Tarea 1

Curso de Modelos Estocásticos I

Fecha de entrega: Martes 11 de Septiembre de 2018 a las 9:30 hrs.

1. Problemas

Problema 1 (Método de momentos para Variables Poisson). *Sea X una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y p y sea Y una distribución de Poisson de parámetro λ.*

1) Encuentra los momentos factoriales $E(X(X-1))\cdots X-k+1)$ de X.

2) Muestra que el r-ésimo momento factorial de Y está dados por λ^r.

3) Usa 1) y 2) para mostrar que si $np \to \lambda$ entoces $X \to Y$ en distribución.

Problema 2 (Variables Aleatorias con Soporte Acotado). *Decimos que una variable aleatoria tiene soporte acotado si existen a y b números reales tales que*

$$P(X < a) = P(X > b) = 0.$$

(1) Sea $M = max(|a|, |b|)$. Muestre que

$$\lim_{n\to\infty} (m_{2n})^{\frac{1}{2n}} \leq M$$

(2) Conversamente, muestre que si el límite

$$L = \lim_{n\to\infty} (m_{2n})^{\frac{1}{2n}}$$

existe, entonces $P(X < -L) = P(X > L) = 0$.

(3) Muestra usando el criterio de Carleman que una variable aleatoria con soporte acotado está determinada por momentos.

Problema 3 (Distribución lognormal). *Sea X una v.a. cuya distribución es Gaussiana.*

(1) X cumple el criterio de Carleman? Qué pasa con X^2? X^3? X^4? X^6?

(2) Sea $Y = e^X$, calcule la densidad $f_Y(x)$ de Y. Una variable con esta densidad se dice que tiene distribución log-normal.

(3) Calcule los momentos de Y. Cumplen el criterio de Carleman?

Problema 4 (Aguja de Buffon). *Consideremos aguja de longitud $l < m$ lanzada sobre un plano dividido por líneas paralelas separadas a distancia m. Queremos calcular cuál es la probabilidad que la aguja cruce alguna línea usando los siguientes pasos.*

(1) Sea Y la variable aleatoria que cuenta el numero de veces que toca la aguja una de estas líneas. Entonces P(Y=1)=E(Y).

(2) Más generalmente se lanza un curva poligonal con lados $A_1, A_2, ...A_n$ de longitudes $m_1, m_2, .., m_n$. Sea X_i la variable aleatoria que cuenta el numero de veces que toca el lado A_i . Si X es el número de veces que toca la curva una línea, $E(X) = E(X_1) + \cdots E(X_n)$.

(3) Deduzca del (2) que para curvas polígonales E(X) es propocional al perímetro.

(4) Usando una argumento de aproximación de curvas, muestra que (3) es también cierto para curvas convexas.

(5) Qué pasa cuando tomamos un circulo de diametro m?

6) Usa 1) a 5) para calcular es la probabilidad que la aguja cruce alguna línea. Es válido el argumento para $l > m$?

(6) Deduce de (3) y (4) el Teorema de Barbier: toda curva de ancho constante tiene perímetro π veces su ancho.

Problema 5 (Simulación de variables aleatorias). *Considere un una variable aleatoria beta con parametros $\alpha = \beta = N/400000$ donde N denota el número desde que naciste hasta el momento en que realizas este ejercicio.*

(1) Haz un histograma 1000 realizaciones de la variable aleatoria.

(2) Puedes enunciar un teorema que justifique el resultado?

(3) Encuentra los primero 5 momentos de X, analíticamente.

(4) Haga una estimación estos 5 momentos usando medias muestrales de X, X^2,X^3,X^4 y X^5 y compárelos con los valores reales. Qué teorema justifica esta estimación?

Problema 6 (Aproximación de Áreas). *Considere un vector aleatorio (x, y) que se distributye uniformemente uniforme en $[0, 1] \times [0, 1]$ y sea X la variable aleatoria que toma 1 si $x^2 + y^2 < 1$ y 0 si no.*

(1) Calcule $E[X]$ y haga una estimación de esta usando 1000 realizaciones de X (Grafica estos puntos).

2) Da una estimación de π usando 1). Cuántas realizaciones son suficientes para aproximar a 10 dígitos con probabilidad de más del 90 por ciento, justifica tu respuesta . Consideras un buen método de aproximación de areas?

(3) Usando el método de rechazo haz 100 realizaciones una variable aleatoria uniformen en el anillo $A = \{(x, y)|.98 < x^2 + y^2 < 1\}$. (Grafica estos puntos). Consideras que es un buen método?

(3) Que método usarías para mejorar (2) ?