NOTAS DEL SEMINARIO DE GRÁFICAS(TEORÍA ESPECTRAL Y ANÁLISIS ASINTÓTICO)

OCTAVIO ARIZMENDI

Temario.

1. Introducción a Gráficas.
2. Teoría Espectral.
3. Productos de gráficas.
4. Gráficas de Erdos-Renyi.
5. Análisis Asintótico.

1. Definiciones Básicas

Definición 1.1. Sea V un conjunto no vacio y sea E un subconjunto de $V \times V$. El par $(G = V, E)$ se llama *gráfica con* con conjunto de vértices V y conjunto de aristas E. Decimos que dos vértices $v_i, v_j \in V$ son adjacentes si $(v_i, v_j) \in E$ y escribimos $v_i \sim v_j$.

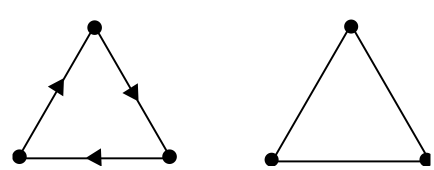
Definición 1.2. Un arista de la forma (v_i, v_j) se llama lazo. Una gráfica se dice *simple* si no tiene lazos.

Definición 1.3. Una gráfica es **no** dirigida si $(v_i, v_j) \in E \implies (v_j, v_i) \in E$.

Definición 1.4. Para un vértice $v \in V$ de G el grado define como $\deg(v) := \deg_G(v) = |\{w \in V; w \sim v\}|$

La representación geométrica consiste en asociar puntos en R^2 a los vértices y líneas (o arcos) que unan esos puntos a las aristas. Esto es, si ponemos una línea entre v_i y v_j si el par de aristas (v_i, v_j) y (v_j, v_i) existen y una flecha de v_i a v_j si (v_i, v_j) pero no (v_j, v_i).

Ejemplo 1.1. Las representaciones geométricas del ciclo dirigido y el ciclo no dirigido de tamaño 3.



$V = \{1, 2, 3\}$
$E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$
$deg(v_i) = 1$

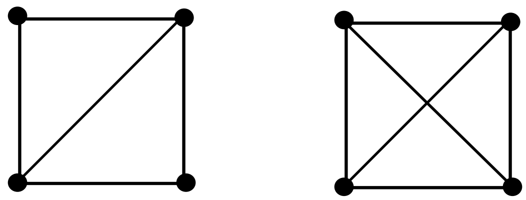
$V = \{1, 2, 3\}$
$E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (2, 1), (3, 2), (1, 3)\}$
$deg(v_i) = 2$

Definición 1.5. (Isomorfismo de gráficas) $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son isomorfismos si existe $f : V_1 \to V_2$ biyectiva tal que $x \sim y$ si y sólo si $f(x) \sim f(y)$

Definición 1.6. Una gráfica $(G = V, E)$ se dice finita si $|V| < \infty$.

Definición 1.7. Sea $(G = V, E)$ una gráfica simple no dirigida. Una gráfica $(G = V, E)$ se dice localmente finita si para todo $v \in V$, se tiene $|V| < \infty$.

Definición 1.8. Una gráfica G es regular si existe $k < \infty$ tal que cada vértice tiene grado k ($\deg(v_i) = k$, $\forall v_i \in V$). Más específicamente decimos que G is k-regular.



$deg(1) = deg(3) = 2,$ $\quad$ $deg(i) = 3$

$deg(2) = deg(4) = 3$

Definición 1.9. (Gráfica plana) Decimos que una gráfica G es plana si existe una una representacin en el plano de G de tal forma que cualesquiera dos aristas distintas $e_i, e_j \in E$ no se intersectan.

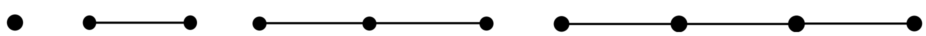
Definición 1.10. (Caminata) Una caminata es una sucesión de vértices
$v_0 \sim v_1 \sim v_2 \sim \cdots \sim v_n$

Definición 1.11. (Camino) Un ciclo es un camino es una caminata con $e_i \neq e_j$ si $i = j$

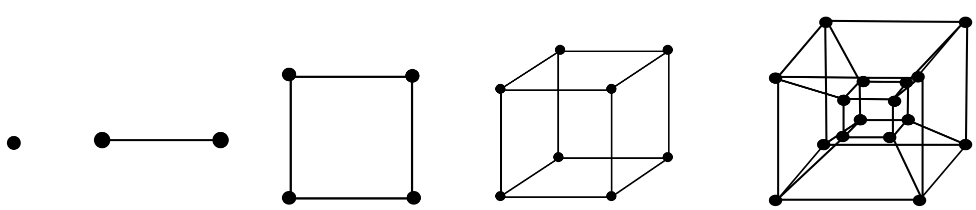
Definición 1.12. (Ciclo) Un ciclo es un camino con $v_0 \sim v_n$

Ejemplos

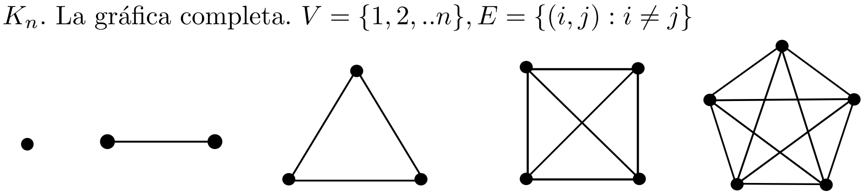
- P_n. El camino de tamaño n. $V = \{1, 2, ..n\}, E = \{(i, j) : |i - j| = 1\}$.



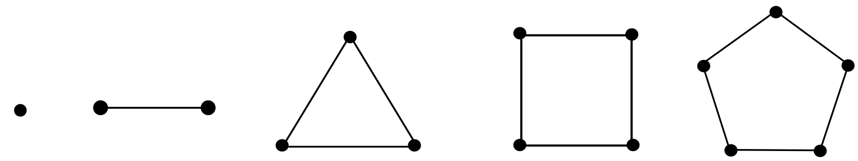
- Q_n. El cubo de dimensión n. $V = \{\{0, 1\}^n\}, E = \{(v_i, v_j) \in V| : ||v_i - v_j|| = 1\}$, donde, para $v \in \mathbb{R}^n$, $||v||$ denota la norma usual.



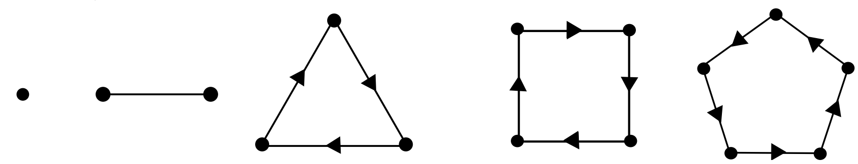
- K_n. La gráfica completa. $V = \{1, 2, ..n\}, E = \{(i, j) : i \neq j\}$



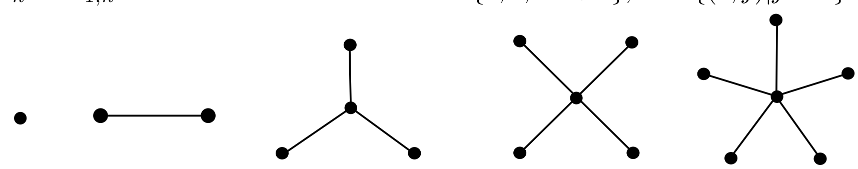
- C_n. El ciclo de tamaño n. $V = \{1, 2, ..n\}, E = \{(i, j) : |i - j| = 1 \ mod\ n\}$



- $\overrightarrow{C_n}$. El ciclo dirigido de tamaño n. $V = \{1, 2, ..n\}, E = \{(i, j) : i - j = 1 \ mod\ n\}$



- $S_n = K_{1,n}$. La estrella de n aristas. $V = \{1, 2, ..n + 1\}, E = \{(1, j)|j > 1\}$



2. Teoría Espectral

Sea $G = (V, E)$ una gráfica finita. $V = \{v_i\}_{i\in I} \quad E = \{e_i\}$ denotamos por $n = |V|$ y $|E| = m$.

Definición 2.1. La matriz de adyacencia $A \in M_n$ es la matriz con entradas $A_{i,j} \in \{0, 1\}$ tal que $A_{i,j} = 1 \Leftrightarrow e_{ij} = \{v_i, v_j\} \in E$.

Observación 2.1. $A = A^*$ si y sólo si A no es dirigida.

Definición 2.2. La matriz de Laplace $L \in M_n$ es la matriz tal que $\sum_j L_{i,j} = 0$ y $L_{i,j} = -A_{i,j} \ i \neq j$. Si D es la matriz diagonal con $D_{i,i} = \deg(v_i)$ $L = D - A$. $L' = D + A$.

Estamos interesados en el espectro de A y L. Esto es sus, eigenvalores.

Recordemos que los eigenvalores de A pueden ser recuperados de la traza de potencias de A, a través de la fórmula.

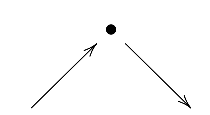
$$\mathrm{tr}(A^k) = \frac{1}{n}\sum \lambda_i^k.$$

Ejemplo 2.1. Consideremos la camino y el camino dirigido de tamanõ 3.

$\bullet \text{———} \bullet \text{———} \bullet$ $\quad \sqrt{2}, 0, -\sqrt{2} \quad$ $\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$ $\quad 0, 0, 0$

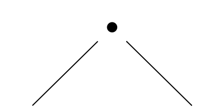
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$1, w, w^2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$2, \frac{w+w^2}{2}, \frac{w+w^2}{2}$

¿Qué información podemos obtener del espectro?

Caminatas

Proposición 2.1. Supongamos que $A = A^*$ y sea $k \in \mathbb{N}$. Entonces $(A^k)_{ij}$ es el número de caminos de tamaño k de i a j. En particular

- $A^2_{ii} = \deg(V_i)$
- $\mathrm{Tr}(A^2) = \sum \lambda_i^2 = 2$ número de aristas.
- $\frac{\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^3)}{6} =$ número de triángulos.

Conectividad

Proposición 2.2. La multiplicidad de 0 como eigenvalor de L de la gráfica no dirigida G es igual al número de componentes. En particular si Γ es conexa, O es eigenvalor de L de multiplicidad 1.

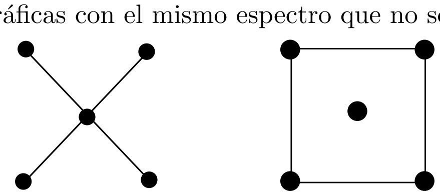
Demostración.

Proposición 2.3. El espectro de Γ es la unión de los espectros de las componentes conexas de Γ_i.

Definición 2.3. Dos gráficas G_1, G_2 son coespectrales si A_{G_1} tiene mismos eigenvalores que A_{G_2}.

Teorema 2.1. Gráficas isomorfas son coespectrales.

Nota 2.1. Existen gráficas con el mismo espectro que no son isomorfas.



Teorema 2.2. $G \approx G'$ si y sólo si existe S una matriz de permutación tales que $G' = S^{-1}AS$.

Definición 2.4. Una gráfica $G : (V, E)$ es r–partita si V admite una partición en r–clases tales que cada arista $e = \{V_i, V_j\}$ cumple que V_i y V_j está en diferentes clases.

Coloración

Proposición 2.4. Una gráfica es bipartita si y sólo si no contiene ciclos impares.

Demostración.

Si A es bipartita, entonces el espectro es simétrico: $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ es eigenvector con eigenvalor θ, entonces $\begin{bmatrix} u \\ -v \end{bmatrix}$ es eigenvector con eigenvalor $-\theta$.

Proposición 2.5. Una gráfica es bipartita si y sólo si el espectro de L y L' son iguales.

$$L'_{ij} = |L_{ij}| = D + A$$

3. Probabilidad No–Conmutativa

Podemos recuperar los eigenvalores considerando los “momentos” de A.

$$\mathrm{Tr}(A^k) = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \dots \lambda_n^k.$$

Notemos que Tr cumple:

1. $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$.
2. $\mathrm{Tr}(AA^*) \geq 0$ y $\mathrm{Tr}(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$.
3. $\mathrm{Tr}(I_n) = n$.

Recordemos que la esperanza $\mathbb{E}$ cumple lo mismo:

1. $\mathbb{E}(A+B) = \mathbb{E}(A) + \mathbb{E}(B)$.
2. $\mathbb{E}(A^2) \geq 0$.
3. $\mathbb{E}(1) = 1$.

Entonces $\mathrm{tr}(A) = \frac{\mathrm{Tr}(A)}{n}$ puede pensarse como una esperanza y de hecho $(\mathbb{M}_n, \mathrm{tr})$ es un espacio de probabilidad.

Definición 3.1.
1. Un **espacio de probabilidad no-conmutativo** es un par $(\mathcal{A}, \phi)$ donde $\mathcal{A}$ es un álgebra compleja y ϕ es un funcional lineal $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ tal que $\phi(\mathbf{1}_{\mathcal{A}}) = 1$.
2. Una **variable aleatoria no-conmutativa** (o sólo variable aleatoria) es un elemento $a \in \mathcal{A}$.

Ejemplo 3.1.
1. Espacio de Probabilidad Clásico.

   $\mathcal{A}_1 := \{X + iY : X, Y \textit{ son v. aleatorias con soporte compacto}\}$

   $\phi(X+iY) = E(X) + iE(Y)$, $E(X)$ es el valor esperado.
2. Matrices.

   $\mathcal{A}_2 = M_d(\mathbb{C})\{A : \ A \textit{ es una matriz compleja de tamaño } d \times d\}$

   $\phi(A) = tr(A) = \frac{1}{d} Traza(A)$.

Estamos interesados en los momentos de a, esto es, los valores $\phi(a^n)$.

Definición 3.2 (Distribución)**.** Si existe una medida de probabilidad μ sobre $\mathbb{C}$ con soporte compacto tal que

$$\int_{\mathbb{C}} z^k \overline{z}^l \mu(dz) = \phi(a^k (a^*)^l), \text{ para cada} k, l \in \mathbb{N},$$

llamamos a $\mu_a := \mu$ la **distribución de** a.

Nota 3.1. Si a es autoadjunto entonces μ_a es una medida con soporte en $\mathbb{R}$.

En el caso en que $A = \mathbb{M}_\ltimes$ la equación anterior se escribe como

$$\int_{\mathbb{R}} z^n d\mu_A(z) = \mathrm{tr}(A^n),$$

y de hecho $\mu_A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i}$. Esto es, a cada eigenvalor asociamos probabilidad $1/n$.

Proposición 3.1. Si G entonces y A es su matriz de adyacencia entonces bipartita $\Rightarrow \mu_A$ simétrica.

Teorema 3.1. Sea A_n una sucesión de matrices

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(A_n^k) &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}} z^n d\mu(z) \\ \Rightarrow \mu_{A_n} &\xrightarrow{w} \mu. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2. K_n.

$$A_{K_n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde es fácil ver que

$$\mathrm{Spec}(K_n) = \{n-1, -1^{n-1}\}$$

Ejemplo 3.3. $\overrightarrow{C_n}$

$$A = A_{C_n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Notemos que A es unitario i.e. $AA^* = A^*A = I y A^n = I$. De donde

$$\mathrm{Spec}(\overrightarrow{C}_n) = \{w^j | w^n = 1, 0 < j \leq n\}$$

Ejemplo 3.4. C_n

A es unitario i.e. $AA^* = A^*A = I$.

$$B = A_{C_n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \Gamma_{C_n} = A + A^* = 2\mathrm{Re}(A)$$

$$\mathrm{Spec}(C_n) = \{2\cos(2\pi j/n)\} = \{w^j + w^{-j}\} = 2\mathrm{Re}(w)$$

¿Qué pasa cuando $C_n \to \infty$?

$n > 2k$

$$\mathrm{Tr}(A^k) = \binom{2k}{k} = \frac{1}{\pi} \int \frac{x^{2k}}{\sqrt{2 - x^2}} dx.$$

Ejemplo 3.5. H_n

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \ X_i \ es \ Bernoulli$$

¿Qué pasa cuando $H_n \to ??$

$\deg(V_i) = n$ entonces necesitamos normalizar a un factor $\sqrt{n}$.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} A_n \xrightarrow{w} N(0,1).$$

Observación 3.1. $H_{n+1} = H_n \Box H_2$

4. Producto de Kronecker

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{nn}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1n} & \cdots & a_{1n}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{nn} & \cdots & a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{1n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} & \cdots & a_{n1}b_{1n} & \cdots & a_{nn}b_{11} & \cdots & a_{nn}b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{n1} & \cdots & a_{n1}b_{nn} & \cdots & a_{nn}b_{nn} & \cdots & a_{1n}b_{nn} \end{bmatrix}$$

Propiedades 4.1.
1. $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$.
2. $\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$.
3. $\mathrm{tr}((A \otimes B)^n) = \mathrm{tr}(A^n \otimes B^n) = \mathrm{tr}(A^n)\mathrm{tr}(B^n)$

Esto implica que $\mathrm{Spec}(A \otimes B) = \{\lambda_i \mu_i | \lambda_i \in \mathrm{Spec}(A), \mu_i \in \mathrm{Spec}(B)\}$.

5. Producto Cartesiano

5.1. Producto cartesiano de gráficas.

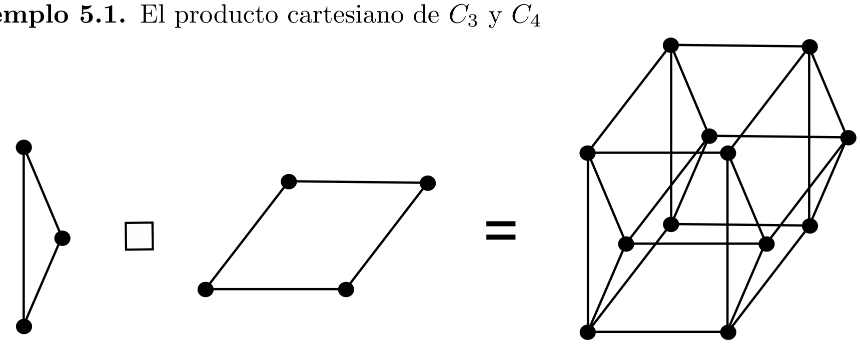
$$G_1 \Box G_2 \ V = V_1 \times V_2 \ y \ (V, W) \sim (V', W')$$

si $V = V'$ y $W \sim W'$ o $W = W'$ y $V \sim V'$

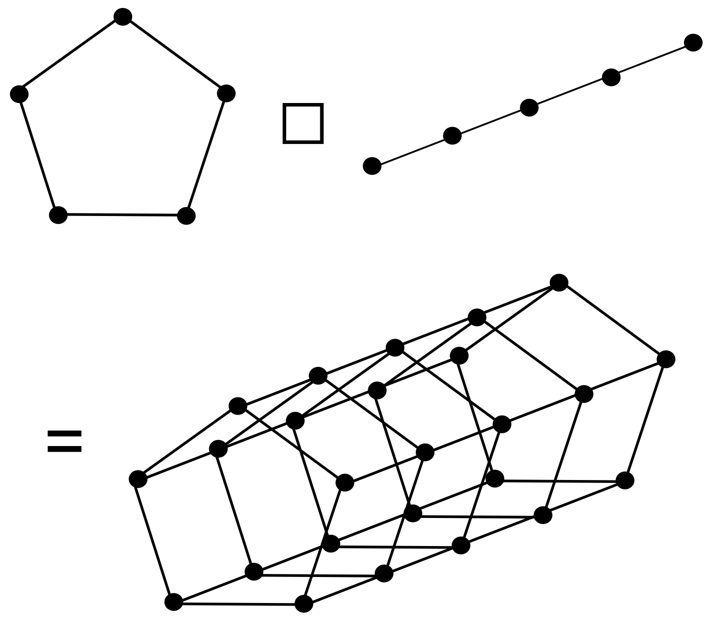
Definición 5.1. Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $(G_2 = V_2, E_2)$ dos gŕaficas. El producto directo de G_1 con G_2 está, denotado por $(G_1 \times G_2)$ es la gráfica con conjunto de vértices $V = V_1 \times V_2$ y conjunto de aristas E, de tal forma que para $(v_1, w_1), (v_1, w2) \in V_1 \times V_2$ el arista $e = (v_1, w_1) \sim (v_1, w2) \in E$ si y sólo si alguna de las condiciones se satisfacen

1. $v_1 = v_2$ y $w_1 \sim w_2$
2. $v_1 \sim v_2$ y $w_1 = w_2$.

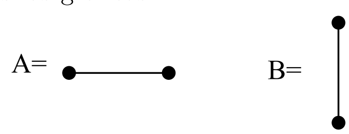
Ejemplo 5.1. El producto cartesiano de C_3 y C_4



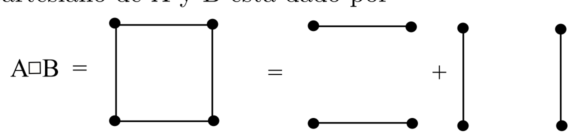
Ejemplo 5.2. El producto cartesiano de C_5 y P_4



Ejemplo Consideramos las gráficas

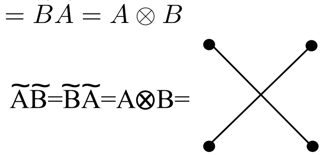


El producto cartesiano de A y B esta dado por



$$A \times B = \widetilde{A} + \widetilde{B}$$

Notemos que $\widetilde{A}\widetilde{B} = \widetilde{A}\widetilde{B} = \widetilde{B}\widetilde{A} = A \otimes B$



Además, $\widetilde{A}^2 = I, \widetilde{B}^2 = I$ y $\mathrm{tr}(\widetilde{A}\widetilde{B}) = 0$. De donde se sigue que

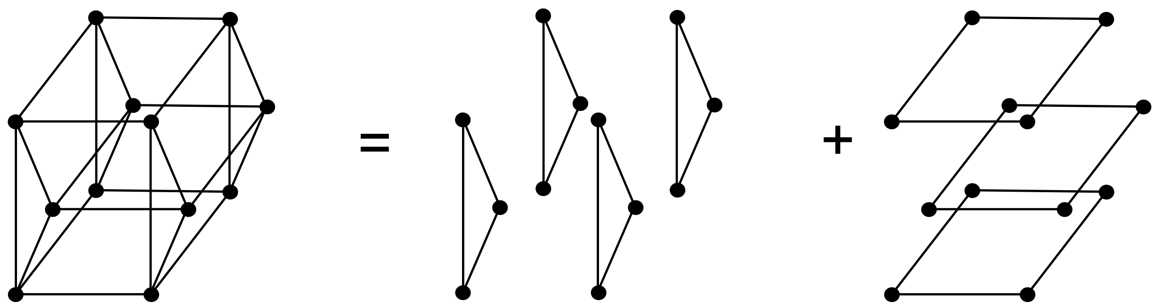
$$\mathrm{tr}(\widetilde{A}^n \widetilde{B}^m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = n \\ 1 & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

$$\mathrm{tr}(\widetilde{A}^n \widetilde{B}^m) \quad = \quad \mathrm{tr}(\widetilde{A}^n)\mathrm{tr}(\widetilde{B}^m), \ \widetilde{A} \text{ y } \widetilde{B} \text{ son independientes}$$

Mas generalmente, recordemos que el producto cartesiano se puede escribir como

$$A_1 \times A_2 = Id_k \otimes A_1 + A_2 \otimes Id_l.$$

Esto es



Veamos que $Id_k \otimes A_1$ y $A_2 \otimes Id_l$ son independientes.

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}([Id_k \otimes A_1]^m[A_2 \otimes Id_l]^n) &= \mathrm{tr}([Id_k \otimes A_1^m][A_2^n \otimes Id_l]) \\
&= \mathrm{tr}(A_2^n \otimes A_1^m) \\
&= \mathrm{tr}(A_2^n)\mathrm{tr}(A_1^m) \\
&= \mathrm{tr}([Id_k \otimes A_1^m])\mathrm{tr}([A_2^n \otimes Id_l])
\end{aligned}$$

En conclusión si $G = G_1 \times G_2$, entonces

$$\varphi(A_{G_1 \times G_2}) = \mathbb{E}_\varphi((X+Y)^n))$$

donde X, Y son independientes con la misma distribución que G_1 y G_2:

$$\begin{aligned}
E(X^{n_1}Y^{m_1}X^{n_2}Y^{m_2}\cdots X^{n_k}Y^{m_k}) = \\
E(X^{n_1+n_2+\cdots n_k})\varphi(Y^{n_1+n_2+\cdots n_k})
\end{aligned}$$

6. Gráficas con raíz

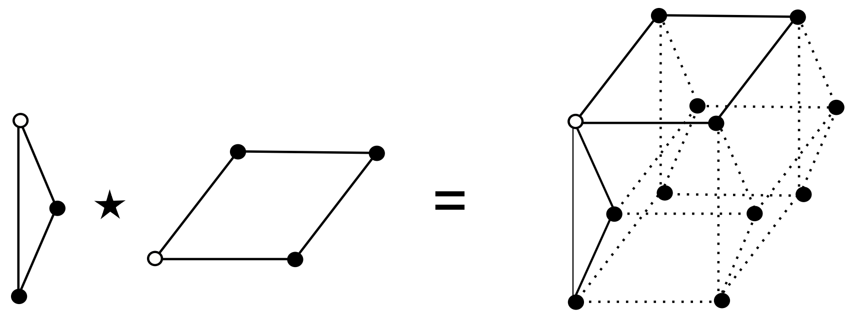
$G = (V, E, v_0), v_1 \in V$
$(A, \varphi_1).\varphi(A) = A_{11}$.
$\varphi_1(A^k) = \sharp$ caminatas de tamño k que empiezan y terminan en k.

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \cdots \varphi_d}{n} = \mathrm{tr}$$

6.1. Producto Estrella (Booleano).

Definición 6.1. Sean $G_1 = (V_1, E_1, o_1)$ y $(G_2 = V_2, o_2)$ dos gáficas con raíz. El **producto estrella** de G_1 con G_2, denotado por $G_1 \star G_2$ es la gráfica con conjunto de vértices $V = V_1 \times V_2$ y conjunto de aristas E, de tal forma que para $(v_1, w_1), (v_1, w_2) \in V_1 \times V_2$ el arista $e = (v_1, w_1) \sim (v_1, w_2) \in E$ si y sólo si alguna de las condiciones se satisfacen

1. $v_1 = v_2 = o_1$ y $w_1 \sim w_2$
2. $v_1 \sim v_2$ y $w_1 = w_2 = o_2$.



En este podemos escribir la matriz de adjacencia como $A = A_1 \otimes P_2 + P_1 \otimes A_2$ donde P_1 es la proyección a la raíz de G_1.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_l$$

donde P_1 es la proyección a la raíz de G_1.

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_k$$

Ejemplo 6.1. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$P_2 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos ver que A se puede escribir como suma de variables aleatorias independientes en el sentido Booleano. Esto es,

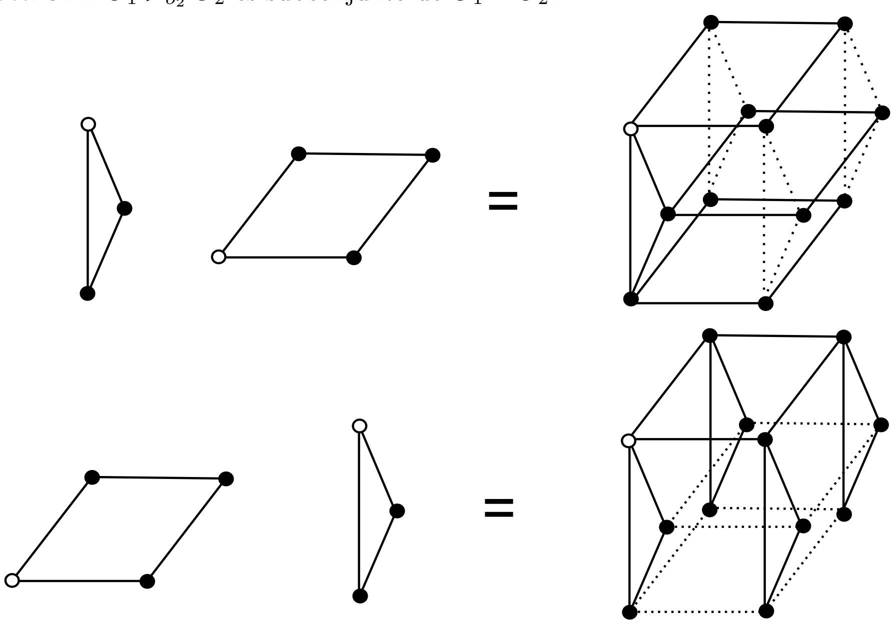
$$\begin{aligned} & \varphi_1((A_1 \otimes P_2)^{m_1}(P_1 \otimes A_2)^{n_1} \cdots (A_1 \otimes P_2)^{m_k}(P_1 \otimes A_2)^{n_k}) = \\ = \quad & \varphi_1((A_1^{m_1} \otimes P_2)(P_1 \otimes A_2)^{n_1} \cdots (A_1^{m_k} \otimes P_2)(P_1 \otimes A_2)^{n_k}) \\ = \quad & \varphi_1(A_1^{m_1} P_1 A_1^{m_2} P_1 \cdots A_1^{m_k} P_1 \otimes P_2 A_2^{n_1} \cdots P_2 A_2^{n_k}) \\ = \quad & \varphi_1(A_1^{m_1} P_1 A_1^{m_2} P_1 \cdots A_1^{m_k} P_1) \varphi_1(P_2 A_2^{n_1} \cdots P_2 A_2^{n_k}) \end{aligned}$$

6.2. Producto Monótono.

Definición 6.2. Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $(G_2 = V_2, E_2)$ dos gáficas. Fijamos un vertice $(o_2) \in V_2$ (la raíz). El **producto monótono** de G_1 con G_2, denotado por $G_1 \triangleright_{o_2} G_2$ es la gráfica con conjunto de vértices $V = V_1 \times V_2$ y conjunto de aristas E, de tal forma que para $(v_1, w_1), (v_1, w_2) \in V_1 \times V_2$ el arista $e = (v_1, w_1) \sim (v_1, w_2) \in E$ si y sólo si alguna de las condiciones se satisfacen

1. $v_1 = v_2$ y $w_1 \sim w_2$
2. $v_1 \sim v_2$ y $w_1 = w_2 = o_2$.

Nota 6.1. $G_1 \triangleright_{o_2} G_2$ es subconjunto de $G_1 \times G_2$.



7. Gráficas Aleatorias

Gráfica aleatoria: $\{G, E\}$. E es una medida de probabilidad en $2^{V \times V}$.

Ejemplo 7.1. Erdos Renyi. $K_n, \{v_i, v_j\}$ existe con probabilidad p. Si $i \neq j$, $|V| = \left|\binom{2n}{n} - n\right|$ es decir, si $E \subset 2^{V \times V}, P(E) = p^{|E|}(1-p)^{|V \times V| - |E|}$