Un poco de convergencia abrupta y de procesos de ramificación con interacciones.

Juan Carlos Pardo

CIMAT, Guanajuato

March 11, 2021

Lineas de investigación

Mis lineas de investigación son las siguientes

- Procesos de Markov
- Procesos de Lévy y caminatas aleatorias
- Procesos autosimilares
- Estructuras ramificantes
- Análisis estocástico

Proyectos en los que he estado trabajando recientemente

- Convergencia abrupta (G. Barrera y M. Högele)
- Procesos estables (A. Kyprianou)
- Coalescente de Bolthausen-Sznitman (G. Kersting y A. Siri-Jégousse)
- Procesos de ramificación en medios aleatorios (N. Cardona y S. Palau)
- Procesos de ramificación con interacciones (G. Berzuna, A. González-Casanova y G. Kersting)
- Teoría de Aubry-Mather estocástica (C. González y R. Iturriaga)
- Tiempos de ocupación de procesos de Markov (J. Najnudel y Ju-Yi Yen)
- Árboles aleatorios (S. Harris, S. Johnston y S. Palau)
- Procesos growth-fragmentations multitipo (W. Da Silva)

Convergencia abrupta

La motivación de este proyecto viene del siguiente fenómeno.

Convergencia abrupta

La motivación de este proyecto viene del siguiente fenómeno.

Imaginemos que tenemos un mazo de cartas nuevo y lo queremos barajar hasta que lo consideremos aleatorio.

Convergencia abrupta

La motivación de este proyecto viene del siguiente fenómeno.

Imaginemos que tenemos un mazo de cartas nuevo y lo queremos barajar hasta que lo consideremos aleatorio. Una pregunta natural es ¿cuantas veces debo hacerlo?

Convergencia abrupta

La motivación de este proyecto viene del siguiente fenómeno.

Imaginemos que tenemos un mazo de cartas nuevo y lo queremos barajar hasta que lo consideremos aleatorio. Una pregunta natural es ¿cuantas veces debo hacerlo?

Imaginemos que tenemos una distribución objetivo μ y una distancia d entre μ y la distribución del mazo después de barajarlo n-veces.

Convergencia abrupta

La motivación de este proyecto viene del siguiente fenómeno.

Imaginemos que tenemos un mazo de cartas nuevo y lo queremos barajar hasta que lo consideremos aleatorio. Una pregunta natural es ¿cuantas veces debo hacerlo?

Imaginemos que tenemos una distribución objetivo μ y una distancia d entre μ y la distribución del mazo después de barajarlo n-veces.

Si barajamos 5 veces, tenemos $d(5) = 0.92$. Sí continuamos y barajamos 6 veces, $d(6) = 0.614$. Si continuamos y lo hacemos 7 veces, $d(7) = 0.33$ y para 8 barajadas, tenemos $d(8) = 0.167$.

Convergencia abrupta

La motivación de este proyecto viene del siguiente fenómeno.

Imaginemos que tenemos un mazo de cartas nuevo y lo queremos barajar hasta que lo consideremos aleatorio. Una pregunta natural es ¿cuantas veces debo hacerlo?

Imaginemos que tenemos una distribución objetivo μ y una distancia d entre μ y la distribución del mazo después de barajarlo n-veces.

Si barajamos 5 veces, tenemos $d(5) = 0.92$. Sí continuamos y barajamos 6 veces, $d(6) = 0.614$. Si continuamos y lo hacemos 7 veces, $d(7) = 0.33$ y para 8 barajadas, tenemos $d(8) = 0.167$.

Entre 6 y 7 barajadas son suficientes para obtener nuestro objetivo.

Observamos un comportamiento interesante y es el siguiente:

.

Observamos un comportamiento interesante y es el siguiente: antes de 6 estamos muy lejos de la distribución objetivo y después de 7 muy cerca de ella.

Observamos un comportamiento interesante y es el siguiente: antes de 6 estamos muy lejos de la distribución objetivo y después de 7 muy cerca de ella.

A este fenómeno se le conoce como cutoff

Observamos un comportamiento interesante y es el siguiente: antes de 6 estamos muy lejos de la distribución objetivo y después de 7 muy cerca de ella.

A este fenómeno se le conoce como cutoff

El fenómeno del cutoff describe la propiedad de la convergencia abrupta hacia el equilibrio de ciertos procesos de Markov ergódicos.

Observamos un comportamiento interesante y es el siguiente: antes de 6 estamos muy lejos de la distribución objetivo y después de 7 muy cerca de ella.

A este fenómeno se le conoce como cutoff

El fenómeno del cutoff describe la propiedad de la convergencia abrupta hacia el equilibrio de ciertos procesos de Markov ergódicos.

Antes del llamado instante de cutoff , dichos procesos están muy lejos del equilibrio con respecto a alguna distancia (por ejemplo variación total). Después del instante de cutoff, dicha distancia converge exponencialmente rápido.

Observamos un comportamiento interesante y es el siguiente: antes de 6 estamos muy lejos de la distribución objetivo y después de 7 muy cerca de ella.

A este fenómeno se le conoce como cutoff

El fenómeno del cutoff describe la propiedad de la convergencia abrupta hacia el equilibrio de ciertos procesos de Markov ergódicos.

Antes del llamado instante de cutoff , dichos procesos están muy lejos del equilibrio con respecto a alguna distancia (por ejemplo variación total). Después del instante de cutoff, dicha distancia converge exponencialmente rápido.

Este fenómeno ha sido investigado ampliamente en años muy recientes y fue introducido por Aldous y Diaconis en los años ochenta para describir el fenómeno de la convergencia abrupta para cadenas de Markov asociadas a modelos de barajados de cartas (caminatas aleatorias en el grupo de permutaciones).

Consideremos a la siguiente familia de procesos estocásticos en tiempo continuo $(X^{(\epsilon)}, \epsilon > 0)$, donde cada $X^{(\epsilon)} := (X_t^{(\epsilon)}, t \geq 0)$ converge a una distribución invariante $\mu^{(\epsilon)}$.

Consideremos a la siguiente familia de procesos estocásticos en tiempo continuo $(X^{(\epsilon)}, \epsilon > 0)$, donde cada $X^{(\epsilon)} := (X_t^{(\epsilon)}, t \geq 0)$ converge a una distribución invariante $\mu^{(\epsilon)}$.

Vamos a denotar por $d^{(\epsilon)}(t)$ a la distancia entre la distribución de $X_t^{(\epsilon)}$ y $\mu^{(\epsilon)}$.

Consideremos a la siguiente familia de procesos estocásticos en tiempo continuo $(X^{(\epsilon)}, \epsilon > 0)$, donde cada $X^{(\epsilon)} := (X_t^{(\epsilon)}, t \geq 0)$ converge a una distribución invariante $\mu^{(\epsilon)}$.

Vamos a denotar por $d^{(\epsilon)}(t)$ a la distancia entre la distribución de $X_t^{(\epsilon)}$ y $\mu^{(\epsilon)}$.

Consideremos a la siguiente familia de procesos estocásticos en tiempo continuo $(X^{(\epsilon)}, \epsilon > 0)$, donde cada $X^{(\epsilon)} := (X_t^{(\epsilon)}, t \geq 0)$ converge a una distribución invariante $\mu^{(\epsilon)}$.

Vamos a denotar por $d^{(\epsilon)}(t)$ a la distancia entre la distribución de $X_t^{(\epsilon)}$ y $\mu^{(\epsilon)}$.

La distancia puede ser cualquier distancia entre distribuciones como: variación total, Hellinger, entropía relativa, Wasserstein, distancia L^p, etc.

Consideremos a la siguiente familia de procesos estocásticos en tiempo continuo $(X^{(\epsilon)}, \epsilon > 0)$, donde cada $X^{(\epsilon)} := (X_t^{(\epsilon)}, t \geq 0)$ converge a una distribución invariante $\mu^{(\epsilon)}$.

Vamos a denotar por $d^{(\epsilon)}(t)$ a la distancia entre la distribución de $X_t^{(\epsilon)}$ y $\mu^{(\epsilon)}$.

La distancia puede ser cualquier distancia entre distribuciones como: variación total, Hellinger, entropía relativa, Wasserstein, distancia L^p, etc.

El fenómeno de cutoff de $(X^{(\epsilon)}, \epsilon > 0)$ se puede expresar en tres niveles: tiempo de cutoff, cutoff de ventana y perfil de cutoff.

Definición (Tiempo de cutoff)

La familia $(X^{(\epsilon)}, \epsilon > 0)$ tiene cutoff en los tiempos $(t_\epsilon, \epsilon > 0)$ si t_ϵ va a $+\infty$ cuando ϵ se va a 0 y

$$\lim_{\epsilon \to 0} d^{(\epsilon)}(ct_\epsilon) = \begin{cases} M & \text{si} \quad 0 < c < 1, \\ 0 & \text{si} \quad c > 1. \end{cases}$$

Definición (Tiempo de cutoff)

La familia $(X^{(\epsilon)}, \epsilon > 0)$ tiene cutoff en los tiempos $(t_\epsilon, \epsilon > 0)$ si t_ϵ va a $+\infty$ cuando ϵ se va a 0 y

$$\lim_{\epsilon \to 0} d^{(\epsilon)}(ct_\epsilon) = \begin{cases} M & \text{si} \quad 0 < c < 1, \\ 0 & \text{si} \quad c > 1. \end{cases}$$

Definición (Cutoff de ventana)

La familia $(X^{(\epsilon)}, \epsilon > 0)$ tiene cutoff de ventana en $\{(t_\epsilon, w_\epsilon), \epsilon > 0\}$, si t_ϵ se va a $+\infty$ cuando ϵ se va a cero 0, $w_\epsilon = o(t_\epsilon)$ y

$$\lim_{c \to -\infty} \liminf_{\epsilon \to 0} d^{(\epsilon)}(t_\epsilon + cw_\epsilon) = M, \qquad \lim_{c \to +\infty} \limsup_{\epsilon \to 0} d^{(\epsilon)}(t_\epsilon + cw_\epsilon) = 0.$$

Definition (Perfil de cutoff)

La familia $(X^{(\epsilon)}, \epsilon > 0)$ tiene perfil de cutoff en $\{(t_\epsilon, w_\epsilon), \epsilon > 0\}$ con perfil G, si t_ϵ se va a $+\infty$ cuando ϵ se va a cero 0, $w_\epsilon = o(t_\epsilon)$ y

$$G(c) := \lim_{\epsilon \to 0} d^{(\epsilon)}(t_\epsilon + c w_\epsilon)$$

existe para toda $c \in \mathbb{R}$ y

$$\lim_{c \to -\infty} G(c) = M, \qquad \lim_{c \to +\infty} G(c) = 0.$$

Definition (Perfil de cutoff)

La familia $(X^{(\epsilon)}, \epsilon > 0)$ tiene perfil de cutoff en $\{(t_\epsilon, w_\epsilon), \epsilon > 0\}$ con perfil G, si t_ϵ se va a $+\infty$ cuando ϵ se va a cero 0, $w_\epsilon = o(t_\epsilon)$ y

$$G(c) := \lim_{\epsilon \to 0} d^{(\epsilon)}(t_\epsilon + c w_\epsilon)$$

existe para toda $c \in \mathbb{R}$ y

$$\lim_{c \to -\infty} G(c) = M, \qquad \lim_{c \to +\infty} G(c) = 0.$$

Imaginemos que deseamos muestrear una distribución de probabilidad por un método de MCMC usando una cadena de Markov ergódica que tiene a dicha distribución como su distribución de equilibrio.

Normalmente, no es muy complicado construir a dicha cadena de Markov con las propiedades deseadas.

Normalmente, no es muy complicado construir a dicha cadena de Markov con las propiedades deseadas.

El problema complicado es determinar cuantos pasos son necesarios para que la cadena converja a la distribución estacionaria con un error digamos aceptable.

Normalmente, no es muy complicado construir a dicha cadena de Markov con las propiedades deseadas.

El problema complicado es determinar cuantos pasos son necesarios para que la cadena converja a la distribución estacionaria con un error digamos aceptable.

El fenómeno de cutoff implica que existe un tiempo asintóticamente optimo, el cual denotamos por T_ϵ, el cual es asintóticamente equivalente al tiempo de cutoff t_ϵ.

Normalmente, no es muy complicado construir a dicha cadena de Markov con las propiedades deseadas.

El problema complicado es determinar cuantos pasos son necesarios para que la cadena converja a la distribución estacionaria con un error digamos aceptable.

El fenómeno de cutoff implica que existe un tiempo asintóticamente optimo, el cual denotamos por T_ϵ, el cual es asintóticamente equivalente al tiempo de cutoff t_ϵ. Además, si tenemos un tiempo de cutoff t_ϵ con ventana de tamaño w_ϵ, entonces el tiempo optimo T_ϵ debería satisfacer $|T_\epsilon - t_\epsilon| = \mathcal{O}(w_\epsilon)$ conforme ϵ se va a 0.

Normalmente, no es muy complicado construir a dicha cadena de Markov con las propiedades deseadas.

El problema complicado es determinar cuantos pasos son necesarios para que la cadena converja a la distribución estacionaria con un error digamos aceptable.

El fenómeno de cutoff implica que existe un tiempo asintóticamente optimo, el cual denotamos por T_ϵ, el cual es asintóticamente equivalente al tiempo de cutoff t_ϵ. Además, si tenemos un tiempo de cutoff t_ϵ con ventana de tamaño w_ϵ, entonces el tiempo optimo T_ϵ debería satisfacer $|T_\epsilon - t_\epsilon| = \mathcal{O}(w_\epsilon)$ conforme ϵ se va a 0.

Un punto crucial es que si tenemos cutoff estas relaciones se satisfacen para cualquier tamaño de error fijo el cual consideremos admisible, si no tenemos cutoff el tiempo asintóticamente optimo T_ϵ depende fuertemente del tamaño del error admisible.

Con G. Barrera y M. Högele hemos estudiado el fenómeno de cutoff para sistemas dinámicos perturbados por un ruido aleatorio dirigido por un proceso de Lévy y donde el sistema dinámico tiene un punto estable.

Con G. Barrera y M. Högele hemos estudiado el fenómeno de cutoff para sistemas dinámicos perturbados por un ruido aleatorio dirigido por un proceso de Lévy y donde el sistema dinámico tiene un punto estable.

Me gustaría estudiar algún caso de cadenas de Markov a tiempo continuo y ver si hay otras aplicaciones del cutoff que sean interesantes.

Con G. Barrera y M. Högele hemos estudiado el fenómeno de cutoff para sistemas dinámicos perturbados por un ruido aleatorio dirigido por un proceso de Lévy y donde el sistema dinámico tiene un punto estable.

Me gustaría estudiar algún caso de cadenas de Markov a tiempo continuo y ver si hay otras aplicaciones del cutoff que sean interesantes.

Comentarios ...

Proceso de ramificación con interacciones por pares.

Es un modelo de dinámica de poblaciones donde los individuos:

1) Se reproducen y mueren como en el proceso de BGW, i.e. un individuo

Proceso de ramificación con interacciones por pares.

Es un modelo de dinámica de poblaciones donde los individuos:

1) Se reproducen y mueren como en el proceso de BGW, i.e. un individuo
   - muere con tasa $d \geq 0$,

Proceso de ramificación con interacciones por pares.

Es un modelo de dinámica de poblaciones donde los individuos:

1) Se reproducen y mueren como en el proceso de BGW, i.e. un individuo
   - muere con tasa $d \geq 0$,
   - produce i nuevos individuos con tasa $\pi_i \geq 0$, for $i \in \mathbb{N}$.

Proceso de ramificación con interacciones por pares.

Es un modelo de dinámica de poblaciones donde los individuos:

1) Se reproducen y mueren como en el proceso de BGW, i.e. un individuo
   - muere con tasa $d \geq 0$,
   - produce i nuevos individuos con tasa $\pi_i \geq 0$, for $i \in \mathbb{N}$.

2) Cada pareja de individuos es seleccionada e interactua,

Proceso de ramificación con interacciones por pares.

Es un modelo de dinámica de poblaciones donde los individuos:

1) Se reproducen y mueren como en el proceso de BGW, i.e. un individuo
- muere con tasa $d \geq 0$,
- produce i nuevos individuos con tasa $\pi_i \geq 0$, for $i \in \mathbb{N}$.

2) Cada pareja de individuos es seleccionada e interactua,
- con tasa fija $c \geq 0$ y como resultado de dicha interacción un individuo muere (competición),

Proceso de ramificación con interacciones por pares.

Es un modelo de dinámica de poblaciones donde los individuos:

1) Se reproducen y mueren como en el proceso de BGW, i.e. un individuo
- muere con tasa $d \geq 0$,
- produce i nuevos individuos con tasa $\pi_i \geq 0$, for $i \in \mathbb{N}$.

2) Cada pareja de individuos es seleccionada e interactua,
- con tasa fija $c \geq 0$ y como resultado de dicha interacción un individuo muere (competición),
- produce i nuevos individuos con tasa $b_i \geq 0$, para $i \in \mathbb{N}$ (cooperación).

El proceso de ramificación con interacciones por pares (PRIP) $Z = (Z_t, t \geq 0)$ con parámetros d, c, a, b_i, π_i, para $i \geq 1$, tal que

$$\rho := \sum \pi_i < \infty \qquad \text{y} \qquad b := \sum b_i < \infty,$$

es una cadena de Markov a tiempo continuo con valores en $\overline{\mathbb{N}}$ y generador infinitesimal

El proceso de ramificación con interacciones por pares (PRIP) $Z = (Z_t, t \geq 0)$ con parámetros d, c, a, b_i, π_i, para $i \geq 1$, tal que

$$\rho := \sum \pi_i < \infty \qquad \text{y} \qquad b := \sum b_i < \infty,$$

es una cadena de Markov a tiempo continuo con valores en $\overline{\mathbb{N}}$ y generador infinitesimal

$$q_{i,j} = \begin{cases} i\pi_{j-i} + i(i-1)b_{j-i}, & \text{si } i \geq 1 \text{ y} j > i, \\ di + i(i-1)c & \text{si } i \geq 1 \text{ y } j = i-1, \\ -i(d+1) - i(i-1)(b+c) & \text{si } i \geq 1 \text{ y } j = i, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El proceso de ramificación con interacciones por pares (PRIP) $Z = (Z_t, t \geq 0)$ con parámetros d, c, a, b_i, π_i, para $i \geq 1$, tal que

$$\rho := \sum \pi_i < \infty \qquad \text{y} \qquad b := \sum b_i < \infty,$$

es una cadena de Markov a tiempo continuo con valores en $\overline{\mathbb{N}}$ y generador infinitesimal

$$q_{i,j} = \begin{cases} i\pi_{j-i} + i(i-1)b_{j-i}, & \text{si } i \geq 1 \text{ y} j > i, \\ di + i(i-1)c & \text{si } i \geq 1 \text{ y } j = i-1, \\ -i(d+1) - i(i-1)(b+c) & \text{si } i \geq 1 \text{ y } j = i, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El PRIP también se puede entender como el proceso que cuenta partículas que se unen o se fragmentan de forma independiente (ramificación) o por colisiones por parejas, i.e.

- dos partículas se unen con tasa $2c$,

- dos partículas se unen con tasa $2c$,
- una partícula se fragmenta de manera independiente en un número aleatorio $k \geq 2$ de subcomponentes con tasa π_k,

- dos partículas se unen con tasa $2c$,
- una partícula se fragmenta de manera independiente en un número aleatorio $k \geq 2$ de subcomponentes con tasa π_k,
- dos partículas se fragmenta al colisionar en un número aleatorio $k \geq 3$ de subcomponentes con tasa b_k,

- dos partículas se unen con tasa $2c$,
- una partícula se fragmenta de manera independiente en un número aleatorio $k \geq 2$ de subcomponentes con tasa π_k,
- dos partículas se fragmenta al colisionar en un número aleatorio $k \geq 3$ de subcomponentes con tasa b_k,
- y también pueden desaparecer de manera espontánea con tasa d.

- dos partículas se unen con tasa $2c$,
- una partícula se fragmenta de manera independiente en un número aleatorio $k \geq 2$ de subcomponentes con tasa π_k,
- dos partículas se fragmenta al colisionar en un número aleatorio $k \geq 3$ de subcomponentes con tasa b_k,
- y también pueden desaparecer de manera espontánea con tasa d.

- dos partículas se unen con tasa $2c$,
- una partícula se fragmenta de manera independiente en un número aleatorio $k \geq 2$ de subcomponentes con tasa π_k,
- dos partículas se fragmenta al colisionar en un número aleatorio $k \geq 3$ de subcomponentes con tasa b_k,
- y también pueden desaparecer de manera espontánea con tasa d.

Bajo la condición

$$\varsigma := -c + \sum_{i \geq 1} i b_i \leq 0,$$

en conjunto con G. Berzunza, obtuvimos condiciones necesarias y suficientes para que el proceso no explote con probabilidad positiva. Además estudiamos la extinción del modelo, la existencia de una medida estacionaria y la propiedad de que el modelo baje del infinito.

Los argumentos que usamos para estudiar estos eventos usan un cambio de tiempo aleatorio y la propiedad de dualidad de momentos i.e. existe un proceso estocástico $U = (U_t, t \geq 0)$ definido en $[0,1]$, y con ley $(\mathbb{Q}_u, u \in [0,1])$ tal que

$$\mathbb{E}_z\left[u^{Z_t}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_u}\left[U_t^z\right], \quad \text{para toda } t \geq 0, \ z \in \mathbb{N} \text{ y } u \in [0,1].$$

Los argumentos que usamos para estudiar estos eventos usan un cambio de tiempo aleatorio y la propiedad de dualidad de momentos i.e. existe un proceso estocástico $U = (U_t, t \geq 0)$ definido en $[0,1]$, y con ley $(\mathbb{Q}_u, u \in [0,1])$ tal que

$$\mathbb{E}_z\left[u^{Z_t}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_u}\left[U_t^z\right], \quad \text{para toda } \; t \geq 0, \;\; z \in \mathbb{N} \; \text{ y } \; u \in [0,1].$$

Desafortunadamente estas técnicas no funciona para el caso

$$\varsigma := -c + \sum_{i \geq 1} i b_i > 0.$$

¿ Que podemos decir en este caso?

Los argumentos que usamos para estudiar estos eventos usan un cambio de tiempo aleatorio y la propiedad de dualidad de momentos i.e. existe un proceso estocástico $U = (U_t, t \geq 0)$ definido en $[0,1]$, y con ley $(\mathbb{Q}_u, u \in [0,1])$ tal que

$$\mathbb{E}_z\left[u^{Z_t}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_u}\left[U_t^z\right], \quad \text{para toda } t \geq 0, \ z \in \mathbb{N} \text{ y } u \in [0,1].$$

Desafortunadamente estas técnicas no funciona para el caso

$$\varsigma := -c + \sum_{i \geq 1} i b_i > 0.$$

¿ Que podemos decir en este caso?

En el caso en que el proceso tiene distribución estacionaria y $\varsigma \leq 0$ ¿cuando la cadena es ergódica o exponencialmente ergódica? ¿ tiene cutoff?

En el caso $\varsigma \leq 0$ ¿podemos construir al proceso de fragmentación y coalescencia asociado? ¿que propiedades tiene este proceso?

En el caso $\varsigma \leq 0$ ¿podemos construir al proceso de fragmentación y coalescencia asociado? ¿que propiedades tiene este proceso?

Comentarios ...

En el caso $\varsigma \leq 0$ ¿podemos construir al proceso de fragmentación y coalescencia asociado? ¿que propiedades tiene este proceso?

Comentarios ...

Muchas gracias por su atención