Tarea 7: La Derivada

1. (Marsden #5, p. 121) Considera el conjunto de todas las funciones $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ de la forma
$$h(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{b_j x}, \text{ donde } a_j, b_j \in \mathbb{R}$$
Es un subconjunto denso en $C([0,1],\mathbb{R})$?

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Ya sabemos que no se sigue que $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, pero en este ejercicio vamos a ver que hay unas restricciones sobre el tipo de discontinuidad que f' puede tener. Demuestra que si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $L \in \mathbb{R}$ con $f'(a) < L < f'(b)$ o $f'(a) > L > f'(b)$, entonces hay $c \in (a,b)$ con $f'(c) = L$. Es decir, f' siempre satisface la propiedad del valor intermedio.

3. (Spivak 2-1) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$, entonces f es continua en a.

4. (Spivak 2-4) Sea $g : S \to \mathbb{R}$ una función continua, donde $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| = 1\}$ es el círculo unitario, tal que $g(0,1) = g(1,0) = 0$ y $g(-x) = -g(x)$. Definamos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por:
$$f(x) = \begin{cases} ||x|| g\left(\frac{x}{||x||}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$
   a) Si $x \in \mathbb{R}^2$ y se define $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $h(t) = f(tx)$, entonces h es diferenciable.
   b) Demuestra que f no es diferenciable en 0 a menos que $g = 0$. (Pista: primero demuestra que $Df(0)$ tendría que ser 0 si f fuera diferenciable en 0.)

5. (Spivak 2-6) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Demuestra que f no es diferenciable en 0.

6. (Spivak 2-7) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función tal que $||f(x)|| \leq ||x||^2$ para todo x. Demuestra que f es diferenciable en 0.

7. (Spivak 2-10) Usa los teoremas que hemos visto en clase para determinar f' en cada caso:
   a) $f(x,y,z) = x^y$.
   b) $f(x,y,z) = (x^y, z)$.
   c) $f(x,y,z) = \sin(x \sin(y \sin z))$.
   d) $f(x,y,z) = (x+y)^z$.

   Puedes usar el hecho de que $(x,y) \mapsto x^y$ está bien definida para $(x,y) \in \mathbb{R}2$ con $x > 0$ por $x^y = e^{y \ln x}$. También puedes usar el hecho de que $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ y $\frac{d}{dx} \ln x = 1/x$ para $x > 0$.

8. (Spivak 2-13) Definamos $\mathrm{IP} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $\mathrm{IP}(x, y) = \langle x, y \rangle$.

   a) Determina $\mathrm{IP}'(a, b)$ para $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. (Pista: Usa el hecho de que el producto interno es bilineal.)

   b) Si $f, g : R \to \mathbb{R}^n$ son diferenciables y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define por $h(t) = \langle f(t), g(t) \rangle$, demuestra que

   $$h'(a) = \langle f'(a)^{\mathrm{T}}, g(a) \rangle + \langle f(a), g'(a)^{\mathrm{T}} \rangle$$

   Nota: $f'(a)$ es una matriz $n \times 1$. Su transpuesta $f'(a)$ es una matriz $1 \times n$, lo que podemos considerar como miembro de $\mathbb{R}^n$.

   c) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable y $||f(t)|| = 1$ para todo t, entonces $\langle hf'(t)^{\mathrm{T}}, f(t) \rangle = 0$ para todo t. Que sentido geométrico tiene este resultado?

9. (Spivak 2-15) Consideremos una matriz $n \times n$ como un punto en el producto $\mathbb{R}^n \times \cdots \mathbb{R}^n$ (n veces) por considerar cada fila de la matriz como un miembro de $\mathbb{R}^n$.

   a) Demuestra que $\det : \mathbb{R}^n \times \cdots \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y que

   $$D(\det)(a_1, \ldots, a_n)(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

   donde cada a_i y cada x_i son miembros de $\mathbb{R}^n$.

   b) Si $a_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son diferenciables para cada $1 \leq i, j \leq n$ and $f(t) = \det([a_{ij}(t)]_{ij})$, entonces

   $$f'(t) = \sum_{j=1}^{n} \det \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{j1}(t) & \cdots & a'_{jn}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

   c) Supongamos que $\det([a_i j(t)]_{ij}) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $b_1, \cdots b_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son diferenciables. Sean $s_1(t), \ldots, s_n(t)$ las soluciones de las ecuaciones

   $$\sum_{j=1}^{n} a_{ji}(t) s_j(t) = b_i(t) \text{ para } i = 1, \ldots, n.$$

   Demuestra que cada s_i es diferenciable y determina $s_i'(t)$.