

TAREA 3

PROBABILIDAD Y COMBINATORIA

Fecha de entrega: Martes 12 de marzo de 2019

1. DEFINICIONES

Una multcadena de tamaño $k - 1$ es una tupla $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k) \in P^k$, con $\pi_1 \leq \pi_2 \leq \dots \leq \pi_k$.

2. PROBLEMAS

Problema 1. Encuentra el número de particiones por pares con exactamente un cruce.

Problema 2. a) Pruebe que si $f(n)$ es multiplicativa, entonces también lo es la función

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

b) La función de Euler $\phi(d)$ está dada por el número de enteros $1 \leq m \leq n$ primos relativos con n . Muestre que

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n.$$

c) Muestre que ϕ es multiplicativa.

d) Encuentre la serie de Dirichlet de la función ϕ en términos de la función zeta de Riemann ζ .

Problema 3. Encuentre la serie de Dirichlet de las siguientes funciones:

- a) $f(n) = n$
- b) $f(n) = n^\alpha$
- c) $f(n) = \log n$
- d) $f(n) = \sum_{d|n} d^a$

Problema 4. Sea $C_n^{(k)}$ el número de mult cadenas de tamaño k en $NC(n)$.

a) Pruebe que la serie

$$u_k(z) = \sum_{n \geq 0} C_n^{(k)}$$

cumple la recursión

$$u_k(z u_{k+1}) = u_{k+1}$$

b) Deduzca de a) que

$$u_k(z) = 1 + z(u_k(z))^{k+1}$$

c) Obtenga una fórmula cerrada para $C_n^{(k)}$.

Date: 26 de febrero de 2019.

Problema 5. a) Muestre que el diagrama de Hasse de $P \times Q$ visto como grafica es el producto directo de las gráficas de los diagramas de Hasse de P y de Q .

b) Pruebe que $F(P \times Q, z) = F(P, z)F(Q, z)$

Problema 6. a) Calcule de manera inmediata la función de Moebius de la retícula de subconjuntos de un conjunto (hay que usar que esta retícula es un producto de retículas).

b) De una demostración alternativa, dibujando los diagramas de Hasse, utilizando inducción y el teorema del binomio, recordando que el diagrama de Hasse es un hipercubo.

c) Dibuje el diagrama de Hasse de particiones por intervalos en el círculo para $n = 1, 2, 3, 4$. Cómo se relacionan éstas con la retícula de particiones por intervalos en la recta?

d) Calcule la función de Moebius para la retícula de intervalos en el círculo (similar a b), usando inducción).