Examen 1

Somete 6 de los 7 siguientes problemas.

1. Para cada $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos el conjunto
$$A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}.$$
Demuestra que si A y B son abiertos, entonces $A + B \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto.

2. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado por arriba. Definimos el conjunto
$$-S = \{-x \mid x \in S\}.$$
Demuestra que $-S$ es acotado por abajo y que $\inf(-S) = -\sup S$.

3. Demuestra que el conjunto $\mathbb{R}^2$ no es compacto (como subconjunto de $\mathbb{R}^2$).

4. A través de la propiedad arquimediana y la definición de convergencia, demuestra que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

5. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ conexo. Demuestra que su clausura $\overline{A}$ es conexa. (Pista: Puedes usar sin demostrarlo que $\overline{A} = A \cup A'$, donde A' es el conjunto de los puntos de acumulación de A.)

6. A través de las propiedades básicas del producto interno (puedes usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz, por ejemplo), demuestra que:

   a) $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

   b) $4\langle v, w\rangle = ||v + w||^2 - ||v - w||^2$

   para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$. Fíjate en que si usas las propiedades básicas del producto interno, no es necesario manejar explícitamente con las componentes de v y w en $\mathbb{R}^n$.

7. Demuestra que si $x_k \to x$ en $\mathbb{R}^n$ cuando $k \to \infty$, entonces $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es Cauchy.