars Conjectandi

- Por qué estudió Jacobo la incertidumbre
- ¿Por qué el nombre?
  - *Ars cogitandi* (1662), Libro 4: Decisiones bajo incertidumbre por analogía con juegos de azar.
- Etapas de estudio y preparación de *El arte de la conjetura*
  - 1684-1685: Problemas de juegos de azar propuestos por Huygens.
  - 1685-1686: Probabilidades no son conocidas a priori, tienen que ser determinadas a posteriori.
  - 1687-1689: Cálculo de probabilidades.
  - 1686: Carta a un amigo sobre juegos de tenis real.
- 1687-1705: **Cartas entre Leibniz y Jacobo.**
- 1690-1705: ¿Falta de un ejemplo convincente?
  - Datos de anualidades Johan de Witt (1625-1672).

## II. Hacia el Ars Conjectandi

- Por qué estudió Jacobo la incertidumbre
- ¿Por qué el nombre?
  - *Ars cogitandi* (1662), Libro 4: Decisiones bajo incertidumbre por analogía con juegos de azar.
- Etapas de estudio y preparación de *El arte de la conjetura*
  - 1684-1685: Problemas de juegos de azar propuestos por Huygens.
  - 1685-1686: Probabilidades no son conocidas a priori, tienen que ser determinadas a posteriori.
  - 1687-1689: Cálculo de probabilidades.
  - 1686: Carta a un amigo sobre juegos de tenis real.
- 1687-1705: **Cartas entre Leibniz y Jacobo.**
- 1690-1705: ¿Falta de un ejemplo convincente?
  - Datos de anualidades Johan de Witt (1625-1672).
- **¿Cuál es la razón por la que Jacobo no publicó su libro en vida?**

## II. Hacia el Ars Conjectandi

- *Diario* (1677-1705) de Jacobo Bernoulli:

## II. Hacia el Ars Conjectandi

- *Diario* (1677-1705) de Jacobo Bernoulli:
  - *Meditaciones, anotaciones, animaversiones teológicas y filosóficas.*

## II. Hacia el Ars Conjectandi

- *Diario* (1677-1705) de Jacobo Bernoulli:
  - *Meditaciones, anotaciones, animaversiones teológicas y filosóficas.*
  - Matemáticas, narraciones de viajes, poemas, comuniones, prostitución, mujeres de Ginebra, resurrección, espiral logartímitica, problemas sanitarios de las ciudades.

## II. Hacia el Ars Conjectandi

- *Diario* (1677-1705) de Jacobo Bernoulli:
  - *Meditaciones, anotaciones, animaversiones teológicas y filosóficas.*
  - Matemáticas, narraciones de viajes, poemas, comuniones, prostitución, mujeres de Ginebra, resurrección, espiral logartímitica, problemas sanitarios de las ciudades.
- Jacobo Bernoulli muere en 1705.

## II. Hacia el Ars Conjectandi

- *Diario* (1677-1705) de Jacobo Bernoulli:
  - *Meditaciones, anotaciones, animaversiones teológicas y filosóficas.*
  - Matemáticas, narraciones de viajes, poemas, comuniones, prostitución, mujeres de Ginebra, resurrección, espiral logartímitica, problemas sanitarios de las ciudades.
- Jacobo Bernoulli muere en 1705.
- Trabajos antes de 1713 "inspirados" en las ideas de Jacobo:



## II. Hacia el Ars Conjectandi

- *Diario* (1677-1705) de Jacobo Bernoulli:
  - *Meditaciones, anotaciones, animaversiones teológicas y filosóficas.*
  - Matemáticas, narraciones de viajes, poemas, comuniones, prostitución, mujeres de Ginebra, resurrección, espiral logartímitica, problemas sanitarios de las ciudades.
- Jacobo Bernoulli muere en 1705.
- Trabajos antes de 1713 "inspirados" en las ideas de Jacobo:
  - 1709: *Di Use of Artis Conjectandi in Jure*, Nicolas I Bernoulli.

## II. Hacia el Ars Conjectandi

- *Diario* (1677-1705) de Jacobo Bernoulli:
  - *Meditaciones, anotaciones, animaversiones teológicas y filosóficas.*
  - Matemáticas, narraciones de viajes, poemas, comuniones, prostitución, mujeres de Ginebra, resurrección, espiral logartímitica, problemas sanitarios de las ciudades.
- Jacobo Bernoulli muere en 1705.
- Trabajos antes de 1713 "inspirados" en las ideas de Jacobo:
  - 1709: *Di Use of Artis Conjectandi in Jure*, Nicolas I Bernoulli.
  - 1711: *La doctrina de las suertes*, Abraham de Moivre (1667-1754).

## II. Hacia el Ars Conjectandi

- *Diario* (1677-1705) de Jacobo Bernoulli:
  - *Meditaciones, anotaciones, animaversiones teológicas y filosóficas.*
  - Matemáticas, narraciones de viajes, poemas, comuniones, prostitución, mujeres de Ginebra, resurrección, espiral logartímitica, problemas sanitarios de las ciudades.
- Jacobo Bernoulli muere en 1705.
- Trabajos antes de 1713 "inspirados" en las ideas de Jacobo:
  - 1709: *Di Use of Artis Conjectandi in Jure*, Nicolas I Bernoulli.
  - 1711: *La doctrina de las suertes*, Abraham de Moivre (1667-1754).
  - 1713: *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, Pierre R. De Montmort (1678-1719).

## II. Hacia el Ars Conjectandi

- *Diario* (1677-1705) de Jacobo Bernoulli:
  - *Meditaciones, anotaciones, animaversiones teológicas y filosóficas.*
  - Matemáticas, narraciones de viajes, poemas, comuniones, prostitución, mujeres de Ginebra, resurrección, espiral logartímitica, problemas sanitarios de las ciudades.
- Jacobo Bernoulli muere en 1705.
- Trabajos antes de 1713 "inspirados" en las ideas de Jacobo:
  - 1709: *Di Use of Artis Conjectandi in Jure*, Nicolas I Bernoulli.
  - 1711: *La doctrina de las suertes*, Abraham de Moivre (1667-1754).
  - 1713: *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, Pierre R. De Montmort (1678-1719).
- 1705-1713: Presión para que se publicara la obra de Jacobo Bernoulli.

## II. Hacia el Ars Conjectandi

- *Diario* (1677-1705) de Jacobo Bernoulli:
  - *Meditaciones, anotaciones, animaversiones teológicas y filosóficas.*
  - Matemáticas, narraciones de viajes, poemas, comuniones, prostitución, mujeres de Ginebra, resurrección, espiral logartímitica, problemas sanitarios de las ciudades.
- Jacobo Bernoulli muere en 1705.
- Trabajos antes de 1713 "inspirados" en las ideas de Jacobo:
  - 1709: *Di Use of Artis Conjectandi in Jure*, Nicolas I Bernoulli.
  - 1711: *La doctrina de las suertes*, Abraham de Moivre (1667-1754).
  - 1713: *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, Pierre R. De Montmort (1678-1719).
- 1705-1713: Presión para que se publicara la obra de Jacobo Bernoulli.
- **1713: Ars Conjectandi.** Publicación *post mortem*

## II. Hacia el Ars Conjectandi

- *Diario* (1677-1705) de Jacobo Bernoulli:
  - *Meditaciones, anotaciones, animaversiones teológicas y filosóficas.*
  - Matemáticas, narraciones de viajes, poemas, comuniones, prostitución, mujeres de Ginebra, resurrección, espiral logartímitica, problemas sanitarios de las ciudades.
- Jacobo Bernoulli muere en 1705.
- Trabajos antes de 1713 "inspirados" en las ideas de Jacobo:
  - 1709: *Di Use of Artis Conjectandi in Jure*, Nicolas I Bernoulli.
  - 1711: *La doctrina de las suertes*, Abraham de Moivre (1667-1754).
  - 1713: *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, Pierre R. De Montmort (1678-1719).
- 1705-1713: Presión para que se publicara la obra de Jacobo Bernoulli.
- **1713: Ars Conjectandi.** Publicación *post mortem*
  - Nicolas Bernoulli hijo.

## II. Hacia el Ars Conjectandi

- *Diario* (1677-1705) de Jacobo Bernoulli:
  - *Meditaciones, anotaciones, animaversiones teológicas y filosóficas.*
  - Matemáticas, narraciones de viajes, poemas, comuniones, prostitución, mujeres de Ginebra, resurrección, espiral logartímitica, problemas sanitarios de las ciudades.
- Jacobo Bernoulli muere en 1705.
- Trabajos antes de 1713 "inspirados" en las ideas de Jacobo:
  - 1709: *Di Use of Artis Conjectandi in Jure*, Nicolas I Bernoulli.
  - 1711: *La doctrina de las suertes*, Abraham de Moivre (1667-1754).
  - 1713: *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, Pierre R. De Montmort (1678-1719).
- 1705-1713: Presión para que se publicara la obra de Jacobo Bernoulli.
- **1713: Ars Conjectandi.** Publicación *post mortem*
  - Nicolas Bernoulli hijo.
  - Nicolas I.

# III. Contenido de *El arte de la conjetura*

Cuatro partes, un apéndice y carta a un amigo

Parte 1 Comentarios a trabajos de Huygens sobre juegos de azar.



# III. Contenido de *El arte de la conjetura*

Cuatro partes, un apéndice y carta a un amigo

## Parte 1 Comentarios a trabajos de Huygens sobre juegos de azar.

- Estudio de 14 juegos de azar.

# III. Contenido de *El arte de la conjetura*

Cuatro partes, un apéndice y carta a un amigo

## Parte 1 Comentarios a trabajos de Huygens sobre juegos de azar.

- Estudio de 14 juegos de azar.
- Solución a cinco problemas nuevos de Huygens (ruina del jugador).

# III. Contenido de *El arte de la conjetura*

Cuatro partes, un apéndice y carta a un amigo

## Parte 1 Comentarios a trabajos de Huygens sobre juegos de azar.

- Estudio de 14 juegos de azar.
- Solución a cinco problemas nuevos de Huygens (ruina del jugador).
- Cálculo de valores esperados

# III. Contenido de *El arte de la conjetura*

Cuatro partes, un apéndice y carta a un amigo

## Parte 1 Comentarios a trabajos de Huygens sobre juegos de azar.

- Estudio de 14 juegos de azar.
- Solución a cinco problemas nuevos de Huygens (ruina del jugador).
- Cálculo de valores esperados
- Distribución binomial.

# III. Contenido de *El arte de la conjetura*

Cuatro partes, un apéndice y carta a un amigo

## Parte 1 Comentarios a trabajos de Huygens sobre juegos de azar.

- Estudio de 14 juegos de azar.
- Solución a cinco problemas nuevos de Huygens (ruina del jugador).
- Cálculo de valores esperados
- Distribución binomial.

## Parte 2 Combinatoria

# III. Contenido de *El arte de la conjetura*

Cuatro partes, un apéndice y carta a un amigo

## Parte 1 Comentarios a trabajos de Huygens sobre juegos de azar.

- Estudio de 14 juegos de azar.
- Solución a cinco problemas nuevos de Huygens (ruina del jugador).
- Cálculo de valores esperados
- Distribución binomial.

## Parte 2 Combinatoria

- Usa triangulo de Pascal

# III. Contenido de *El arte de la conjetura*

Cuatro partes, un apéndice y carta a un amigo

## Parte 1 Comentarios a trabajos de Huygens sobre juegos de azar.

- Estudio de 14 juegos de azar.
- Solución a cinco problemas nuevos de Huygens (ruina del jugador).
- Cálculo de valores esperados
- Distribución binomial.

## Parte 2 Combinatoria

- Usa triangulo de Pascal
- Permutaciones y combinaciones

# III. Contenido de *El arte de la conjetura*

Cuatro partes, un apéndice y carta a un amigo

## Parte 1 Comentarios a trabajos de Huygens sobre juegos de azar.

- Estudio de 14 juegos de azar.
- Solución a cinco problemas nuevos de Huygens (ruina del jugador).
- Cálculo de valores esperados
- Distribución binomial.

## Parte 2 Combinatoria

- Usa triangulo de Pascal
- Permutaciones y combinaciones
- Números de Bernoulli, sumas de potencias de enteros.



# III. Contenido de *El arte de la conjetura*

Cuatro partes, un apéndice y carta a un amigo

## Parte 1 Comentarios a trabajos de Huygens sobre juegos de azar.

- Estudio de 14 juegos de azar.
- Solución a cinco problemas nuevos de Huygens (ruina del jugador).
- Cálculo de valores esperados
- Distribución binomial.

## Parte 2 Combinatoria

- Usa triangulo de Pascal
- Permutaciones y combinaciones
- Números de Bernoulli, sumas de potencias de enteros.

## Parte 3 24 nuevos juegos de azar

# III. Contenido de *El arte de la conjetura*

Cuatro partes, un apéndice y carta a un amigo

## Parte 1 Comentarios a trabajos de Huygens sobre juegos de azar.

- Estudio de 14 juegos de azar.
- Solución a cinco problemas nuevos de Huygens (ruina del jugador).
- Cálculo de valores esperados
- Distribución binomial.

## Parte 2 Combinatoria

- Usa triangulo de Pascal
- Permutaciones y combinaciones
- Números de Bernoulli, sumas de potencias de enteros.

## Parte 3 24 nuevos juegos de azar

## Apéndice Series infinitas: Funciones theta

$$\sum_{n=0}^{\infty} m^{n^2} \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} m^{n(n+3)/2}.$$

# III. Contenido de *El arte de la conjetura*

Cuatro partes, un apéndice y carta a un amigo

## Parte 1 Comentarios a trabajos de Huygens sobre juegos de azar.

- Estudio de 14 juegos de azar.
- Solución a cinco problemas nuevos de Huygens (ruina del jugador).
- Cálculo de valores esperados
- Distribución binomial.

## Parte 2 Combinatoria

- Usa triangulo de Pascal
- Permutaciones y combinaciones
- Números de Bernoulli, sumas de potencias de enteros.

## Parte 3 24 nuevos juegos de azar

## Apéndice Series infinitas: Funciones theta

$$\sum_{n=0}^{\infty} m^{n^2} \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} m^{n(n+3)/2}.$$

## Carta Sobre juegos de tenis real.

# III. Contenido Parte 4 *El arte de la conjetura*

Uso y aplicaciones de los resultados anteriores en asuntos civiles, morales y económicos

- Escribe Jacobo Bernoulli:

### III. Contenido Parte 4 *El arte de la conjetura*

Uso y aplicaciones de los resultados anteriores en asuntos civiles, morales y económicos

- Escribe Jacobo Bernoulli:
  - *Es bien conocido que la frecuencia relativa de un evento estará más cerca a la verdad si tenemos más observaciones (Cardano).*

### III. Contenido Parte 4 *El arte de la conjetura*

Uso y aplicaciones de los resultados anteriores en asuntos civiles, morales y económicos

- Escribe Jacobo Bernoulli:
  - *Es bien conocido que la frecuencia relativa de un evento estará más cerca a la verdad si tenemos más observaciones (Cardano).*
  - *Este problema lo he pensado durante 20 años.*

### III. Contenido Parte 4 *El arte de la conjetura*

Uso y aplicaciones de los resultados anteriores en asuntos civiles, morales y económicos

- Escribe Jacobo Bernoulli:
  - *Es bien conocido que la frecuencia relativa de un evento estará más cerca a la verdad si tenemos más observaciones (Cardano).*
  - *Este problema lo he pensado durante 20 años.*
  - *Su novedad y utilidad son tan importantes como su gran dificultad, excediendo la de las otras partes del trabajo.*

### III. Contenido Parte 4 *El arte de la conjetura*

Uso y aplicaciones de los resultados anteriores en asuntos civiles, morales y económicos

- Escribe Jacobo Bernoulli:

- *Es bien conocido que la frecuencia relativa de un evento estará más cerca a la verdad si tenemos más observaciones (Cardano).*
- *Este problema lo he pensado durante 20 años.*
- *Su novedad y utilidad son tan importantes como su gran dificultad, excediendo la de las otras partes del trabajo.*
- *Para mí este descubrimiento cuenta más que si hubiera encontrado la cuadratura del círculo; ya que si la encontrara sería de poca utilidad.*



# III. Contenido Parte 4 *El arte de la conjetura*

Uso y aplicaciones de los resultados anteriores en asuntos civiles, morales y económicos

- Escribe Jacobo Bernoulli:
  - *Es bien conocido que la frecuencia relativa de un evento estará más cerca a la verdad si tenemos más observaciones (Cardano).*
  - *Este problema lo he pensado durante 20 años.*
  - *Su novedad y utilidad son tan importantes como su gran dificultad, excediendo la de las otras partes del trabajo.*
  - *Para mí este descubrimiento cuenta más que si hubiera encontrado la cuadratura del círculo; ya que si la encontrara sería de poca utilidad.*
- Contiene frases del tipo:

# III. Contenido Parte 4 *El arte de la conjetura*

Uso y aplicaciones de los resultados anteriores en asuntos civiles, morales y económicos

- Escribe Jacobo Bernoulli:
  - *Es bien conocido que la frecuencia relativa de un evento estará más cerca a la verdad si tenemos más observaciones (Cardano).*
  - *Este problema lo he pensado durante 20 años.*
  - *Su novedad y utilidad son tan importantes como su gran dificultad, excediendo la de las otras partes del trabajo.*
  - *Para mí este descubrimiento cuenta más que si hubiera encontrado la cuadratura del círculo; ya que si la encontrara sería de poca utilidad.*
- Contiene frases del tipo:
  - Predecir el futuro.

### III. Contenido Parte 4 *El arte de la conjetura*

Uso y aplicaciones de los resultados anteriores en asuntos civiles, morales y económicos

- Escribe Jacobo Bernoulli:
  - *Es bien conocido que la frecuencia relativa de un evento estará más cerca a la verdad si tenemos más observaciones (Cardano).*
  - *Este problema lo he pensado durante 20 años.*
  - *Su novedad y utilidad son tan importantes como su gran dificultad, excediendo la de las otras partes del trabajo.*
  - *Para mí este descubrimiento cuenta más que si hubiera encontrado la cuadratura del círculo; ya que si la encontrara sería de poca utilidad.*
- Contiene frases del tipo:
  - Predecir el futuro.
  - A pesar de que haya cosas ocultas.

### III. Contenido Parte 4 *El arte de la conjetura*

Uso y aplicaciones de los resultados anteriores en asuntos civiles, morales y económicos

- Escribe Jacobo Bernoulli:
  - *Es bien conocido que la frecuencia relativa de un evento estará más cerca a la verdad si tenemos más observaciones (Cardano).*
  - *Este problema lo he pensado durante 20 años.*
  - *Su novedad y utilidad son tan importantes como su gran dificultad, excediendo la de las otras partes del trabajo.*
  - *Para mí este descubrimiento cuenta más que si hubiera encontrado la cuadratura del círculo; ya que si la encontrara sería de poca utilidad.*
- Contiene frases del tipo:
  - Predecir el futuro.
  - A pesar de que haya cosas ocultas.
- Establece nueve reglas o axiomas de aplicación de *El arte de la conjetura*.

# THE ART OF CONJECTURING

## PART FOUR

### Teaching

## The Use and Application of the Preceding Doctrine in Civil, Moral, and Economic Matters

### Chapter I. *Some preliminaries on the certainty, probability, necessity, and contingency of things*

The *certainty* of anything is considered either *objectively* and in itself or *subjectively* and in relation to us. Objectively, certainty means nothing else than the truth of the present or future existence of the thing. Subjectively, certainty is the measure of our knowledge concerning this truth.

In themselves and objectively, all things under the sun, which are, were, or will be, always have the highest certainty. This is evident concerning past and present things, since, by the very fact that they are or were, these things cannot not exist or not have existed. Nor should there be any doubt about future things, which in like manner, even if not by the necessity of some inevitable fate, [211] nevertheless by divine foreknowledge and predetermination, cannot not be in the future. Unless, indeed, whatever will be will occur with certainty, it is not apparent how the praise of the highest Creator's omniscience and omnipotence can prevail. Others may dispute how this certainty of future occurrences may coexist with the contingency and freedom of secondary causes; we do not wish to deal with matters extraneous to our goal.

Seen in relation to us, the certainty of things is not the same for all things, but varies in many ways, increasing and decreasing. Those things concerning the existence or future occurrence of which we can have no doubt—whether because of revelation, reason, sense, experience, *αὐτοψία* [autopsy, i.e., eyewitness], or other reasons—enjoy the highest, and absolute, certainty. All other things receive a less perfect measure of certainty in our minds, greater or less in proportion as there are more or fewer probabilities that persuade us that the thing is, will be, or was.

Probability, indeed, is degree of certainty, and differs from the latter as a part differs from the whole. Truly, if complete and absolute certainty, which we

## IV. Variabilidad: mayor contribución conceptual de Jacobo

- Reducir la incertidumbre acerca del futuro es predecir el evento futuro.

## IV. Variabilidad: mayor contribución conceptual de Jacobo

- Reducir la incertidumbre acerca del futuro es predecir el evento futuro.
- Dos problemas a resolver:

## IV. Variabilidad: mayor contribución conceptual de Jacobo

- Reducir la incertidumbre acerca del futuro es predecir el evento futuro.
- Dos problemas a resolver:
  - Cuantificar la incertidumbre acerca de un acontecimiento futuro.



## IV. Variabilidad: mayor contribución conceptual de Jacobo

- Reducir la incertidumbre acerca del futuro es predecir el evento futuro.
- Dos problemas a resolver:
  - Cuantificar la incertidumbre acerca de un acontecimiento futuro.
  - Desarrollar un método para medir el valor de la incertidumbre.

## IV. Variabilidad: mayor contribución conceptual de Jacobo

- Reducir la incertidumbre acerca del futuro es predecir el evento futuro.
- Dos problemas a resolver:
  - Cuantificar la incertidumbre acerca de un acontecimiento futuro.
  - Desarrollar un método para medir el valor de la incertidumbre.
- Problemas con alto grado de dificultad para el siglo XVII.

## IV. Variabilidad: mayor contribución conceptual de Jacobo

- Reducir la incertidumbre acerca del futuro es predecir el evento futuro.
- Dos problemas a resolver:
  - Cuantificar la incertidumbre acerca de un acontecimiento futuro.
  - Desarrollar un método para medir el valor de la incertidumbre.
- Problemas con alto grado de dificultad para el siglo XVII.
- Arte de la conjetura: Usar por analogía métodos de juegos de azar aplicados a la vida real, además de "el resultado mas difícil."

## IV. Variabilidad: mayor contribución conceptual de Jacobo

- Reducir la incertidumbre acerca del futuro es predecir el evento futuro.
- Dos problemas a resolver:
  - Cuantificar la incertidumbre acerca de un acontecimiento futuro.
  - Desarrollar un método para medir el valor de la incertidumbre.
- Problemas con alto grado de dificultad para el siglo XVII.
- Arte de la conjetura: Usar por analogía métodos de juegos de azar aplicados a la vida real, además de "el resultado mas difícil."
- La diferencia con juegos de azar es que no se conocen las condiciones, están sujetas a fuerzas ocultas:

## IV. Variabilidad: mayor contribución conceptual de Jacobo

- Reducir la incertidumbre acerca del futuro es predecir el evento futuro.
- Dos problemas a resolver:
  - Cuantificar la incertidumbre acerca de un acontecimiento futuro.
  - Desarrollar un método para medir el valor de la incertidumbre.
- Problemas con alto grado de dificultad para el siglo XVII.
- Arte de la conjetura: Usar por analogía métodos de juegos de azar aplicados a la vida real, además de "el resultado mas difícil."
- La diferencia con juegos de azar es que no se conocen las condiciones, están sujetas a fuerzas ocultas:
- **Lo que no se conoce a priori, tiene que encontrarse a posteriori.**

## IV. Variabilidad: mayor contribución conceptual de Jacobo

- Reducir la incertidumbre acerca del futuro es predecir el evento futuro.
- Dos problemas a resolver:
  - Cuantificar la incertidumbre acerca de un acontecimiento futuro.
  - Desarrollar un método para medir el valor de la incertidumbre.
- Problemas con alto grado de dificultad para el siglo XVII.
- Arte de la conjetura: Usar por analogía métodos de juegos de azar aplicados a la vida real, además de "el resultado mas difícil."
- La diferencia con juegos de azar es que no se conocen las condiciones, están sujetas a fuerzas ocultas:
- **Lo que no se conoce a priori, tiene que encontrarse a posteriori.**
- *La verdad no puede ser alcanzada, algunas cosas dependen de causas completamente desconocidas.*

## IV. Variabilidad: mayor contribución conceptual de Jacobo

- Reducir la incertidumbre acerca del futuro es predecir el evento futuro.
- Dos problemas a resolver:
  - Cuantificar la incertidumbre acerca de un acontecimiento futuro.
  - Desarrollar un método para medir el valor de la incertidumbre.
- Problemas con alto grado de dificultad para el siglo XVII.
- Arte de la conjetura: Usar por analogía métodos de juegos de azar aplicados a la vida real, además de "el resultado mas difícil."
- La diferencia con juegos de azar es que no se conocen las condiciones, están sujetas a fuerzas ocultas:
- **Lo que no se conoce a priori, tiene que encontrarse a posteriori.**
- *La verdad no puede ser alcanzada, algunas cosas dependen de causas completamente desconocidas.*
- *No usar El arte de la conjetura en asuntos en los que la certeza completa se puede alcanzar (Axioma o Regla 1).*

# IV. Qué pretendía Jacobo

Algunas definiciones en la Parte 4

- *Probabilidad es el grado de certidumbre y difiere de ésta como una parte difiere de total.*



# IV. Qué pretendía Jacobo

## Algunas definiciones en la Parte 4

- *Probabilidad es el grado de certidumbre y difiere de ésta como una parte difiere de total.*
- *La probabilidad de un evento futuro es el grado de certidumbre de su ocurrencia.*

# IV. Qué pretendía Jacobo

## Algunas definiciones en la Parte 4

- *Probabilidad es el grado de certidumbre y difiere de ésta como una parte difiere de total.*
- *La probabilidad de un evento futuro es el grado de certidumbre de su ocurrencia.*
- *Algo es más probable que otra cosa si tiene parte mayor de certeza.*

## IV. Qué pretendía Jacobo

### Algunas definiciones en la Parte 4

- *Probabilidad es el grado de certidumbre y difiere de ésta como una parte difiere de total.*
- *La probabilidad de un evento futuro es el grado de certidumbre de su ocurrencia.*
- *Algo es más probable que otra cosa si tiene parte mayor de certeza.*
- *En lenguaje común algo es llamado probable si su probabilidad excede notablemente la mitad de la certeza.*

## IV. Qué pretendía Jacobo

### Algunas definiciones en la Parte 4

- *Probabilidad es el grado de certidumbre y difiere de ésta como una parte difiere de total.*
- *La probabilidad de un evento futuro es el grado de certidumbre de su ocurrencia.*
- *Algo es más probable que otra cosa si tiene parte mayor de certeza.*
- *En lenguaje común algo es llamado probable si su probabilidad excede notablemente la mitad de la certeza.*
- *Lo que tiene  $1/5$  de certeza es más probable que algo que tiene  $1/10$ , aunque ninguno es positivamente probable.*

## IV. Qué pretendía Jacobo

### Algunas definiciones en la Parte 4

- *Probabilidad es el grado de certidumbre y difiere de ésta como una parte difiere de total.*
- *La probabilidad de un evento futuro es el grado de certidumbre de su ocurrencia.*
- *Algo es más probable que otra cosa si tiene parte mayor de certeza.*
- *En lenguaje común algo es llamado probable si su probabilidad excede notablemente la mitad de la certeza.*
- *Lo que tiene  $1/5$  de certeza es más probable que algo que tiene  $1/10$ , aunque ninguno es positivamente probable.*
- *Algo es posible si tiene una parte de certeza, aunque sea pequeña. Así, algo que tiene  $1/20$  o  $1/30$  de certeza es posible.*

## IV. Qué pretendía Jacobo

### Algunas definiciones en la Parte 4

- *Probabilidad es el grado de certidumbre y difiere de ésta como una parte difiere de total.*
- *La probabilidad de un evento futuro es el grado de certidumbre de su ocurrencia.*
- *Algo es más probable que otra cosa si tiene parte mayor de certeza.*
- *En lenguaje común algo es llamado probable si su probabilidad excede notablemente la mitad de la certeza.*
- *Lo que tiene  $1/5$  de certeza es más probable que algo que tiene  $1/10$ , aunque ninguno es positivamente probable.*
- *Algo es posible si tiene una parte de certeza, aunque sea pequeña. Así, algo que tiene  $1/20$  o  $1/30$  de certeza es posible.*
- *Algo es moralmente cierto si su probabilidad es tan cercana a la certeza completa, que la diferencia no puede ser percibida.*

## IV. Qué pretendía Jacobo

### Algunas definiciones en la Parte 4

- *Probabilidad es el grado de certidumbre y difiere de ésta como una parte difiere de total.*
- *La probabilidad de un evento futuro es el grado de certidumbre de su ocurrencia.*
- *Algo es más probable que otra cosa si tiene parte mayor de certeza.*
- *En lenguaje común algo es llamado probable si su probabilidad excede notablemente la mitad de la certeza.*
- *Lo que tiene  $1/5$  de certeza es más probable que algo que tiene  $1/10$ , aunque ninguno es positivamente probable.*
- *Algo es posible si tiene una parte de certeza, aunque sea pequeña. Así, algo que tiene  $1/20$  o  $1/30$  de certeza es posible.*
- *Algo es moralmente cierto si su probabilidad es tan cercana a la certeza completa, que la diferencia no puede ser percibida.*
- *En contraste, algo es moralmente imposible si tiene solo como certeza la cantidad por la cual la certeza moral no alcanza la certeza total.*

## IV. Regla o Axioma 9

Sorprendente

- *Ya que sin embargo, es rara vez posible obtener certeza completa en todo respecto, la necesidad y el uso ordenan que solo lo que es moralmente cierto debe ser tomado como absoluta certeza.*



## IV. Regla o Axioma 9

Sorprendente

- *Ya que sin embargo, es rara vez posible obtener certeza completa en todo respecto, la necesidad y el uso ordenan que solo lo que es moralmente cierto debe ser tomado como absoluta certeza.*
- **Sería útil, por lo tanto, que se definieran límites para la certeza moral los cuales debieran ser establecidos por un magistrado o autoridad.**

## IV. Regla o Axioma 9

Sorprendente

- *Ya que sin embargo, es rara vez posible obtener certeza completa en todo respecto, la necesidad y el uso ordenan que solo lo que es moralmente cierto debe ser tomado como absoluta certeza.*
- **Sería útil, por lo tanto, que se definieran límites para la certeza moral los cuales debieran ser establecidos por un magistrado o autoridad.**
- *Por ejemplo, se debería determinar si 99/100 de certidumbre es suficiente o si se requiere 999/1000.*

## IV. Explica qué es lo que tenía en mente

- *Para dar un ejemplo de lo que tengo en mente, supón que en una **urna** se tienen fichas, desconocidas a tí, 3000 de color blanco y 4000 de color negro, para investigar su número mediante experimentos, sacas una ficha sucesivamente (reemplazando....).....y observas cuántas veces salió una ficha blanca y cuántas una negra.*

## IV. Explica qué es lo que tenía en mente

- *Para dar un ejemplo de lo que tengo en mente, supón que en una **urna** se tienen fichas, desconocidas a tí, 3000 de color blanco y 4000 de color negro, para investigar su número mediante experimentos, sacas una ficha sucesivamente (reemplazando....).....y observas cuántas veces salió una ficha blanca y cuántas una negra.*
- *La pregunta es si puedes hacer esto tantas veces que se vuelve diez, cien, mil, etc. veces más probable (o sea que al final se vuelve moralmente cierto) que el número de veces que obtuviste blanca o negra tendrían la misma razón de tres a dos que una razón diferente.*

## IV. Explica qué es lo que tenía en mente

- *Para dar un ejemplo de lo que tengo en mente, supón que en una **urna** se tienen fichas, desconocidas a tí, 3000 de color blanco y 4000 de color negro, para investigar su número mediante experimentos, sacas una ficha sucesivamente (reemplazando....).....y observas cuántas veces salió una ficha blanca y cuántas una negra.*
- *La pregunta es si puedes hacer esto tantas veces que se vuelve diez, cien, mil, etc. veces más probable (o sea que al final se vuelve moralmente cierto) que el número de veces que obtuviste blanca o negra tendrían la misma razón de tres a dos que una razón diferente.*
- *Debe ser cuidadosamente observado que no queremos que la razón entre los números de casos que hemos observado se interpreten precisamente o como una indivisibilidad....*

## IV. Explica qué es lo que tenía en mente

- *Para dar un ejemplo de lo que tengo en mente, supón que en una **urna** se tienen fichas, desconocidas a tí, 3000 de color blanco y 4000 de color negro, para investigar su número mediante experimentos, sacas una ficha sucesivamente (reemplazando....).....y observas cuántas veces salió una ficha blanca y cuántas una negra.*
- *La pregunta es si puedes hacer esto tantas veces que se vuelve diez, cien, mil, etc. veces más probable (o sea que al final se vuelve moralmente cierto) que el número de veces que obtuviste blanca o negra tendrían la misma razón de tres a dos que una razón diferente.*
- *Debe ser cuidadosamente observado que no queremos que la razón entre los números de casos que hemos observado se interpreten precisamente o como una indivisibilidad....*
- *Más bien, la razón debe ser definida dentro de un rango, o sea contenida entre dos límites, los cuales pueden acortarse tanto como cualquiera quisiera.*

# III. Resultado principal en Parte 4

Usando notación moderna

- En juegos de azar se conocen  $\#$  casos posibles y  $\#$  favorables

# III. Resultado principal en Parte 4

Usando notación moderna

- En juegos de azar se conocen  $\#$  casos posibles y  $\#$  favorables
- En procesos de la vida real el  $\#$  casos posibles  $(r + s)$  y  $\#$  casos favorables  $r$  están ocultos.



### III. Resultado principal en Parte 4

Usando notación moderna

- En juegos de azar se conocen # casos posibles y # favorables
- En procesos de la vida real el # casos posibles  $(r + s)$  y # casos favorables  $r$  están ocultos.
- Repetición sucesiva de un experimento aleatorio en el cual se considera la ocurrencia (**fértil**) o no ocurrencia (**no fértil**) de un evento. Probabilidad de ocurrencia en cada repetición del experimento  $p$  :  $r$  y  $s$  números naturales

$$p = r / (r + s).$$

### III. Resultado principal en Parte 4

Usando notación moderna

- En juegos de azar se conocen  $\#$  casos posibles y  $\#$  favorables
- En procesos de la vida real el  $\#$  casos posibles  $(r + s)$  y  $\#$  casos favorables  $r$  están ocultos.
- Repetición sucesiva de un experimento aleatorio en el cual se considera la ocurrencia (**fértil**) o no ocurrencia (**no fértil**) de un evento. Probabilidad de ocurrencia en cada repetición del experimento  $p$  :  $r$  y  $s$  números naturales

$$p = r / (r + s).$$

- $n$   $\#$  experimentos,  $S_n$   $\#$  éxitos,  $\hat{p}_n = S_n / n$  **frecuencia relativa**.

### III. Resultado principal en Parte 4

Usando notación moderna

- En juegos de azar se conocen  $\#$  casos posibles y  $\#$  favorables
- En procesos de la vida real el  $\#$  casos posibles  $(r + s)$  y  $\#$  casos favorables  $r$  están ocultos.
- Repetición sucesiva de un experimento aleatorio en el cual se considera la ocurrencia (**fértil**) o no ocurrencia (**no fértil**) de un evento. Probabilidad de ocurrencia en cada repetición del experimento  $p : r$  y  $s$  números naturales

$$p = r / (r + s).$$

- $n$   $\#$  experimentos,  $S_n$   $\#$  éxitos,  $\hat{p}_n = S_n / n$  **frecuencia relativa**.
- $\epsilon = 1 / (r + s)$ .

### III. Resultado principal en Parte 4

Usando notación moderna

- En juegos de azar se conocen  $\#$  casos posibles y  $\#$  favorables
- En procesos de la vida real el  $\#$  casos posibles ( $r + s$ ) y  $\#$  casos favorables  $r$  están ocultos.
- Repetición sucesiva de un experimento aleatorio en el cual se considera la ocurrencia (**fértil**) o no ocurrencia (**no fértil**) de un evento. Probabilidad de ocurrencia en cada repetición del experimento  $p$  :  $r$  y  $s$  números naturales

$$p = r/(r + s).$$

- $n$   $\#$  experimentos,  $S_n$   $\#$  éxitos,  $\hat{p}_n = S_n/n$  **frecuencia relativa**.
- $\epsilon = 1/(r + s)$ .
- Resultado principal: Dado  $c > 0$ , se prescribe  $N \geq 1$  tal que

$$\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| \leq \epsilon) > c \mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| > \epsilon)$$

# III. Última página de la Parte 4

## Aspectos filosóficos

- Dado  $c > 0$ , se prescribe  $N \geq 1$  tal que

$$\mathbb{P}_N \left( |\hat{p}_N - p| \leq \frac{1}{s+r} \right) > c \mathbb{P}_N \left( |\hat{p}_N - p| > \frac{1}{s+r} \right).$$

# III. Última página de la Parte 4

## Aspectos filosóficos

- Dado  $c > 0$ , se prescribe  $N \geq 1$  tal que

$$\mathbb{P}_N \left( |\hat{p}_N - p| \leq \frac{1}{s+r} \right) > c \mathbb{P}_N \left( |\hat{p}_N - p| > \frac{1}{s+r} \right).$$

- $r = 30, s = 20, t = r + s = 50$

# III. Última página de la Parte 4

## Aspectos filosóficos

- Dado  $c > 0$ , se prescribe  $N \geq 1$  tal que

$$\mathbb{P}_N \left( \left| \hat{p}_N - p \right| \leq \frac{1}{s+r} \right) > c \mathbb{P}_N \left( \left| \hat{p}_N - p \right| > \frac{1}{s+r} \right).$$

- $r = 30, s = 20, t = r + s = 50$
- cota superior  $(r + 1)/t = 31/50$ , cota inferior  $(r - 1)/t = 29/50$

# III. Última página de la Parte 4

## Aspectos filosóficos

- Dado  $c > 0$ , se prescribe  $N \geq 1$  tal que

$$\mathbb{P}_N \left( \left| \hat{p}_N - p \right| \leq \frac{1}{s+r} \right) > c \mathbb{P}_N \left( \left| \hat{p}_N - p \right| > \frac{1}{s+r} \right).$$

- $r = 30, s = 20, t = r + s = 50$
- cota superior  $(r + 1)/t = 31/50$ , cota inferior  $(r - 1)/t = 29/50$
- $c = 1000, N = 25500$ .



# III. Última página de la Parte 4

## Aspectos filosóficos

- Dado  $c > 0$ , se prescribe  $N \geq 1$  tal que

$$\mathbb{P}_N \left( \left| \hat{p}_N - p \right| \leq \frac{1}{s+r} \right) > c \mathbb{P}_N \left( \left| \hat{p}_N - p \right| > \frac{1}{s+r} \right).$$

- $r = 30, s = 20, t = r + s = 50$
- cota superior  $(r + 1)/t = 31/50$ , cota inferior  $(r - 1)/t = 29/50$
- $c = 1000, N = 25500$ .
- Jacobo: "Si se tomaran 25500 experimentos sería 1000 veces más posible (verosímil) que la razón del número de observaciones fértiles estuviera en el intervalo  $(29/50, 31/50)$  que fuera del intervalo."

# III. Última página de la Parte 4

## Aspectos filosóficos

- Dado  $c > 0$ , se prescribe  $N \geq 1$  tal que

$$\mathbb{P}_N \left( |\hat{p}_N - p| \leq \frac{1}{s+r} \right) > c \mathbb{P}_N \left( |\hat{p}_N - p| > \frac{1}{s+r} \right).$$

- $r = 30$ ,  $s = 20$ ,  $t = r + s = 50$
- cota superior  $(r + 1)/t = 31/50$ , cota inferior  $(r - 1)/t = 29/50$
- $c = 1000$ ,  $N = 25500$ .
- Jacobo: "Si se tomaran 25500 experimentos sería 1000 veces más posible (verosímil) que la razón del número de observaciones fértiles estuviera en el intervalo  $(29/50, 31/50)$  que fuera del intervalo."
- Continúa, "Si se tomara  $c$  como 10,000, se vería que sería más de diez mil veces más probable si hay 31,258 experimentos, y cien mil veces mas probable si hay 36,966 experimentos, y así sucesivamente hasta infinito, o, agregando de manera continua a los 25, 550 otros 5708 experimentos."

In the apparatus, larger the numbers  $r$ ,  $s$ , and  $t$  in the same ratio to each other, the more the ratio  $(r+1)/t$  and  $(r-1)/t$  to the ratio  $r/t$  can be tightened. Therefore, if the ratio between the numbers of cases  $r/s$ , to be determined by experiments, is, say, a three-halves ratio, I do not use 3 and 2 for  $r$  and  $s$ , but rather 30 and 20, or 300 and 200, etc. It might be sufficient to set  $r = 30$ ,  $s = 20$ , and  $t = r + s = 50$ , so that the bounds become  $(r+1)/t = 31/50$ , and  $(r-1)/t = 29/50$ . Moreover, let  $c = 1000$ . Then by the preceding in the Scholium, for the terms to

$$\text{the left: } m > \frac{\log [c(s-1)]}{\log (r+1) - \log r} = \frac{4.2787536}{142405} < 301$$

$$nt = mt + \frac{mst - s}{r+1} < 24,728$$

$$\text{the right: } m > \frac{\log [c \cdot (r-1)]}{\log (s+1) - \log s} = \frac{4.4623980}{211893} < 211$$

$$nt = mt + \frac{mrt - rt}{s+1} = 25,550.$$

Whence, by what has been demonstrated, it is inferred that if 25,550 experiments are taken, it will be more than 1000 times more likely [*verisimilius*] that the ratio of the number of fertile observations to the number of all the observations will fall between these bounds, 31/50 and 29/50, than outside them. On the same understanding, if  $c$  is set equal to 10,000 or 100,000, it may be seen that it will be more than ten thousand times more probable, if there are 31,258 experiments, and more than a hundred thousand times more probable, [239] if there are 36,966, and so forth to infinity, continually adding to the 25,550 another 5708 experiments. Whence at last this remarkable result is seen to follow, that if the observations of all events were continued for the whole of eternity (with the probability finally transformed into perfect certainty) then everything in the world would be observed to happen in fixed ratios and with a constant law of alternation. Thus in even the most accidental and fortuitous we would be bound to acknowledge a certain quasi-necessity and, so to speak, fatality. I do not know whether or not Plato already wished to assert this result in his dogma of the universal return of things to their former positions [*apocatastasis*], in which he predicted that after the unrolling of innumerable centuries everything would return to its original state.

### III. Aspectos filosóficos

- Dado  $c > 0$ , se prescribe  $N \geq 1$  tal que

$$\mathbb{P}_N \left( |\hat{p}_N - p| \leq \frac{1}{s+r} \right) > c \mathbb{P}_N \left( |\hat{p}_N - p| > \frac{1}{s+r} \right).$$

### III. Aspectos filosóficos

- Dado  $c > 0$ , se prescribe  $N \geq 1$  tal que

$$\mathbb{P}_N \left( |\hat{p}_N - p| \leq \frac{1}{s+r} \right) > c \mathbb{P}_N \left( |\hat{p}_N - p| > \frac{1}{s+r} \right).$$

- Prosigue... "*Se sigue de este resultado extraordinario que si se continuaran las observaciones de este experimento por toda la eternidad (con la probabilidad finalmente transformada en certidumbre perfecta), entonces todo en el mundo sería observar lo que ocurre en razones fijas y con una ley constante de alteración.*"

### III. Aspectos filosóficos

- Dado  $c > 0$ , se prescribe  $N \geq 1$  tal que

$$\mathbb{P}_N \left( |\hat{p}_N - p| \leq \frac{1}{s+r} \right) > c \mathbb{P}_N \left( |\hat{p}_N - p| > \frac{1}{s+r} \right).$$

- Prosigue... "*Se sigue de este resultado extraordinario que si se continuaran las observaciones de este experimento por toda la eternidad (con la probabilidad finalmente transformada en certidumbre perfecta), entonces todo en el mundo sería observar lo que ocurre en razones fijas y con una ley constante de alteración.*"
- Finaliza.... "*No se si Platón quería o no decir este resultado en su dogma.....todo regresa a su estado original.*"

### III. Aspectos filosóficos

- Dado  $c > 0$ , se prescribe  $N \geq 1$  tal que

$$\mathbb{P}_N \left( |\hat{p}_N - p| \leq \frac{1}{s+r} \right) > c \mathbb{P}_N \left( |\hat{p}_N - p| > \frac{1}{s+r} \right).$$

- Prosigue... "*Se sigue de este resultado extraordinario que si se continuaran las observaciones de este experimento por toda la eternidad (con la probabilidad finalmente transformada en certidumbre perfecta), entonces todo en el mundo sería observar lo que ocurre en razones fijas y con una ley constante de alteración.*"
- Finaliza.... "*No se si Platón quería o no decir este resultado en su dogma.....todo regresa a su estado original.*"
- Preguntas:

### III. Aspectos filosóficos

- Dado  $c > 0$ , se prescribe  $N \geq 1$  tal que

$$\mathbb{P}_N \left( |\hat{p}_N - p| \leq \frac{1}{s+r} \right) > c \mathbb{P}_N \left( |\hat{p}_N - p| > \frac{1}{s+r} \right).$$

- Prosigue... "*Se sigue de este resultado extraordinario que si se continuaran las observaciones de este experimento por toda la eternidad (con la probabilidad finalmente transformada en certidumbre perfecta), entonces todo en el mundo sería observar lo que ocurre en razones fijas y con una ley constante de alteración.*"
- Finaliza.... "*No se si Platón quería o no decir este resultado en su dogma.....todo regresa a su estado original.*"
- Preguntas:
  - ¿Le preocupaba a Jacobo el tamaño de muestra  $N$ ?



### III. Aspectos filosóficos

- Dado  $c > 0$ , se prescribe  $N \geq 1$  tal que

$$\mathbb{P}_N \left( |\hat{p}_N - p| \leq \frac{1}{s+r} \right) > c \mathbb{P}_N \left( |\hat{p}_N - p| > \frac{1}{s+r} \right).$$

- Prosigue... "*Se sigue de este resultado extraordinario que si se continuaran las observaciones de este experimento por toda la eternidad (con la probabilidad finalmente transformada en certidumbre perfecta), entonces todo en el mundo sería observar lo que ocurre en razones fijas y con una ley constante de alteración.*"
- Finaliza.... "*No se si Platón quería o no decir este resultado en su dogma.....todo regresa a su estado original.*"
- Preguntas:
  - ¿Le preocupaba a Jacobo el tamaño de muestra  $N$ ?
  - ¿Estaba Jacobo interesado en un teorema límite?

### III. Objetivo e intención de Jacobo

- Desarrollar una Ciencia de la Predicción dando al mundo mejores medios para el proceso de toma de decisiones.

### III. Objetivo e intención de Jacobo

- Desarrollar una Ciencia de la Predicción dando al mundo mejores medios para el proceso de toma de decisiones.
- *Predecir algo es medir su probabilidad. La Ciencia de la Predicción o Stochastics se define por lo tanto como la ciencia de medir tan exacto como sea posible las probabilidades de eventos de tal forma que en nuestras decisiones siempre podemos elegir o seguir lo que parece mejor, más satisfactorio, más seguro o más considerado.*

### III. Objetivo e intención de Jacobo

- Desarrollar una Ciencia de la Predicción dando al mundo mejores medios para el proceso de toma de decisiones.
- *Predecir algo es medir su probabilidad. La Ciencia de la Predicción o Stochastics se define por lo tanto como la ciencia de medir tan exacto como sea posible las probabilidades de eventos de tal forma que en nuestras decisiones siempre podemos elegir o seguir lo que parece mejor, más satisfactorio, más seguro o más considerado.*
- *En esto todo consiste la sabiduría de los filósofos y la prudencia del hombre de Estado.*

### III. Objetivo e intención de Jacobo

- Desarrollar una Ciencia de la Predicción dando al mundo mejores medios para el proceso de toma de decisiones.
- *Predecir algo es medir su probabilidad. La Ciencia de la Predicción o Stochastics se define por lo tanto como la ciencia de medir tan exacto como sea posible las probabilidades de eventos de tal forma que en nuestras decisiones siempre podemos elegir o seguir lo que parece mejor, más satisfactorio, más seguro o más considerado.*
- *En esto todo consiste la sabiduría de los filósofos y la prudencia del hombre de Estado.*
- ¿Jacobo nunca formula ni pensó la ley de los grandes números?.

### III. Objetivo e intención de Jacobo

- Desarrollar una Ciencia de la Predicción dando al mundo mejores medios para el proceso de toma de decisiones.
- *Predecir algo es medir su probabilidad. La Ciencia de la Predicción o Stochastics se define por lo tanto como la ciencia de medir tan exacto como sea posible las probabilidades de eventos de tal forma que en nuestras decisiones siempre podemos elegir o seguir lo que parece mejor, más satisfactorio, más seguro o más considerado.*
- *En esto todo consiste la sabiduría de los filósofos y la prudencia del hombre de Estado.*
- ¿Jacobo nunca formula ni pensó la ley de los grandes números?.
- No fue comprendido por sus contemporáneos. ¿Y nosotros?

### III. Objetivo e intención de Jacobo

- Desarrollar una Ciencia de la Predicción dando al mundo mejores medios para el proceso de toma de decisiones.
- *Predecir algo es medir su probabilidad. La Ciencia de la Predicción o Stochastics se define por lo tanto como la ciencia de medir tan exacto como sea posible las probabilidades de eventos de tal forma que en nuestras decisiones siempre podemos elegir o seguir lo que parece mejor, más satisfactorio, más seguro o más considerado.*
- *En esto todo consiste la sabiduría de los filósofos y la prudencia del hombre de Estado.*
- ¿Jacobo nunca formula ni pensó la ley de los grandes números?.
- No fue comprendido por sus contemporáneos. ¿Y nosotros?
- ¡Un trabajo con limitaciones en cuanto a tamaño de muestra!.

### III. Objetivo e intención de Jacobo

- Desarrollar una Ciencia de la Predicción dando al mundo mejores medios para el proceso de toma de decisiones.
- *Predecir algo es medir su probabilidad. La Ciencia de la Predicción o Stochastics se define por lo tanto como la ciencia de medir tan exacto como sea posible las probabilidades de eventos de tal forma que en nuestras decisiones siempre podemos elegir o seguir lo que parece mejor, más satisfactorio, más seguro o más considerado.*
- *En esto todo consiste la sabiduría de los filósofos y la prudencia del hombre de Estado.*
- ¿Jacobo nunca formula ni pensó la ley de los grandes números?.
- No fue comprendido por sus contemporáneos. ¿Y nosotros?
- ¡Un trabajo con limitaciones en cuanto a tamaño de muestra!.
- *Ars Conjectandi es, a 300 años, es una obra fundamental en la teoría matemática de la probabilidad y la estadística, así como del pensamiento estadístico.*



## IV. Probabilidad y Estadística en la obra

- Dado  $c > 0$ , se prescribe  $N \geq 1$  tal que

$$\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| \leq \epsilon) > c\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| > \epsilon).$$

## IV. Probabilidad y Estadística en la obra

- Dado  $c > 0$ , se prescribe  $N \geq 1$  tal que

$$\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| \leq \epsilon) > c\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| > \epsilon).$$

- **Ley de los grandes números:** Dado  $c > 0$ , existe  $N \geq 1$  y

$$\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| > \epsilon) < \frac{1}{1+c}.$$

## IV. Probabilidad y Estadística en la obra

- Dado  $c > 0$ , se prescribe  $N \geq 1$  tal que

$$\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| \leq \epsilon) > c\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| > \epsilon).$$

- **Ley de los grandes números:** Dado  $c > 0$ , existe  $N \geq 1$  y

$$\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| > \epsilon) < \frac{1}{1+c}.$$

- **Probabilidad clásica:**

## IV. Probabilidad y Estadística en la obra

- Dado  $c > 0$ , se prescribe  $N \geq 1$  tal que

$$\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| \leq \epsilon) > c\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| > \epsilon).$$

- **Ley de los grandes números:** Dado  $c > 0$ , existe  $N \geq 1$  y

$$\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| > \epsilon) < \frac{1}{1+c}.$$

- **Probabilidad clásica:**

- $\mathbb{P}_n$ , y  $p$  son racionales.

## IV. Probabilidad y Estadística en la obra

- Dado  $c > 0$ , se prescribe  $N \geq 1$  tal que

$$\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| \leq \epsilon) > c\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| > \epsilon).$$

- **Ley de los grandes números:** Dado  $c > 0$ , existe  $N \geq 1$  y

$$\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| > \epsilon) < \frac{1}{1+c}.$$

- **Probabilidad clásica:**

- $\mathbb{P}_n$ , y  $p$  son racionales.
- Número de casos favorables entre número de casos posibles.

## IV. Probabilidad y Estadística en la obra

- Dado  $c > 0$ , se prescribe  $N \geq 1$  tal que

$$\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| \leq \epsilon) > c\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| > \epsilon).$$

- **Ley de los grandes números:** Dado  $c > 0$ , existe  $N \geq 1$  y

$$\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| > \epsilon) < \frac{1}{1+c}.$$

- **Probabilidad clásica:**

- $\mathbb{P}_n$ , y  $p$  son racionales.
- Número de casos favorables entre número de casos posibles.

- **Estimación de probabilidades:**

## IV. Probabilidad y Estadística en la obra

- Dado  $c > 0$ , se prescribe  $N \geq 1$  tal que

$$\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| \leq \epsilon) > c\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| > \epsilon).$$

- **Ley de los grandes números:** Dado  $c > 0$ , existe  $N \geq 1$  y

$$\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| > \epsilon) < \frac{1}{1+c}.$$

- **Probabilidad clásica:**

- $\mathbb{P}_n$ , y  $p$  son racionales.
- Número de casos favorables entre número de casos posibles.

- **Estimación de probabilidades:**

- *Frecuencia relativa  $\hat{p}_n$  aproxima al verdadero valor  $p$  cuando **no es posible conocer todos los casos posibles.***

## IV. Probabilidad y Estadística en la obra

- Dado  $c > 0$ , se prescribe  $N \geq 1$  tal que

$$\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| \leq \epsilon) > c\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| > \epsilon).$$

- **Ley de los grandes números:** Dado  $c > 0$ , existe  $N \geq 1$  y

$$\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| > \epsilon) < \frac{1}{1+c}.$$

- **Probabilidad clásica:**

- $\mathbb{P}_n$ , y  $p$  son racionales.
- Número de casos favorables entre número de casos posibles.

- **Estimación de probabilidades:**

- *Frecuencia relativa  $\hat{p}_n$  aproxima al verdadero valor  $p$  cuando **no es posible conocer todos los casos posibles.***

- **Convergencia en probabilidad:**

$$\mathbb{P}_n (|\hat{p}_n - p| > \epsilon) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$



## IV. Probabilidad y Estadística en la obra

- Dado  $c > 0$ , se prescribe  $N \geq 1$  tal que

$$\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| \leq \epsilon) > c\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| > \epsilon).$$

- **Ley de los grandes números:** Dado  $c > 0$ , existe  $N \geq 1$  y

$$\mathbb{P}_N (|\hat{p}_N - p| > \epsilon) < \frac{1}{1+c}.$$

- **Probabilidad clásica:**

- $\mathbb{P}_n$ , y  $p$  son racionales.
- Número de casos favorables entre número de casos posibles.

- **Estimación de probabilidades:**

- *Frecuencia relativa  $\hat{p}_n$  aproxima al verdadero valor  $p$  cuando **no es posible conocer todos los casos posibles.***

- **Convergencia en probabilidad:**

$$\mathbb{P}_n (|\hat{p}_n - p| > \epsilon) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

- **Estimador consistente**

## IV. Rigor y tamaño de muestra

- **Demostración:**

## IV. Rigor y tamaño de muestra

- **Demostración:**

- Alto rigor: 5 lemas y "el límite"

# IV. Rigor y tamaño de muestra

- **Demostración:**

- Alto rigor: 5 lemas y "el límite"
- Definición de límite, John Wallis (1616-1703).

- **Demostración:**

- Alto rigor: 5 lemas y "el límite"
- Definición de límite, John Wallis (1616-1703).
- 1821: Argumentos  $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 1\dots$ , Cauchy (1789-1857), Bolzano (1781-1848).

## IV. Rigor y tamaño de muestra

- **Demostración:**

- Alto rigor: 5 lemas y "el límite"
- Definición de límite, John Wallis (1616-1703).
- 1821: Argumentos  $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 1\dots$ , Cauchy (1789-1857), Bolzano (1781-1848).

- **¿Qué tan grande debe ser el tamaño de muestra  $n$ ?:**

## IV. Rigor y tamaño de muestra

- **Demostración:**

- Alto rigor: 5 lemas y "el límite"
- Definición de límite, John Wallis (1616-1703).
- 1821: Argumentos  $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 1\dots$ , Cauchy (1789-1857), Bolzano (1781-1848).

- **¿Qué tan grande debe ser el tamaño de muestra  $n$ ?:**

- Cota superior para la probabilidad es muy grande.

## IV. Rigor y tamaño de muestra

- **Demostración:**

- Alto rigor: 5 lemas y "el límite"
- Definición de límite, John Wallis (1616-1703).
- 1821: Argumentos  $\forall \epsilon > 0, \exists N > 1\dots$ , Cauchy (1789-1857), Bolzano (1781-1848).

- **¿Qué tan grande debe ser el tamaño de muestra  $n$ ?:**

- Cota superior para la probabilidad es muy grande.
- $c = 1, \epsilon = 1/5000$  necesitan  $n = 25550$ .



## IV. Rigor y tamaño de muestra

- **Demostración:**

- Alto rigor: 5 lemas y "el límite"
- Definición de límite, John Wallis (1616-1703).
- 1821: Argumentos  $\forall \epsilon > 0, \exists N > 1\dots$ , Cauchy (1789-1857), Bolzano (1781-1848).

- **¿Qué tan grande debe ser el tamaño de muestra  $n$ ?:**

- Cota superior para la probabilidad es muy grande.
- $c = 1, \epsilon = 1/5000$  necesitan  $n = 25550$ .

- **Intuición y estudios empíricos** de Jacobo Bernoulli:

## IV. Rigor y tamaño de muestra

- **Demostración:**

- Alto rigor: 5 lemas y "el límite"
- Definición de límite, John Wallis (1616-1703).
- 1821: Argumentos  $\forall \epsilon > 0, \exists N > 1\dots$ , Cauchy (1789-1857), Bolzano (1781-1848).

- **¿Qué tan grande debe ser el tamaño de muestra  $n$ ?:**

- Cota superior para la probabilidad es muy grande.
- $c = 1, \epsilon = 1/5000$  necesitan  $n = 25550$ .

- **Intuición y estudios empíricos** de Jacobo Bernoulli:

- *menos observaciones*

- **Modelo de urnas**

## IV. Modelos de urnas, simulación, aplicación, riesgo.

- **Modelo de urnas**
- Con  $r + s$  fichas

## IV. Modelos de urnas, simulación, aplicación, riesgo.

- **Modelo de urnas**
- Con  $r + s$  fichas
  - $r = 3000, s = 2000$ .

## IV. Modelos de urnas, simulación, aplicación, riesgo.

- **Modelo de urnas**
- Con  $r + s$  fichas
  - $r = 3000, s = 2000$ .
  - Muestreo con reemplazo. Independencia.

## IV. Modelos de urnas, simulación, aplicación, riesgo.

- **Modelo de urnas**
- Con  $r + s$  fichas
  - $r = 3000, s = 2000$ .
  - Muestreo con reemplazo. Independencia.
- **Simulación**

# IV. Modelos de urnas, simulación, aplicación, riesgo.

- **Modelo de urnas**

- Con  $r + s$  fichas

- $r = 3000, s = 2000.$

- Muestreo con reemplazo. Independencia.

- **Simulación**

- Para ilustrar el resultado.



- **Modelo de urnas**

- Con  $r + s$  fichas

- $r = 3000, s = 2000.$

- Muestreo con reemplazo. Independencia.

- **Simulación**

- Para ilustrar el resultado.

- Estudios empíricos.

- **Modelo de urnas**

- Con  $r + s$  fichas

- $r = 3000, s = 2000.$

- Muestreo con reemplazo. Independencia.

- **Simulación**

- Para ilustrar el resultado.
  - Estudios empíricos.
  - Posibles aplicaciones.

# IV. Aplicaciones visionarias sugeridas por Jacobo

## Pensamiento estadístico

- Estimar probabilidades y estudiar variabilidad en problemas de seguros, leyes, epidemias, etc.

# IV. Aplicaciones visionarias sugeridas por Jacobo

## Pensamiento estadístico

- Estimar probabilidades y estudiar variabilidad en problemas de seguros, leyes, epidemias, etc.
- No tuvo acceso a los datos de Johan de Witt.

# IV. Aplicaciones visionarias sugeridas por Jacobo

## Pensamiento estadístico

- Estimar probabilidades y estudiar variabilidad en problemas de seguros, leyes, epidemias, etc.
- No tuvo acceso a los datos de Johan de Witt.
- Introducción a la Parte II: Sin los métodos de Ars Conjectandi no puede continuar:

# IV. Aplicaciones visionarias sugeridas por Jacobo

## Pensamiento estadístico

- Estimar probabilidades y estudiar variabilidad en problemas de seguros, leyes, epidemias, etc.
- No tuvo acceso a los datos de Johan de Witt.
- Introducción a la Parte II: Sin los métodos de Ars Conjectandi no puede continuar:
  - La cautela de los políticos (decisiones bajo incertidumbre).

# IV. Aplicaciones visionarias sugeridas por Jacobo

## Pensamiento estadístico

- Estimar probabilidades y estudiar variabilidad en problemas de seguros, leyes, epidemias, etc.
- No tuvo acceso a los datos de Johan de Witt.
- Introducción a la Parte II: Sin los métodos de Ars Conjectandi no puede continuar:
  - La cautela de los políticos (decisiones bajo incertidumbre).
  - Los diagnósticos médicos.

# IV. Aplicaciones visionarias sugeridas por Jacobo

## Pensamiento estadístico

- Estimar probabilidades y estudiar variabilidad en problemas de seguros, leyes, epidemias, etc.
- No tuvo acceso a los datos de Johan de Witt.
- Introducción a la Parte II: Sin los métodos de Ars Conjectandi no puede continuar:
  - La cautela de los políticos (decisiones bajo incertidumbre).
  - Los diagnósticos médicos.
- Conferencia Inaugural como Decano:



# IV. Aplicaciones visionarias sugeridas por Jacobo

## Pensamiento estadístico

- Estimar probabilidades y estudiar variabilidad en problemas de seguros, leyes, epidemias, etc.
- No tuvo acceso a los datos de Johan de Witt.
- Introducción a la Parte II: Sin los métodos de Ars Conjectandi no puede continuar:
  - La cautela de los políticos (decisiones bajo incertidumbre).
  - Los diagnósticos médicos.
- Conferencia Inaugural como Decano:
  - Descifrar códigos.

# IV. Aplicaciones visionarias sugeridas por Jacobo

## Pensamiento estadístico

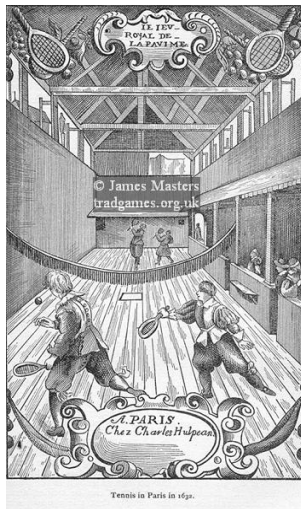
- Estimar probabilidades y estudiar variabilidad en problemas de seguros, leyes, epidemias, etc.
- No tuvo acceso a los datos de Johan de Witt.
- Introducción a la Parte II: Sin los métodos de Ars Conjectandi no puede continuar:
  - La cautela de los políticos (decisiones bajo incertidumbre).
  - Los diagnósticos médicos.
- Conferencia Inaugural como Decano:
  - Descifrar códigos.
  - Composición de medicamentos.

# IV. Aplicaciones visionarias sugeridas por Jacobo

## Pensamiento estadístico

- Estimar probabilidades y estudiar variabilidad en problemas de seguros, leyes, epidemias, etc.
- No tuvo acceso a los datos de Johan de Witt.
- Introducción a la Parte II: Sin los métodos de Ars Conjectandi no puede continuar:
  - La cautela de los políticos (decisiones bajo incertidumbre).
  - Los diagnósticos médicos.
- Conferencia Inaugural como Decano:
  - Descifrar códigos.
  - Composición de medicamentos.
- Consideración de probabilidad de intervalos es metrología avanzada para el Siglo XVII.

# V Cartas a un amigo sobre el juego de tenis real



- Escribe Jacobo Bernoulli:
  - El cuerpo humano es demasiado complejo como para conocerlo totalmente.
  - Hay que usar el arte de la conjetura para predecir quien va a ganar.
  - Esto se hace observando repeticiones de juegos.
- Las estadísticas deportivas de hoy en día .....

## V. Impacto de Parte 4 de El arte de la conjetura

El comienzo de una historia de investigaciones bien conocida durante 300 años

- 1709, Nicolas I Bernoulli: aplicación en problemas reales.
- 1738, de Moivre (1667-1754): Teorema Central del Límite Local
- 1812, Laplace (1749-1827): Teorema Central del Límite Integral
- 1837, Poisson (1781-1840): Aproximación de Poisson
- 1853, Byenaymé (1796-1878), 1874 Chebyshev (1821-1894), 1884 Markov (1856-1922):

$$\mathbb{P}_n (|\hat{p}_n - p| > \epsilon) < \frac{1}{4n\epsilon^2}.$$

- 1911, Bernstein (1880-1897): Demostración de Teorema de Weierstrass
- 1938, Cramer (1893-1985): Desviaciones grandes,  $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}_n (|\hat{p}_n - p| > \epsilon) < 2 \exp(-2n\epsilon^2).$$

# V. Impacto de Parte 4 de El arte de la conjetura

El comienzo de una historia de investigaciones bien conocida durante 300 años

- Artículo especial de Manfred Denker en el número de julio de 2013 del Bulletin of the American Mathematical Society:

# V. Impacto de Parte 4 de El arte de la conjetura

El comienzo de una historia de investigaciones bien conocida durante 300 años

- Artículo especial de Manfred Denker en el número de julio de 2013 del Bulletin of the American Mathematical Society:
  - Tercentennial Anniversary of Bernoulli's Law of Large Numbers.



## V. Impacto de Parte 4 de El arte de la conjetura

El comienzo de una historia de investigaciones bien conocida durante 300 años

- Artículo especial de Manfred Denker en el número de julio de 2013 del Bulletin of the American Mathematical Society:
  - Tercentennial Anniversary of Bernoulli's Law of Large Numbers.
  - Perspectiva histórica e informativa acerca de algunos avances contemporáneos de probabilidad y estadística, cuyo origen se puede rastrear en El arte de la conjetura hace 300 años.

## V. Impacto de Parte 4 de El arte de la conjetura

El comienzo de una historia de investigaciones bien conocida durante 300 años

- Artículo especial de Manfred Denker en el número de julio de 2013 del Bulletin of the American Mathematical Society:
  - Tercentennial Anniversary of Bernoulli's Law of Large Numbers.
  - Perspectiva histórica e informativa acerca de algunos avances contemporáneos de probabilidad y estadística, cuyo origen se puede rastrear en El arte de la conjetura hace 300 años.
- Discute de manera breve conexiones con otras ramas de las matemáticas:

## V. Impacto de Parte 4 de El arte de la conjetura

El comienzo de una historia de investigaciones bien conocida durante 300 años

- Artículo especial de Manfred Denker en el número de julio de 2013 del Bulletin of the American Mathematical Society:
  - Tercentennial Anniversary of Bernoulli's Law of Large Numbers.
  - Perspectiva histórica e informativa acerca de algunos avances contemporáneos de probabilidad y estadística, cuyo origen se puede rastrear en El arte de la conjetura hace 300 años.
- Discute de manera breve conexiones con otras ramas de las matemáticas:
  - Divisibilidad infinita en grupos de Lie.

## V. Impacto de Parte 4 de El arte de la conjetura

El comienzo de una historia de investigaciones bien conocida durante 300 años

- Artículo especial de Manfred Denker en el número de julio de 2013 del Bulletin of the American Mathematical Society:
  - Tercentennial Anniversary of Bernoulli's Law of Large Numbers.
  - Perspectiva histórica e informativa acerca de algunos avances contemporáneos de probabilidad y estadística, cuyo origen se puede rastrear en El arte de la conjetura hace 300 años.
- Discute de manera breve conexiones con otras ramas de las matemáticas:
  - Divisibilidad infinita en grupos de Lie.
  - Caracterización de espacios de Banach B-convexos mediante la ley de los grandes números.

## VII. Lecturas sugeridas

- 1 *The Art of Conjecturing*, Jacobo Bernoulli (1713). Traducción al inglés de Edith Dudley, 2006.
- 2 *Jacobo Bernoulli Deciphered*. Elart von Collani. Bernoulli News, Volume 13. No. 2, 2006.
- 3 *The Emergence of Mathematics/ Probability from the perspective of the Leibniz- Jacod Bernoulli Correspondence*. Edith Dudley. Perspectives on Science 6, 41-76, 1998.
- 4 *The Significance of Jacobo Bernoulli´s Ars Conjectandi for the Phylosophy of Probability Today*. Glenn Shafer.
- 5 *The History of Statistics. The Measurement of Uncertanty before 1900*. Stephen M. Stigler, 1986.
- 6 *Tercentennial Anniversary of Bernoulli's Law of Large Numbers*. Manfred Denker, Bulletin of the American Mathematical Society 50, 373-390, 2013.

MUCHAS GRACIAS

pabreu@cimat.mx

[www.cimat.mx/~pabreu](http://www.cimat.mx/~pabreu)

[www.estadistica2013ciamat.mx](http://www.estadistica2013ciamat.mx)