Tarea 11: Integrabilidad, Contenido, y Conjuntos de Medida Cero

1. (Spivak 3-10)

   a) Sea C un conjunto de contenido cero. Demuestra que la frontera de C también tiene contenido cero.

   b) Da un ejemplo de un conjunto de medida cero cuya frontera no tenga medida cero.

2. (Spivak 3-11) Sea $A \subseteq [0,1]$ una unión contable de intervalos abiertos (a_i, b_i) tal que cada número racional en $(0,1)$ está contenido en uno de los (a_i, b_i)'s.

   a) Demuestra que la frontera de A es $\partial A = [0,1]\backslash A$.

   b) Demuestra que si $\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) < 1$, entonces ∂A no tiene medida cero.
   Observa que lo anterior implica que la función 1_A no es integrable sobre $[0,1]$, o sea, A no es Jordan-medible.

3. (Spivak 3-12) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente (es decir, $f(x) \leq f(y)$ siempre que $x < y$). Demuestra que el conjunto

   $$B = \{x \in [a,b] \mid f \text{ no es continua en } x\}$$

   tiene medida cero. Observa que eso implica que f es integrable sobre $[a,b]$.

   Pista: Demuestra que si $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ son puntos distintos, entonces

   $$\sum_{i=1}^{n} o(f, x_i) \leq f(b) - f(a).$$

   Entonces, ¿puede ser infinito el conjunto $B_{1/n} = \{x \in [a,b] \mid o(f,x) > 1/n\}$?

4. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado. Si $f, g : A \to \mathbb{R}$ son integrables, entonces fg también lo es.

5. (Spivak 3-14) Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto de contenido cero. Demuestra que hay un rectángulo cerrado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $C \subseteq A$. Además, C es Jordan-medible, y $\int_A 1_C = 0$.

6. (Spivak 3-18) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado y $f : A \to \mathbb{R}$ una función no negativa y integrable con $\int_A f = 0$, entonces el conjunto $\{x \in A \mid f(x) \neq 0\}$ tiene medida cero. Demuestra que lo anterior es falso en general si no requerimos que $f \geq 0$.

7. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado, y sea $\mathscr{S} = \{C \subseteq A \mid C \text{ es Jordan-medible}\}$. Es decir, $\mathscr{S}$ es la familia de todos los subconjuntos Jordan-medibles de A.

a) Demuestra que $\mathscr{S}$ es un **álgebra de subconjuntos de** A. Es decir, si $B, C \in \mathscr{S}$, entonces

1) $B \cap C \in \mathscr{S}$.
2) $B \cup C \in \mathscr{S}$.
3) $A \backslash B \in \mathscr{S}$.

En otros términos, $\mathscr{S}$ es cerrado bajo uniones finitas, intersecciones finitas, y complementos. (Compara este concepto con lo de una topología para A.)

b) Si $C \in \mathscr{S}$, escribimos $\mu(C)$ para su contenido de Jordan. Es decir, $\mu(C) := \int_A 1_C$. Demuestra que $\mu : \mathscr{S} \to [0, \infty)$ es una **medida finitamente aditiva**, que quiere decir que si $C_1, \dots C_n \in \mathscr{S}$ son mutuamente disjuntos (es decir, $C_i \cap C_j = \emptyset$ si $i \neq j$), entonces

$$\mu(C_1 \cup \cdots \cup C_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i).$$

c) Demuestra que si $C \in \mathscr{S}$, entonces $\mu(A \backslash C) = \nu(A) - \mu(C)$ (recuerda que $\nu(A)$ es el volumen del rectángulo A).

8. (Spivak 3-17) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado, y sea $C \subset A$ un conjunto de medida cero. Demuestra que si 1_C es integrable, entonces $\int_A 1_C = 0$.
Pista: Demuestra que $L(1_C, P) = 0$ para toda partición P de A. Además, demuestra que el rectángulo $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq A$ no tiene contenido cero si $a_i < b_i$ para cada i.

9. (Spivak 3-22) Sea A un rectángulo cerrado, y sea $B \subseteq A$ un subconjunto Jordan-medible. Demuestra que para cada $\epsilon > 0$ hay un conjunto $C \subseteq B$, compacto y Jordan-medible, tal que
$\int_A 1_{B \backslash C} < \epsilon$.