Tarea 2: Topología de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$

1. Demuestra que:

   a) Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$ son abiertos, entonces $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ es abierto.

   b) Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$ son cerrados, entonces $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ es cerrado.

2. Demuestra que si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge a un punto, entonces toda la sucesión converge a ese punto.

3. a) Sea $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} | xy > 1\}$. Demuestra que S es abierto.

   b) Sea $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} | xy \geq 1\}$. ¿Es S cerrado? Demuestra tu respuesta.

4. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Demuestra tus respuestas.

   a) Determina si $\sup A \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de A.

   b) Determina si $\sup A \in \overline{A}$.

5. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ que está acotada por arriba y por abajo. Demuestra que $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ y que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge si y solo si $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$

6. Da un ejemplo (con demostración) de un subconjunto no-vacío de $\mathbb{R}$ que tiene una cantidad infinita de puntos de acumulación pero no contiene ninguno de sus puntos de acumulación.

7. Sea A_n un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^m$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo n y también $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Sea $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. Demuestra que x es un punto de acumulación de A_1.

8. Demuestra lo siguiente (para subconjuntos de $\mathbb{R}^n$):

   a) $\partial A = \partial(\mathbb{R}^n \backslash A)$

   b) $\partial(\partial A) \subseteq \partial A$.

   c) $\partial(A \cup B) \subseteq (\partial A) \cup (\partial B) \subseteq \partial(A \cup B) \cup A \cup B$

   d) $\partial(\partial(\partial A))) = \partial(\partial A)$.