Tarea 5: Continuidad: Algunos ejercicios interesantes

1. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$ (es decir, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$). Demuestra que $f = g$ (es decir, que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$).

2. Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es **homogénea** si $f(tx) = tf(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Decimos que f es **aditiva** si $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Decimos que f es **lineal** si es ambos homogénea y aditiva.

   Demuestra que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es lineal, entonces es continua. (Pista: Maneja con las componentes. Considera rectángulos en el dominio y bolas en el codominio.)

3. *a*) Demuestra que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es homogénea, entonces es lineal.

   b) Demuestra que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es aditiva y continua, entonces es lineal. (Pista: Determina el comportamiento de f sobre $\mathbb{Q}$ y usa el ejercicio (1).)

   c) Demuestra que hay una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es aditiva pero no es lineal. ~~(Pista: Define una relación de equivalencia $\sim$ sobre $\mathbb{R}$ tal que $x \sim y$ si y sólo si $x/y \in \mathbb{Q}$. Después, escoge un representante z de cada clase de equivalencia bajo $\sim$ y define $f(z) = 1$. Usa la deseada propiedad de aditividad para definir $f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \sim z$.)~~ (La pista original es incorrecta: hay que usar una base de Hamel en la construcción.)

4. Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos. Decimos que f es **continua en el punto $\boldsymbol{x \in X}$** si para cada vecindad $V \subseteq Y$ de $f(x)$, hay una vecindad U de $x \in X$ tal que $U \subseteq f^{-1}(V)$ (es decir, $f(U) \subseteq V$).

   a) Demuestra que $f : X \to Y$ es continua si y sólo si es continua en todos los puntos de X.

   b) Demuestra que una función $f : A \to \mathbb{R}^m$, donde $A \subseteq \mathbb{R}^n$, es continua en el punto $x \in A$ si y sólo si cumple la siguiente condición: para cada $\epsilon > 0$, hay $\delta > 0$ tal que $||f(y) - f(x)|| < \epsilon$ para todo $y \in A$ tal que $||y - x|| < \delta$.

5. *a*) Sea $f : A \to \mathbb{R}^n$ y sea $B \subseteq A$. Demuestra que si f es continua, su restricción $f|_B : B \to \mathbb{R}^n$ es continua.

   b) Construye un ejemplo (con demostración) de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, un subconjunto infinito $B \subseteq A$ y una función $f : A \to \mathbb{R}$ tal que f no es continua en ningún punto de A pero su restricción $f|_B : B \to \mathbb{R}$ es continua.

6. Define $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1]\backslash\mathbb{Q} \\ 1/q & x = \frac{p}{q} \text{ donde } p, q \in \mathbb{Z}^{\geq 0} \text{ en términos reducidos} \end{cases}$$

   Demuestra que f es continua en todos los puntos en $[0,1]\backslash\mathbb{Q}$ pero discontinua en todos los puntos en $[0,1] \cap \mathbb{Q}$.

7. Decimos que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es **Lipschitz** si hay $K > 0$ tal que

$$||f(x) - f(y)|| < K||x - y||.$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Demuestra que si una función es Lipschitz, entonces también es uniformamente continua.

8. Da un ejemplo (con demostración) de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es acotada y continua pero no es uniformamente continua. (Pista: Primero construye una función continua y acotada que no es Lipschitz. Tal vez tu función no es Lipschitz por su mal comportamiento en un solo punto del dominio. Para que la función no sea uniformamente continua, tendrás que "compartir" el mal comportamiento sobre una infinitud de puntos.)

9. Decimos que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un **conjunto $\boldsymbol{G_\delta}$** si se puede escribir A como la intersección de una familia numerable de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Es decir, A es un conjunto G_δ si hay una familia numerable $\{C_n\}_{nen\mathbb{N}}$ de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función, y sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ el conjunto de todos los puntos en que f es continua. Demuestra que A es un conjunto G_δ.