Tarea 2: Resolución del problema 3a

Ejercicio 3a: Demuestra que el conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 1\}$$

es abierto.

Demostración. Sea $(x, y) \in S$. Hay que demostrar que hay una vecindad de (x, y) que está contenida en S. Entonces, consideremos el rectángulo abierto

$$R = (x - \epsilon_1, x + \epsilon_1) \times (y - \epsilon_2, y + \epsilon_2) \subseteq \mathbb{R}^2$$

que obviamente contiene (x, y).

Pongamos $\delta = xy - 1$. Para escoger $\epsilon_1 > 0$ y $\epsilon_2 > 0$ tales que $R \subseteq S$, observemos primero que:

$$\begin{aligned} |ab - 1| &= |(ab - a) + (a - 1)| \\ &= |a(b - 1) + (a - 1)| \\ &\leq |a||b - 1| + |a - 1| \end{aligned}$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces, pongamos $\epsilon_1 = \frac{\delta}{2}$ y $\epsilon_1 = \frac{\delta}{2(|x|+\delta/2)}$. Por lo tanto, veamos que $|a| < |x| + \delta/2$ para cada $a \in (x - \delta/2, x + \delta/2)$. Se sigue que

$$\begin{aligned} |ab - 1| &\leq |a||b - 1| + |a - 1| \\ &< |a|\frac{\delta}{2(|x| + \delta/2)} + \frac{\delta}{2} \\ &\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \\ &= xy - 1 \end{aligned}$$

para todo $(a, b) \in R = (x - \epsilon_1, x + \epsilon_1) \times (y - \epsilon_2, y + \epsilon_2)$. Por lo tanto, $ab - 1$ para cada $(a, b) \in R$, y hemos demostrado que S es abierto.

$\square$