Tarea 12: Fubini, Particiones de la Unidad, y Cambio de Variable

1. (Spivak 3-26) Integración y área: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable y no-negativa. Pongamos

$$A_f = \{(x, y) \in [a, b] \times [0, M] \mid 0 \leq y \leq f(x)\},$$

donde $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$. Demuestra que el conjunto A_f es Jordan-medible y tiene área (en el sentido de Jordan) igual a $\int_a^b f$.

Demostración. Vamos a demostrar que la frontera ∂A_f de A_f tiene medida cero. Observa bien que no basta demostrar que la gráfica de f tiene medida cero; algunos estudiantes escribieron que

$$\partial A_f = \{a\} \times [0, f(a)] \bigcup \{b\} \times [0, f(b)] \bigcup [a, b] \times \{0\} \bigcup \{(x, f(x)) \,|\, x \in [a, b]\}.$$

Pero lo anterior sólo es cierto si f es continua. Si hay un punto donde f no es continua, entonces ∂A_f tendrá otros puntos (les sugiero que tracen un dibujo).

Entonces, tenemos que usar otro método. Pues, ya sabemos que la frontera

$$\partial([a, b] \times [0, M]) = (\{a\} \times [0, M]) \bigcup (\{b\} \times [0, M]) \bigcup ([a, b] \times \{0\}) \bigcup ([a, b] \times \{M\}$$

tiene medida cero, ya que es una unión contable (de hecho finita) de rectángulos de medida cero. Por lo tanto, basta demostrar que $\partial A_f \bigcap ((a, b) \times (0, M))$ tiene medida cero.

Ya que f es Riemann-integrable, hay una partición $P = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = b\}$ de $[a, b]$ tal que

$$U(f, P) - L(f, P) \equiv \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \epsilon, \tag{1}$$

donde $M_i \equiv M_{[x_{i-1},x_i]}(f) = \sup_{x \in [x_{i-1},x_i]} f(x)$ y $m_i \equiv m_{[x_{i-1},x_i]}(f) = \inf_{x \in [x_{i-1},x_i]} f(x)$.

Afirmamos que

$$\partial A_f \bigcap ((a, b) \times (0, M)) \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i] \right) \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\} \times [0, M] \right).$$

Por (1), se sigue que $\sum_{i=1}^{n} \nu([x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i]) < \epsilon$. Ya que $\epsilon > 0$ era arbitrario, se seguirá que ∂A_f tiene medida cero, por lo que A_f es Jordan-medible.

Para mostrar nuestra afirmación, fijemos $(x, y) \in (a, b) \times (0, M)$, donde $x \in [x_{i-1}, x_i]$ y $0 < y < m_i$. Entonces $(x, y) \in \text{interior}(A_f)$.

$\square$

2. (Spivak 3-27) Si $f : [a, b] \times [a, b]$ es continuo, demuestra que

$$\int_a^b \int_a^y f(x, y) dx\, dy = \int_a^b \int_x^b f(x, y) dy\, dx.$$

Pista: Reescribe esas integrales dobles como una integral de la forma $\int_C f$, donde $C \subseteq [a, b] \times [a, b]$ es un subconjunto adecuado. (Recuerda que, por definición, $\int_C f = \int_{[a,b]\times[a,b]} f 1_C$ si C es Jordan-medible.)

3. Teorema Fundamental del Cálculo

   a) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Definimos $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ por $F(x) = \int_a^x f$. Demuestra que F es de clase C^1 y que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

   Pista: Las claves son la continuidad de f y la definición de la derivada para funciones univariables.

   b) Demuestra que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es tal que $F' = f$, entonces $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

4. (Spivak 3-28) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Usa el teorema de Fubini para demostrar que $\partial_{1,2} f = \partial_{2,1} f$.

Pista: Si $\partial_{1,2} f(a) - \partial_{2,1} f(a) > 0$, entonces hay un rectángulo cerrado A que contiene a en su interior tal que $\partial_{1,2} f(x) - \partial_{2,1} f(x) > 0$ para todo $x \in A$.

Observación: Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo. Muchos dijeron (sin demostrarlo) que si una función $f : A \to \mathbb{R}$ es integrable y cumple el criterio que $f(x) > 0$ para $x \in A$, entonces $\int_A f > 0$. Es algo cierto, pero realmente requiere demostración.

Lema 1. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo. Si una función $f : A \to \mathbb{R}$ es integrable y cumple el criterio que $f(x) > 0$ para $x \in A$, entonces $\int_A f > 0$.*

Demostración. Ya que f es integrable, sabemos por el teorema de Lebesgue que hay un punto x en el interior de A donde f es continua. Entonces $f(x) > 0$. Debido a que f es continua en x, hay $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subseteq A$ y tal que $|f(x) - f(y)| < f(x)/2$ para todo $y \in B_\delta(x)$. En particular, $f(y) > f(x)/2$ para todo $y \in B_\delta(x)$. Escogemos una partición P de A tal que uno de sus rectángulos B está contenido en $B_\delta(x)$. Entonces $\int_A f \geq L(f, P) \geq m_B(f)\nu(B) \geq f(x)/2\nu(B) > 0$. □

5. (Spivak 3-32) Sea $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ es continua y que $\partial_2 f$ existe y es continua sobre $[a, b] \times [c, d]$. Definimos $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$. Demuestra **la regla de Liebniz**, que dice que

$$F'(y) = \int_a^b \partial_2 f(x, y) dx.$$

Pista: Por el teorema fundamental del cálculo, tenemos lo siguiente:

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \int_c^y \partial_2 f(x,y)dy + f(x,c)dx.$$

6. (Spivak 3-37)

   a) Supongamos que $f:(0,1) \to \mathbb{R}$ es una función no-negativa y continua. Demuestra que $\int_{(0,1)} f$ existe (en el sentido de particiones de la unidad) si y sólo si el límite

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} f$$

existe.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Supongamos que $\int_{(0,1)} f$ existe (en el sentido de particiones de la unidad). Sea Φ una partición de la unidad (contable) subordinada a una cubierta admisible de $(0,1)$ tal que

$$\sum_{\phi \in \Phi} \left(\int_{(0,1)} \phi |f| \right) = \sum_{\phi \in \Phi} \left(\int_{(0,1)} \phi f \right) < \infty, \tag{2}$$

Vamos a demostrar que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} f = \int_{(0,1)} f,$$

donde la integral de f sobre $(0,1)$ es la del sentido de particiones, es decir,

$$\int_{(0,1)} f = \sum_{\phi \in \Phi} \int_{(0,1)} \phi f$$

Ya que la serie en (2) converge, sabemos que para cada $\delta > 0$, hay un subconjunto finita $\widetilde{\Phi} = \{f_1, \dots, f_n\} \subseteq \Phi$ tal que

$$\sum_{\phi \in \Phi \setminus \widetilde{\Phi}} \left(\int_{(0,1)} \phi f \right) = \sum_{\phi \in \Phi} \left(\int_{(0,1)} \phi f \right) - \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{(0,1)} \phi_i f \right) < \delta \tag{3}$$

(aquí usamos el hecho de que cada término en la serie es no negativa).
La definición de partición de la unidad dice que cada función f_i en $\widetilde{\Phi}$ tiene suporte compacto $\operatorname{supp} f_i \equiv S_i$ tal que $S_i \subseteq (0,1)$. Entonces la unión $\widetilde{S} = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ es un subconjunto compacto de $(0,1)$. Se sigue que hay $\eta > 0$ tal que $\widetilde{S} \subseteq [\eta, 1-\eta] \subseteq (0,1)$.
Vimos en clase que para cualquier subconjunto compacto de $(0,1)$ hay una familia finita de funciones que no son iguales a cero sobre ese compacto. En particular,

para $[\eta, 1-\eta]$, hay una familia finita Φ' que contiene $\widetilde{\Phi}$ como subfamilia (de hecho, vamos a escribir $\Phi' = \{f_1, \dots f_m\}$, donde $m \geq n$) tal que $f|_{[\eta,1-\eta]} = 0$ para todo $f \in \Phi \backslash \Phi'$. En particular, sabemos que

$$\sum_{i=1}^{m} \phi_i(x) = 1$$

para todo $x \in [\eta, 1-\eta]$.
Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{[\eta,1-\eta]} f &= \sum_{i=1}^{m} \int_{[\eta,1-\eta]} \phi_i f \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} \int_{[\eta,1-\eta]} \phi_i f \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{A} \phi_i f.\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\int_{[\eta,1-\eta]} f &= \sum_{i=1}^{m} \int_{[\eta,1-\eta]} \phi_i f \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \int_{A} \phi_i f \\ &\leq \sum_{\phi\in\Phi} \int_{A} \phi_i f.\end{aligned} \tag{4}$$

Por (3), se sique que

$$0 \leq \sum_{\phi\in\Phi} \left(\int_{(0,1)} \phi f \right) - \int_{[\eta,1-\eta]} f < \delta.$$

Ahora supongamos que $\epsilon \leq \eta$. Se tiene que

$$\int_{[\eta,1-\eta]} f \leq \int_{[\epsilon,1-\epsilon]} f \leq \sum_{i=1}^{m} \int_{A} \phi_i f.$$

Nota bien que aquí estamos usando otra vez la no negatividad de f para la primera desigualdad. La segunda desgidualdad se sigue del mismo argumento que el de (4), usando el hecho de que $[\epsilon, 1-\epsilon]$ es un subconjunto compacto de $(0,1)$ y que, por lo tanto, solo hay una cantidad finita de funciones en Φ que no son iguales a cero sobre $[\epsilon, 1-\epsilon]$.

Se sigue que

$$0 \leq \sum_{\phi \in \Phi} \left(\int_{(0,1)} \phi f \right) - \int_{[\epsilon, 1-\epsilon]} f < \delta.$$

para todo $0 < \epsilon \leq \eta$. Ya que $\delta > 0$ era arbitrario, por (2) tenemos que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} f = \sum_{\phi \in \Phi} \int_A \phi f$$

($\Longleftarrow$) Ahora supongamos que

$$L \equiv \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} f < \infty.$$

Sea Φ una partición de la unidad (contable) subordinada a una cubierta admisible de $(0,1)$. Vamos a demostrar que

$$\sum_{\phi \in \Phi} \int_{(0,1)} \phi |f| = \sum_{\phi \in \Phi} \int_{(0,1)} \phi f = L < \infty.$$

Sea $\delta > 0$. Entonces hay $\eta > 0$ tal que

$$0 \leq L - \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} f < \delta \tag{5}$$

para todo $0 < \epsilon < \eta$. (Aquí, usamos el hecho de que f es no no negativa y que, por lo tanto,

$$\int_{\epsilon_2}^{1-\epsilon_2} f \leq \int_{\epsilon_1}^{1-\epsilon_1} f$$

si $0 < \epsilon_1 \leq \epsilon_2 < 1$.)

Ya que $[\eta, 1-\eta] \subseteq (0,1)$ es compacto, sabemos que hay una subfamilia finita $\widetilde{\Phi} = \{\phi_1, \ldots \phi_n\} \subseteq \Phi$ que consta de las funciones que no son iguales a cero sobre $[\eta, 1-\eta]$.

Supongamos que $\Phi' \subseteq \Phi$ es una subfamilia *finita* tal que $\widetilde{\Phi} \subseteq \Phi'$. Si ponemos $S_\phi = \operatorname{supp} \phi$ para todo $\phi \in \Phi'$, entonces hay $\nu \leq \eta$ tal que

$$\bigcup_{\phi \in \Phi'} S_\phi \subseteq [\nu, 1-\nu] \subseteq (0,1).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_\eta^{1-\eta} f &= \sum_{\phi\in\widetilde{\Phi}} \int_\eta^{1-\eta} \phi f \text{ (ya que } \sum_{\phi\in\widetilde{\Phi}} \phi(x) = 1 \text{ para todo } x \in [\eta, 1-\eta]) \\
&\le \sum_{\phi\in\widetilde{\Phi}} \int_\nu^{1-\nu} \phi f \text{ (ya que } [\eta, 1-\eta] \subseteq [\nu, 1-\nu]) \\
&\le \sum_{\phi\in\Phi'} \int_\nu^{1-\nu} \phi f \text{ (ya que } f \text{ es no negativa)} \\
&= \sum_{\phi\in\Phi'} \int_{(0,1)} \phi f \text{ (ya que supp } f_i \subseteq [\nu, 1-\nu] \text{ para todo } \phi \in \widetilde{\Phi}) \\
&\le \int_\nu^{1-\nu} f \text{ (ya que } 0 \le \sum_{\phi\in\Phi'} \phi(x) \le 1 \text{ para todo } x \in (0,1))
\end{aligned}$$

Ya que $\nu \le \eta$, lo anterior junto con la desigualdad (5) nos dice que

$$0 \le L - \sum_{\phi\in\Phi'} \phi f < \delta.$$

Pero la subfamilia $\Phi' \subseteq \Phi$ era arbitraria (sujeta a la condición que $\widetilde{\Phi} \subseteq \Phi'$). El número $\delta > 0$ era arbitario también. Se sigue que

$$\sum_{\phi\in\Phi} \int_{(0,1)} \phi f = \lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^{1-\epsilon} f < \infty.$$

□

b) Sea $A_n = [1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}]$. Supongamos que $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ es continua y satisface

$$\int_{A_n} f = \frac{(-1)^n}{n}$$

y que $f(x) = 0$ si x no está en ningún A_n. Demuestra que $\int_{(0,1)} f$ no existe, pero

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^{1-\epsilon} f = -\log 2$$

Demostración. Primero demostramos que f no es integrable en el sentido de particiones. De la definición de ese tipo de integración, es claro que f es integrable si y sólo si $|f|$ es integrable. La condición de que $\int_{A_n} f = \frac{(-1)^n}{n}$ implica que

$$\int_{A_n} |f| \ge \left| \int_{A_n} f \right| = \frac{1}{n}.$$

Pero

$$\int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{1-\frac{1}{2^{n+1}}} |f| \geq \int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{1}{2^{n+1}}} |f|$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} |f|$$
$$\geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Se sigue que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} f = \infty,$$

y por 6(a), sabemos que $\int_{(0,1)} |f|$ no existe en el sentido de particiones, por lo que $\int_{(0,1)} f$ no existe. □

Observación:

Aquí en (6b) hay una pequeña sutileza de que Spivak (me parece) no se dio cuenta. Para asegurar que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} f = -\log 2,$$

hay que exigir lo siguiente:

1) $f(x) \geq 0$ para todo $x \in A_n$ si n es par
2) $f(x) \leq 0$ para todo $x \in A_n$ si n es impar

Sin dichos criterios, es posible construir una función continua $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ que cumple $\int_{A_n} f = \frac{(-1)^n}{n}$ pero tal que el límite $\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon}$ no existe.
(Les dejo la construcción exacta como tarea opcional: el truco es construir una función que alcanza valores positivas *y* negativas en cada intervalito A_n de tal manera que $\int_{A_n} f = \frac{(-1)^n}{n}$ pero la integral sobre un subintervalo $[1 - \frac{1}{2^{n+1}}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \epsilon]$ puede mucho mayor que cero, ya que podemos cancelar esa integral con valores negativas en el resto de A_n).

Otra Observación:

Como parte del ejercicio (6b), hay que mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2.$$

Se puede usar la prueba de la serie alternante para mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge. Pero aquí vamos a calcular la suma.

Primero, hay que especificar una definición para la función $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$. La definición que vamos a usar aquí es que log es la única solución a la ecuación diferencial $\log'(x) = \frac{1}{x}$ para $x \in (0,\infty)$ sujeto a la condición inicial $\log(1) = 0$. Afirmamos que

$$\log(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

para $x \in (-1, 1)$.

Primero, notamos (ejercicio para el lector) que la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ tiene radio de convergencia $R = 1$. Definamos $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$.

Definamos $f_n : (-1,1) \to \mathbb{R}$ por $f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} x^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Aunque la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge **uniformemente** a f sobre $(0,1)$, sí tenemos que $f_n \to f$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $(0,1)$.

Observemos que f_n es continuamente diferenciable para cada $n \in \mathbb{N}$ y que

$$f_n'(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} (-x)^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (-x)^i.$$

Definamos $g : (-1,1) \to \mathbb{R}$ por $g(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{\infty} (-x)^i$. Ya hemos visto la demostración que $f_n' \to g$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $(-1,1)$.

El teorema de convergencia uniforme y derivadas nos dice que $f_n \to f$ uniformemente sobre compactos y que $f' = g$. Es decir, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$. Además, $f(0) = 0$. Se sigue (por nuestra definición de log) que $f(x) = \log(x+1)$ para $x \in (-1,1)$.

Ya que sabemos que la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge, el teorema de Abel nos dice que

$$\log 2 = \lim_{x\to 1^-} \log(x+1) = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (-x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

7. (Spivak 3-41) La integral más bonita del mundo:

   Define $f : \mathbb{R}^{>0} \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ por $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

   a) Demuestra que f es inyectiva y computa $f'(r,\theta)$. Demuestra que $\det f'(r,\theta) \neq 0$ para todo (r,θ). Demuestra que su imagen es el conjunto

   $$f(\mathbb{R}^{>0} \times (0,2\pi)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, \text{ o ambos } x \geq 0 \;\&\; y \neq 0\}.$$

b) Si $P = f^{-1}$, demuestra que $P(x,y) = (r(x,y), \theta(x,y))$, donde

$$r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2},$$
$$\theta(x,y) = \begin{cases} \tan^{-1}\frac{y}{x}, & x>0 \ \& \ y>0 \\ \pi + \tan^{-1}\frac{y}{x}, & x<0 \\ 2\pi + \tan^{-1}\frac{y}{x}, & x>0 \ \& \ y<0 \\ \pi/2, & x=0 \ \& \ y>0 \\ 3\pi/2, & x=0 \ \& \ y<0. \end{cases}$$

Encuentra $P'(x,y)$ donde existe. La función P se llama **el sistema polar de coordinadas en** A.

c) Sea $C \subset A$ la región entre los círculos de radios r_1 y r_2 (centrados en 0) y las media-rectas que pasan por 0 y hacen ángulos de θ_1 y θ_2 con el eje x. Si $h : C \to \mathbb{R}$ es integrable y se define la función g por $h(x,y) = g(r(x,y), \theta(x,y))$, demuestra que

$$\int_C h = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} g(r,\theta) r \, d\theta \, dr.$$

Demuestra que

$$\int_{B_r(0)} h = \int_0^r \int_0^{2\pi} g(r,\theta) r \, d\theta \, dr.$$

d) Si $C_r = [-r,r] \times [-r,r]$, demuestra que

$$\int_{B_r(0)} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \pi(1 - e^{-r^2})$$

y que

$$\int_{C_r(0)} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \left(\int_{-r}^{r} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

e) Demuestra que

$$\lim_{r\to\infty} \int_{B_r(0)} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \lim_{r\to\infty} \int_{C_r(0)} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy,$$

y concluye que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$