

Algunos Problemas de Gráficas y Matrices Aleatorias

Octavio Arizmendi Echegaray

Seminario de Charlas Cortas
25 de marzo de 2020

Probabilidad No Conmutativa.

- Probabilidad Libre.
- Cumulantes.
- Combinatoria Enumerativa (Particiones)
- Teoremas Límite y Divisibilidad Infinita en PNC
- Aplicaciones a Matrices Aleatorias

Gráficas.

- Teoría Espectral.
- Gráficas Aleatorias.
- Índices Topológicos en Gráficas.

- Tasa de convergencia en TLC No Conmutativo (Berry-Esseen) (M. Salazar. D Perales)
- Energía de Gráficas y Vertices (O. Juarez, G. Arizmendi, M. Ramirez, B. Luna)
- Matrices Aleatorias. Fluctuaciones (Mingo), Deconvolución(Tarrago Vargas). Operadores Compactos (A. Celestino)
- Propiedades de Lévy Libres (Hasebe).
- Cruces en Gráficas Aleatorias (C. Huemer, P.Cano, S. Arenas)

Ejemplo 1

Sean $A, B \in M_n$, matrices autoadjuntas de tamaño n , con n par.
Si A, B tienen eigenvalores $\{1, -1\}$ con multiplicidad $n/2$.

- Pregunta: Cuáles son los eigenvalores de $A + B$?

Ejemplo 1

Sean $A, B \in M_n$, matrices autoadjuntas de tamaño n , con n par.
Si A, B tienen eigenvalores $\{1, -1\}$ con multiplicidad $n/2$.

- Pregunta: Cuáles son los eigenvalores de $A + B$?
- Respuesta: Depende de la "posición" que tengan.

Ejemplo 1

Sean $A, B \in M_n$, matrices autoadjuntas de tamaño n , con n par.
Si A, B tienen eigenvalores $\{1, -1\}$ con multiplicidad $n/2$.

- Pregunta: Cuáles son los eigenvalores de $A + B$?
- Caso $n = 2$

Ejemplo 1

Sean $A, B \in M_n$, matrices autoadjuntas de tamaño n , con n par.
Si A, B tienen eigenvalores $\{1, -1\}$ con multiplicidad $n/2$.

- Pregunta: Cuáles son los eigenvalores de $A + B$?
- Caso $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Respuesta= $\{2, -2\}$

Ejemplo 1

Sean $A, B \in M_n$, matrices autoadjuntas de tamaño n , con n par.
Si A, B tienen eigenvalores $\{1, -1\}$ con multiplicidad $n/2$.

- Pregunta: Cuáles son los eigenvalores de $A + B$?
- Caso $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Respuesta= $\{0\}$

Ejemplo 1

Sean $A, B \in M_n$, matrices autoadjuntas de tamaño n , con n par.
Si A, B tienen eigenvalores $\{1, -1\}$ con multiplicidad $n/2$.

- Pregunta: Cuáles son los eigenvalores de $A + B$?
- Caso $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Respuesta = $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

Ejemplo 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \cos^2(t) - \sin^2(t) & -2\sin(t)\cos(t) \\ 2\sin(t)\cos(t) & \sin^2(t) - \cos^2(t) \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} \cos^2(t) - \sin^2(t) + 1 & -2\sin(t)\cos(t) \\ 2\sin(t)\cos(t) & \sin^2(t) - \cos^2(t) - 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Respuesta} = \{-\sqrt{2\cos(2t) + 2}, \sqrt{2\cos(2t) + 2}\}$$

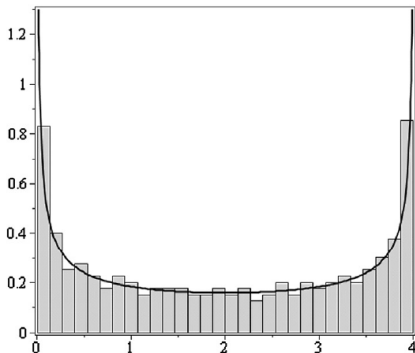
Ejemplo 1

Más generalmente, consideremos una rotación unitaria aleatoria.

- $A = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$
- $B = UAU^*$
- U es un unitario escogido con la medida de Haar en el grupo unitario $U(n)$.
- $A + B$ es una matriz aleatoria y su espectro es aleatorio.

Ejemplo 1

Más generalmente, consideremos una rotación unitaria aleatoria. Sin embargo $A + UAU^*$ se ve así, para n grande, con alta probabilidad.



$$\frac{1}{\pi\sqrt{4-t^2}} \quad |t| < 2.$$

Transformadas de Cauchy

Si μ es una medida de probabilidad en \mathbb{R} , definimos la **transformada de Cauchy**:

$$G_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t} d\mu(t),$$

para $z \in \mathbb{C}^+$, es posible recuperar a la medida μ a partir de G_μ mediante la fórmula de inversión de Stieltjes:

$$-\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_a^b \operatorname{Im}(G_\mu(x + i\varepsilon)) dx = \mu((a, b)) + \frac{1}{2}\mu(\{a, b\}).$$

Propiedades:

- $G : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^-$,
- Es analítica en \mathbb{C}^+ ,
- Satisface el límite

$$\lim_{y \rightarrow \infty} iyG(iy) = 1.$$

Si μ_1 y μ_2 son medidas de probabilidad, y definimos G como sigue:

$$\left(\frac{1}{G(z)}\right)^{-1} = \frac{1}{(G_{\mu_1}(z))^{-1}} + \left(\frac{1}{G_{\mu_2}(z)}\right)^{-1} - z,$$

entonces G es la transformada de Cauchy de una medida de probabilidad, llamada la **convolución Libre** de μ_1 y μ_2 :

$$(\mu_1, \mu_2) \longmapsto \mu_1 \boxplus \mu_2.$$

- A partir de $A + B$, B recuperar A . (deconvolución)
- AB .
- Polinomios generales $P(A, B)$.
- A, B no autoadjuntos.

Ejemplo 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & w^{n-1} \end{pmatrix}$$

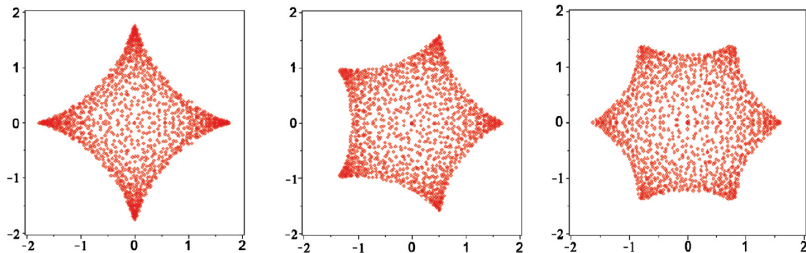


Fig. 10. Eigenvalues of a sum of two independent random permutation matrices of size 1200×1200 with cycles of length 4, 5 and 6.

No tenemos idea!

Un enfoque nuevo: EDP's

THE BROWN MEASURE OF THE FREE MULTIPLICATIVE BROWNIAN MOTION 1

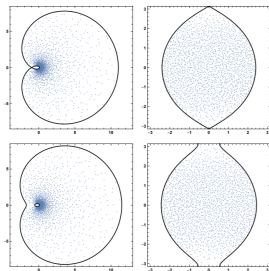


FIGURE 12. Simulation of the eigenvalues of B_t^N (left) and their logarithms (right) with $N = 2,000$ and $t = 4.1$. The distribution of points on the right-hand side of the figure is approximately constant in the horizontal direction

Bruce Driver, Brian Hall, Todd Kemp. The Brown Measure of the Free Multiplicative Brownian Motion.

Theorem 2.2. *For all $t > 0$, the Brown measure μ_{b_t} of b_t is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on the plane and supported in the domain $\overline{\Sigma}_t$. In Σ_t , the density W_t of μ_{b_t} with respect to the Lebesgue measure is strictly positive and real analytic, with the following form in polar coordinates:*

$$W_t(r, \theta) = \frac{1}{r^2} w_t(\theta) \quad (2.4)$$

for a certain even function w_t . This function may be computed as

$$w_t(\theta) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{t} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{2r_t(\theta) \sin \theta}{r_t(\theta)^2 + 1 - 2r_t(\theta) \cos \theta} \right) \quad (2.5)$$

where $r_t(\theta)$ is the larger of the two radii where the ray with angle θ intersects the boundary of Σ_t .

Idea: Encontrar una ecuación diferencial para los eigenvalores del proceso $A + U_t B U_t^*$.

- donde $U_t U_t^* = I$
- $U_0 = I$
- U_∞ es Haar.

ver tambien:

Fractional free convolution powers Dimitri Shlyakhtenko, Terence Tao. ArXiv:2009.01882

Probabilidad No Conmutativa

Definición

Un Espacio de Probabilidad No Conmutativo (EPNC) es un par (\mathcal{A}, τ) , donde \mathcal{A} es un álgebra (de operadores) con unidad $1_{\mathcal{A}}$ y τ es un funcional lineal tal que $\tau(1_{\mathcal{A}}) = 1$.

Definición

Un Espacio de Probabilidad No Conmutativo (EPNC) es un par (\mathcal{A}, τ) , donde \mathcal{A} es un álgebra (de operadores) con unidad $1_{\mathcal{A}}$ y τ es un funcional lineal tal que $\tau(1_{\mathcal{A}}) = 1$.

- **Variables Aleatorias:** Elementos de \mathcal{A} .
- **Esperanza:** τ .
- **Momentos:** Los momentos de $a \in \mathcal{A}$ son $\tau(a^k)$, $k \in \mathbb{N}$.
- **Distribución:** Para $a \in \mathcal{A}$ autoadjunto, μ_a tal que

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \mu_a(dx) = \tau(a^k), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Definición (Convergencia en momentos)

Sea $(\mathcal{A}_N, \phi_N)_{N \in \mathbb{N}}$ y (\mathcal{A}, ϕ) EPNC's y sean $a_N \in \mathcal{A}_N$ variables aleatorias, para cada $N \in \mathbb{N}$ y sea $a \in \mathcal{A}$. Decimos que a_N **converge en momentos** hacia a , cuando $N \rightarrow \infty$, si tenemos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \phi_N(a_N^n) = \phi(a^n), \quad \forall n$$

y lo denotamos por $a_N \rightarrow a$.

Ejemplo (1)

El par $(\mathcal{A}_1, \mathbb{E})$, donde

$$\mathcal{A}_1 := \{X + iY \mid X, Y \text{ son variables aleatorias reales acotadas}\}$$

$$\text{y } \mathbb{E}(X + iY) = \mathbb{E}(X) + i\mathbb{E}(Y).$$

Ejemplo (1)

El par $(\mathcal{A}_1, \mathbb{E})$, donde

$$\mathcal{A}_1 := \{X + iY \mid X, Y \text{ son variables aleatorias reales acotadas}\}$$

y $\mathbb{E}(X + iY) = \mathbb{E}(X) + i\mathbb{E}(Y)$.

Ejemplo (2)

El par $(\mathcal{M}_n, \text{tr})$, donde

$$\mathcal{M}_n := \{\text{Matrices de } n \times n\}$$

y, para una matriz $M \in \mathcal{M}_n$, tr denota la traza normalizada:

$$\text{tr}(M) = \frac{1}{n} \text{Trace}(M) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M_{ii}.$$

Ejemplo (2+1)

El par $(\mathcal{M}_n(A_1), tr \otimes E)$, donde

$$\mathcal{M}_n(A_1) := \{\text{Matrices de } n \times n \text{ sobre } A_1\}$$

y, para una matriz $M \in \mathcal{M}_n(A)$, $tr \otimes E$ está dado por

$$tr \otimes E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(M_{ii}).$$

Ejemplo (2')

El par (\mathcal{M}_n, ϕ_i) , donde

$$\mathcal{M}_n := \{\text{Matrices de } n \times n\}$$

y, para una matriz $M \in \mathcal{M}_n$, ϕ_i denota i -ésima entrada de la diagonal:

$$\phi_i(M) = M_{ii}.$$

Ejemplo (1)

Para $X = X^*$ y $(\mathcal{A}_1, \mathbb{E})$, la distribución de a está dada por

$$\mu(-\infty, t) = \mathbb{P}(X \leq t)$$

donde \mathbb{P} es la probabilidad implícita en la definición de \mathbb{E} .

Ejemplo (2)

Para $M = M^*$ en (\mathcal{M}_n, tr) ,

$$\mu_M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i},$$

donde λ_i es el i -ésimo valor propio de M .

Ejemplo (2')

Para $M = M^*$ en (\mathcal{M}_n, ϕ_j) ,

$$\mu_M = \sum_{i=1}^n p_{ij} \delta_{\lambda_i},$$

donde λ_i es el i -ésimo valor propio de M y $p_{ij} \geq 0$ son tales que $\sum_i p_{ij} = 1$. De hecho $p_{ij} = |u^{ij}|^2$, donde $U = (u_{ij})_{i,j}$ es la matriz ortogonal de eigenvectores.

Ejemplo (2+1)

Para $M = M^*$ en (\mathcal{M}_n, tr) ,

$$\mu_M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \delta_{\lambda_i(\omega)} dP(\omega),$$

where $\lambda_i(\omega)$ es el i -ésimo valor propio de $M(\omega)$.

μ_M se llama la **distribución espectral promedio** de M .

Nueva noción de independencia,

Definición (Voiculescu)

Sea (A, τ) un EPNC y sean A_1, A_2 subálgebras de A . Decimos que A_1 es libre de A_2 si para todos $a_i \in A_1$ $b_i \in A_2$ tales que $\tau(a_1) = 0 = \tau(b_i) = 0$ entonces

$$\tau(a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_n b_n) = 0.$$

Definición (Voiculescu)

Una familia de subálgebras $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ de \mathcal{A} se dice independiente en el sentido **libre** si para todos $a_1 \in \mathcal{A}_{i(1)}, \dots, a_n \in \mathcal{A}_{i(n)}$, se tiene

$$\phi(a_1 a_2 \dots a_n) = 0$$

siempre que $\phi(a_j) = 0$, $a_j \in \mathcal{A}_{i(j)}$, y $i(1) \neq i(2) \neq \dots \neq i(n)$.

Definición (Voiculescu)

Una familia de subálgebras $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ de \mathcal{A} se dice independiente en el sentido **libre** si para todos $a_1 \in \mathcal{A}_{i(1)}, \dots, a_n \in \mathcal{A}_{i(n)}$, se tiene

$$\phi(a_1 a_2 \dots a_n) = 0$$

siempre que $\phi(a_j) = 0$, $a_j \in \mathcal{A}_{i(j)}$, y $i(1) \neq i(2) \neq \dots \neq i(n)$.

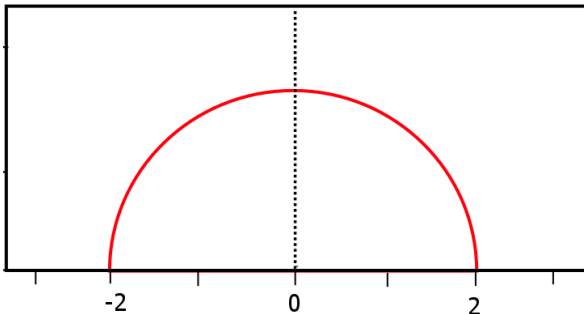
- Esta teoría es muy rica. Existen TLC, Medidas Estables, Procesos de Levy Libres, divisibilidad infinita libre, esperanza condicional etc.

Teorema (Voiculescu 85)

Sea (\mathcal{A}, ϕ) y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables autoadjuntas, idénticamente distribuidas y *libres* con media 0 y varianza 1.

Entonces

$$\frac{x_1 + \dots + x_N}{\sqrt{N}} \rightarrow S.$$



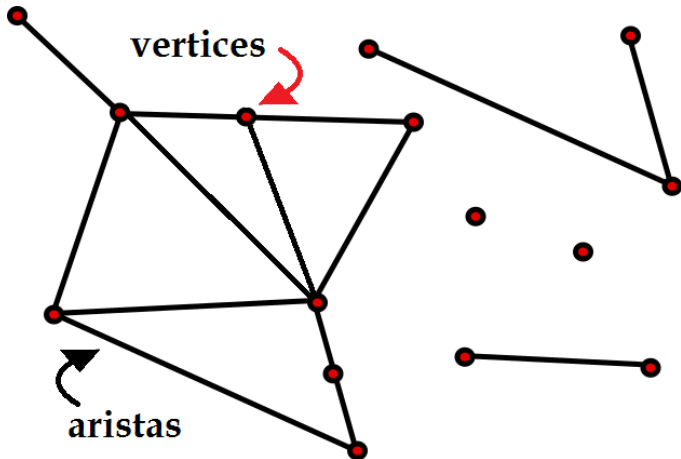
Observaciones:

- Muchas Matrices Aleatorias Conocidas son Asintóticamente Libres.
- Muchas Matrices Aleatorias NO son Asintóticamente Libres, pero casi.
- Existen otras nociones de independencia que sirven para: Fluctuaciones, outliers, productos de gráficas. Operadores Compactos.

Gráficas

¿Qué es una gráfica o grafo?

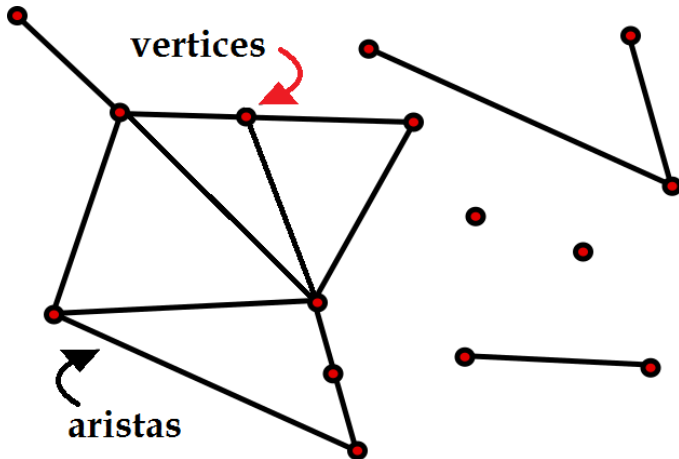
Una gráfica (o grafo o red) es un conjunto de puntos V , un conjunto de aristas E , que unen algunos de los puntos.



¿Qué es una gráfica o grafo?

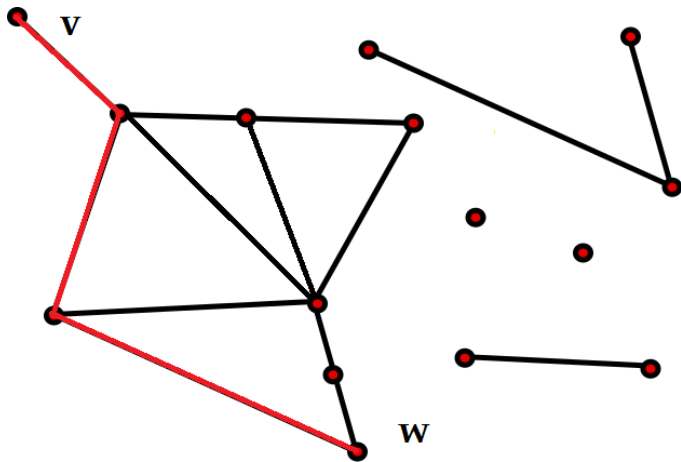
Gráfica simple no dirigida: un par (V, E) con

$$E \subset \{\{v, w\} \mid v, w \in V, v \neq w\}.$$



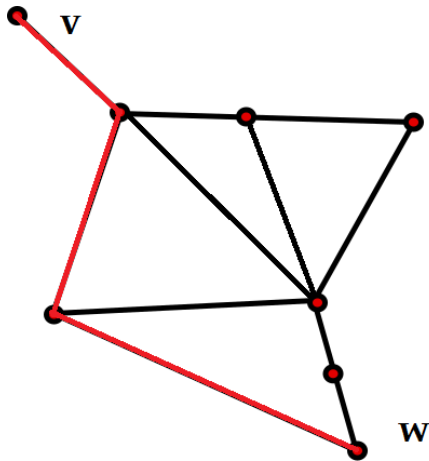
Definiciones: caminos, distancia

- Camino de v a w : $v = v_1 \sim v_2 \sim \dots \sim v_k = w$.
- Gráfica conexa: existe camino entre v y w , para todo v, w .
-
-



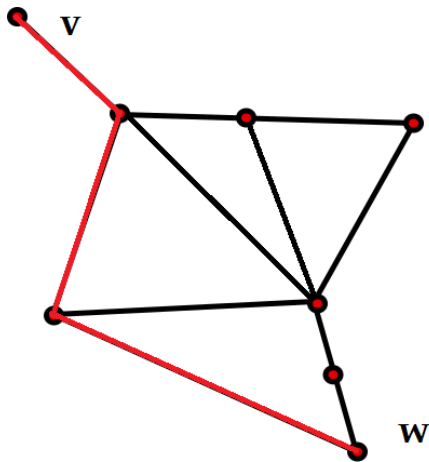
Definiciones: caminos, distancia

- Camino de v a w : $v = v_1 \sim v_2 \sim \dots \sim v_k = w$.
- Gráfica conexa: existe camino entre v y w , para todo v, w .
-
-



Definiciones: caminos, distancia

- Camino de v a w : $v = v_1 \sim v_2 \sim \dots \sim v_k = w$.
- Gráfica conexa: existe camino entre v y w , para todo v, w .
- Distancia entre v y w , $d(v, w)$: tamaño de camino mínimo.
- Diametro $D(G)$: distancia máxima: $\max_{(x,y)} d(x, y)$.

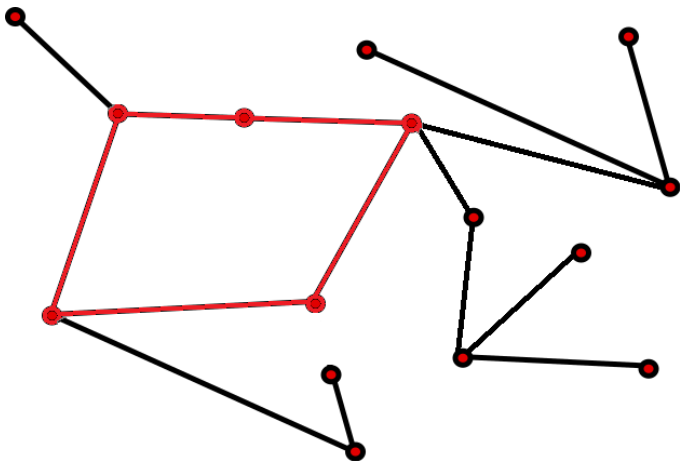


$$d(v, w) = 3$$

$$D(G) = 3$$

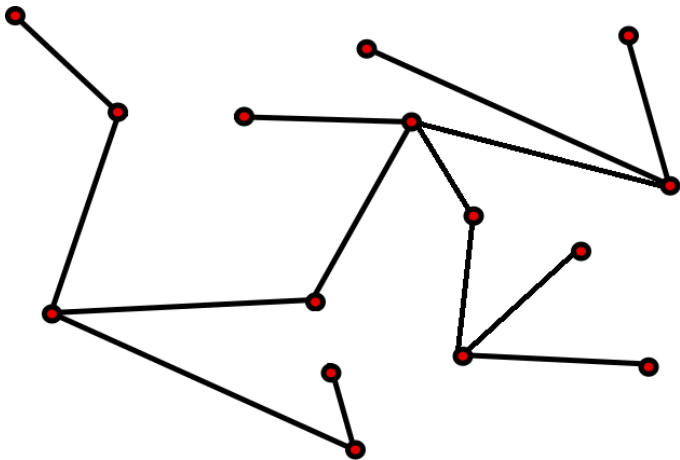
Definiciones: caminos, distancia

- Ciclo: $v_1 \sim v_2 \sim \dots \sim v_k = v_1$, $v_i \neq v_j$, $i, j < k$.
-
-



Definiciones: caminos, distancia

- Ciclo: $v_1 \sim v_2 \sim \dots \sim v_k = v_1$, $v_i \neq v_j$, $i, j < k$.
- Árbol: Gráfica conexa sin ciclos.

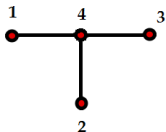


Teoría espectral de gráficas

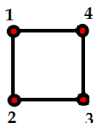
Teoría Espectral de Gráficas

Sea $G := (V, E)$ una gráfica con $|V| = n$ and $|E| = m$. La *matriz de adyacencia* $A = A(G) \in M_n$ de G se define por

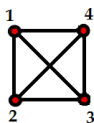
$$A_{v,w} = \begin{cases} 1 & \text{si } v \sim w \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los valores propios $\lambda_1 \geq \lambda_2 \cdots \geq \lambda_n$ se conocen como el espectro (de adyacencia) de G . El polinomio característico de G es el de A .

Observación: $A_{i,j}^k = \#$ caminos de tamaño k de i a j

- Los momentos de A tienen información combinatoria

$$\text{Tr}(A^k) = |\{(v_1, \dots, v_k) : v_1 = v_k \text{ and } v_i \sim v_{i+1} \in E\}|.$$

e información espectral

$$\text{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$$

Meta general: Traducir información espectral en información combinatoria o topológica (y vice versa.)

- $Tr(A^2) = 2m$.
- $Tr(A^3) = 6$ veces el número de triángulos.
- $Tr(A^4) = 2Z - 2m + 8Q$, con $Z = \sum d_i^2$ y Q número de 4 ciclos.
-

Definición (Gutman 70's)

Para una gráfica G , la energía de G , está dada por

$$\mathcal{E}(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|. \quad (1)$$

- La definición de Gutman está motivada por la fórmula para la energía total de los π -electrones en el modelo orbital de Hückel

Definición (Gutman 70's)

Para una gráfica G , la energía de G , está dada por

$$\mathcal{E}(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|. \quad (1)$$

- La definición de Gutman está motivada por la fórmula para la energía total de los π -electrones en el modelo orbital de Hückel
- Pregunta general ¿Cuál es el significado de la energía desde la perspectiva combinatoria?

$$\mathcal{E}(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|. \quad (2)$$

- ¿Cuál es el significado de la energía desde la perspectiva combinatoria?

$$\mathcal{E}(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|. \quad (2)$$

- ¿Cuál es el significado de la energía desde la perspectiva combinatoria?
- ¿Qué gráficas tienen energía grande (o pequeña)?
- ¿Qué propiedades globales o locales (combinatorias) influyen en la energía de una gráfica?

Nuevo Enfoque: Energía de Vértices

Energía de vértices

Consideremos el estado (funcional lineal positivo),

$$\phi_i(M) : M_n \rightarrow \mathbb{C}, \quad \phi_i(M) = M_{ii}$$

Definición (A.-Juarez 2018)

Sea $G = (V, E)$ una gráfica con vértices v_1, \dots, v_n y matriz de adyacencia $A \in M_n(\mathbb{C})$. La energía de v_i con respecto a G es

$$\mathcal{E}_G(v_i) = \phi_i(|A|), \quad \text{para } i = 1, \dots, n,$$

donde $|A| = (AA^*)^{1/2}$.

Podemos calcular la energía de la gráfica sumando la energía de los vértices de G ,

$$\mathcal{E}(G) = \mathcal{E}_G(v_1) + \dots + \mathcal{E}_G(v_n).$$

Sea $G := V, E$ una gráfica (alias grafo). La *matriz de adyacencia* $A = A(G)$ de G es la matriz definida por

$$A_{x,x'} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \sim x' \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea $G := V, E$ una gráfica (alias grafo). La *matriz de adyacencia* $A = A(G)$ de G es la matriz definida por

$$A_{x,x'} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \sim x' \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Los funcionales tr y ϕ_1 nos dan información combinatoria de G :

Sea $G := V, E$ una gráfica (alias grafo). La *matriz de adyacencia* $A = A(G)$ de G es la matriz definida por

$$A_{x,x'} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \sim x' \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Los funcionales tr y ϕ_1 nos dan información combinatoria de G :

- El momento de orden k de A con respecto a ϕ_1 cuenta el número de caminatas de tamaño k que empiezan y terminan en 1:

$$\phi_1(A^k) = |\{(v_1, \dots, v_k) : v_1 = v_k = i \text{ and } (v_i, v_{i+1}) \in E\}|.$$

Sea $G := V, E$ una gráfica (alias grafo). La *matriz de adyacencia* $A = A(G)$ de G es la matriz definida por

$$A_{x,x'} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \sim x' \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Los funcionales tr y ϕ_1 nos dan información combinatoria de G :

- El momento de orden k de A con respecto a ϕ_1 cuenta el número de caminatas de tamaño k que empiezan y terminan en 1:

$$\phi_1(A^k) = |\{(v_1, \dots, v_k) : v_1 = v_k = i \text{ and } (v_i, v_{i+1}) \in E\}|.$$

- El momento k de A con respecto a tr nos da el número de caminatas cerradas de tamaño k , en G :

$$tr(A^k) = \frac{1}{n} |\{(v_1, \dots, v_k) : v_1 = v_k \text{ and } (v_i, v_{i+1}) \in E\}|.$$

- Energía de la gráfica.

$$\int |x| d\mu = \sum_{j=1}^n |\lambda_j|$$

- Energía de vértices.

$$\int |x| d\mu_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} |\lambda_j|$$

Observación: La segunda tiene sentido para cualquier gráfica localmente finita.

Teorema (A.-Juarez 2018)

Para una gráfica G y $v_i \in G$,

$$\mathcal{E}_G(v_i) \leq \sqrt{d_i},$$

con igualdad si y solo si $G = S_n$ y v_i es el centro.

Corolario

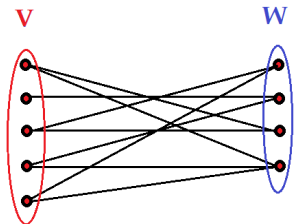
Para una gráfica G con grados d_1, \dots, d_n tenemos

$$\mathcal{E}(G) \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{d_i} \leq \sqrt{2mn}. \quad (3)$$

Teorema (A.-Juarez- Fernández 2018)

Sea G una gráfica bipartita con partes V y W entonces

$$\sum_{v \in V} \mathcal{E}_G(v) = \sum_{w \in W} \mathcal{E}_G(w).$$



- Gráficas Aleatorias.
- Relación con Índices Topológicos.
- Aplicación en Redes sociales. (Centralidad)
- Matriz Laplaciana.

Problemas

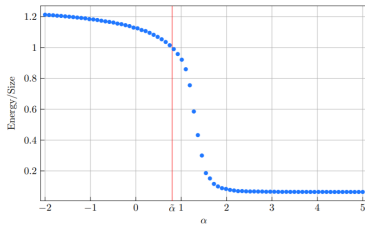
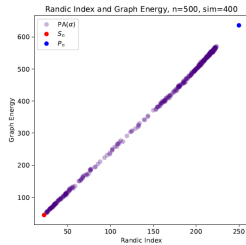
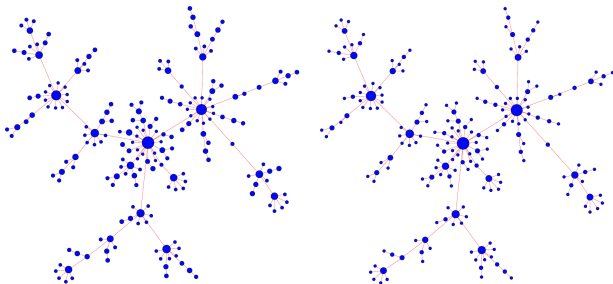


FIGURE 5. For 80 values of α in the interval $[-2, 5]$, we calculated the average ratio of Energy/size of 50 random graphs following the BA-model with parameter α of size $n = 1000$.



Randic Index VS graph energy

Problemas



$$L = A - D \text{ donde } D = \text{diagonal}(d_1, \dots, d_n).$$

Theorem 10. *Let a graph $G = (V, E)$ be such that $\kappa(v, w) \geq k, \forall \{v, w\} \in E$, then*

$$\mathcal{LE}(v_i) \leq 1 - k \left(1 - \frac{d_i}{2m}\right)$$

for every vertex $v_i \in V$.

Muchas gracias