Tarea 3

Modelos Estocásticos

Fecha de entrega: Martes 16 de Octubre de 2018.

1. Problemas

Problema 1. *Sea X_n una cadena de Markov. Prueba la sucesión $\{X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, ...\}$ también cumple la Propiedad de Markov.*

Problema 2. *Considere una cadena de Markov con r estados.*

(a) Demuestre que si se puede llegar desde i a un estado j eventualmente, entonces se puede llegar en $r-1$ pasos o menos.

(b) Si j es un estado recurrente, existe $0 < \alpha < 1$ talque para $n > r$ la probabilidad de que el primer regreso al estado j ocurra despues de n pasos es menor que α^n.

Problema 3. *Sea $\{S_n\}$ una caminata aleatoria simple con probabilidades p y q. Es decir, $S_n = X_1 + ...X_n$ donde X_i son i.i.d con $P(X = 1) = p$ y $P(X = -1) = q$.*

(a) Encuentre $E(S_n|S_{n-1})$ y $E(S_n)$. Qué pasa si $p = q$?

(b) Muestre que la probabilidad de que X se salga de cualquier intervalo (posiblemente regresando en el futuro) es 1.

(c) Para $A, B > 0$ calcule la probabilidad de que X llegue A antes que $-B$.

(d) Sea τ el primer tiempo que X_n, toma los valores A o $-B$. Encuentre $E(X_\tau)$. Qué pasa si $p = q$?

(e) Bonus: Por 2 puntos más en la tarea. Simula el proceso de arriba y verifica los resultados obtenidos.

Problema 4. *Para $a, b > 0$, una caminata simtrica con barreras reflejantes en a y $-b$ se define por las probabilidades de transición $p_{i,i+1} = 1/2$ y $p_{i,i-1} = 1/2$ para $a < i < b$ y $p_{a,a-1} = 1$ y $p_{-b,-b+1} = 1$. Determine la distribución de estacionaria de la cadena.*

Problema 5. *Para cada una de las siguientes matrices de transición determina el periodo, clases de equivalencia (diciendo si son transitorias o recurrentes) y medidas estacionarias.*

$$a)\begin{pmatrix} .3 & .7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .3 & 7 \\ 0 & 0 & .9 & .1 \\ .1 & .9 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} .3 & .7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ .1 & .9 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} .3 & .7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ .1 & .9 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad d)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$