Tarea 2

Modelos Estocásticos I

Fecha de entrega: Martes 25 de Septiembre de 2017 a las 9:30 hrs.

1. Problemas

PROBLEMA 1 (Mínimo de Exponenciales). *Sean $X_1, X_2, \dots X_n$ variables aleatorias exponenciales con parametros $\lambda_1, \dots \lambda_n$, resp.*

(1) Mostrar que $Y = min(X_1, X_2, ...X_n)$ tiene distribución $Exp(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$.
(2) Mostrar que $P(X_1 < X_2) = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$.
(3) Calcule la probabilidad $P(X_i = Y)$.

PROBLEMA 2 (Pérdida de Memoria). *La propiedad $P(X \geq s + t|X > t) = P(X \geq s)$ conoce como perdida de memoria.*

(1) Muestra que si $X \sim G(p)$, $0 < p < 1$.

$$P(X \geq s + t|X > t) = P(X \geq s) \ \forall t, s \in \mathbb{N}.$$

(2) Muestra que si $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$.

$$P(X \geq s + t|X > t) = P(X \geq s) \ \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

PROBLEMA 3. *Sean X, Y v.a. normales con varianzas σ_1 y σ_2, independientes. Usa la formula de convolución para encontrar la densidad de $X + Y$, $X - Y$ y X/Y*

PROBLEMA 4 (Distancia de Kolmogorov). *Definimos la distancia de Kolmogorov entre dos funciones de distribución F, G como $d_{Kol}(F, G) = sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - G(x)|$.*

(1) Muestre que si, para variables aleatorias $\{X_n\}_{n>0}$ y X, se tiene que $d_{Kol}(F_{X_n}, F_X) \xrightarrow{d} 0$ entonces $X_n \xrightarrow{d} X$ en distribución.
(2) Muestre un ejemplo en donde tal que $X_n \xrightarrow{d} X$ pero $d_{Kol}(F_X, F_X) > \delta$ para todo n y algún $\delta > 0$.
(3) Sea $X_n = [nX]/n$ muestre que $X_n \xrightarrow{d} X$ en distribución, cuando $n \to \infty$. ¿Es cierto que $d_{Kol}(F_X, F_{X_n}) \xrightarrow{d} 0$?

PROBLEMA 5. *Sean $X_1, X_2, \dots X_n$ variables aleatorias uniformes independientes entre sí.*

(1) Encuentra la densidad de $M = max(X_1, X_2, \cdots X_n)$.
(2) Encuentra la densidad de $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
(3) ¿Cual es la probabilidad de que $X_1 = M$?
(4) Suponiendo que sabemos que $X_1 = M$ y $max(X_2, \cdots X_n) = a$, ¿Cuál es la distribución de X_1.