TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL

MODELOS ESTOCÁSTICOS I

1. Teorema del Límite Central

Consideremos una sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ de variables aleatorias independientes identicamente distribuidas y con momentos finitos.

Es de interés conocer los momentos de la suma normalizada de estas variables,

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left(\left(\frac{a_1+a_2+...+a_N}{\sqrt{N}}\right)^n\right).$$

Primero veamos que podemos decir de los momentos para N fija. Para esto sea n un entero positivo. Dado que $\mathbb{E}$ es lineal se tiene

$$\mathbb{E}((a_1+...a_N)^n) = \sum_{1\le r_1,...,r_n\le N} \mathbb{E}\left(a_{r_1}a_{r_2}...a_{r_n}\right).$$

Ahora, notemos que como los a_i tienen la misma distribucion y son independientes entre sí, se tiene la igualdad

$$\mathbb{E}(a_{r(1)}...a_{r(n)}) = \mathbb{E}(a_{p(1)}...a_{p(n)})$$

siempre que

$$r(i)=r(j) \iff p(i)=p(j) \qquad \forall i,j$$

Esto quiere decir que el valor de $\mathbb{E}(a_{r(1)}...a_{r(n)})$ depende solamente de que indices son iguales en la n-tupla $(r(1),...,r(n))$.

Así, toda la informacion sobre se puede ”codificar” mediante una particion $\pi=\{V_1,V_2,...,V_s\}$ de la siguiente forma. Dos números p y q pertenecen al mismo bloque si $r(p)=r(q)$ y en este caso usamos la notación $(r(1),...r(n))$. Entonces podemos asociar una particion a cada n-tupla y reescribir la suma como

$$\mathbb{E}\left((a_1+...a_N)^n\right) = \sum_{\substack{\pi \text{ particion} \\ \text{de } \{1,...,n\}}} \mathbb{E}_\pi A_\pi^N$$

donde

$$A_\pi^N := \#\{(r(1),...r(n)) \to \pi \mid 1\le r(i)\le n\}.$$

y $\mathbb{E}_\pi$ es el valor comn de los indices asociados a π.

Ahora queremos ver como se comporta A_π^N. cuando $N\to\infty$ Veremos que la mayoría de los términos no tendran contribución importante en la suma y entonces cuando $N\to\infty$ se anularan. Sea $\pi=\{V_1,V_2...V_s\}$ una particion del conjunto $\{1,...n\}$. No es dificil ver (para cualquier tipo de

Date: August 21, 2018.

independencia) que si una particion tiene un bloque con un sólo elemento $r(i)$ entonces se tiene la factorización

$$\mathbb{E}(a_{r(1)}...a_{r(n)}) = \mathbb{E}(a_{r(i)})\mathbb{E}(a_{r(1)}...a_{r(n)}).$$

y dado que nuestras variables aleatorias cumplen $\mathbb{E}(a_{r(1)}) = 0$

$$\mathbb{E}_\pi = 0$$

Esto dice que si $\mathbb{E}_\pi \neq 0$ el número de bloques, que denotamos por $|\pi|$, debe ser menor o igual que $n/2$ pues cada bloque tiene al menos dos elementos.

Por otra parte dada un partición fija queremos conoce el número de formas de asociar a cada bloque un índice diferente. Esto se puede hacer de $N(N-1)...(N-|\pi|+1)$ formas, que crece asintóticamente como $N^{|\pi|}$.

De lo anterior se concluye que

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{(a_1 + ...a_N)^n}{\sqrt{N}}\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{|\pi|<n/2} \frac{A_\pi^N}{N^{n/2}} k_\pi = \lim_{N\to\infty} \sum_{|\pi|<n/2} N^{|\pi|-n/2} k_\pi$$

pero asintóticamente $N^{|\pi|-n/2} \to 0$ si $|\pi| < n/2$. Así, las unicas particiones que van a tener una aportación no negligible en la suma son las que sólo tienen bloques de tamaño 2, es decir, la particiones por pares. Eso es,

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{(a_1 + ...a_N)^n}{\sqrt{N}}\right) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{\pi \text{ partición por} \\ \text{pares de } \{1,...,n\}}} N^{|\pi|-n/2} k_\pi \\ &= \sum_{\substack{\pi \text{ partición por} \\ \text{pares de } \{1,...,n\}}} k_\pi\end{aligned}$$

En particular de este fórmula se sigue que los momentos impares son cero y para los casos pares tenemos que

$$\mathbb{E}_\pi = \mathbb{E}(a_{r(1)}...a_{r(2n)}) = \mathbb{E}(a_{r(i_1)}a_{r(i_1)})...\mathbb{E}(a_{r(i_n)}a_{r(i_n)}) = \sigma^{2n}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{(a_1 + ...a_N)^{2n}}{\sqrt{N}}\right) &= \sum_{\substack{\pi \text{ partición por} \\ \text{pares de } \{1,...,n\}}} \mathbb{E}_\pi = \sum_{\substack{\pi \text{ partición por} \\ \text{pares de } \{1,...,n\}}} \sigma^{2n} \\ &= \sigma^n(\# \text{ de particiones por pares de de } \{1,...,2n\}) \\ &= \sigma^{2n}\frac{(2n)!}{2^n n!} \\ &= 1(3)(5)\ldots(2n-1)\end{aligned}$$

De donde se sigue el Teorema de Límite Central

Teorema 1. *Sea $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas, con media 0 y varianza σ^2. Entonces*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left(\left(\frac{a_1 + \ldots + a_N}{\sqrt{N}}\right)^m\right) = \begin{cases} \sigma^{2n}\frac{(2n)!}{2^n n!}, & \textit{si } m = 2n, \\ 0, & \textit{en otro caso.}\end{cases}$$