Operadores de Toeplitz que Conmutan y Representaciones de Grupos Semisimples

Matthew Dawson (CIMAT)
Gestur Ólafsson (LSU)
Raúl Quiroga (CIMAT)

Xalapa 2016

La Bola Unitaria $\mathbb{B}^n$

- La bola unitaria $\mathbb{B}^n := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \mid ||\mathbf{z}||^2 < 1\}$ admite una acción transitiva del grupo

$$\begin{aligned} \mathrm{SU}(n,1) = &\{B \in M_{\mathbb{C}}(n+1) \mid \det B = 1 \\ &\quad \text{y } \langle Bx, By\rangle = \langle x, y\rangle \text{ para } x, y \in \mathbb{C}^{n,1}\} \end{aligned}$$

  por

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \mathbf{z} = \frac{A\mathbf{z} + B}{C\mathbf{z} + D}.$$

- Además,

$$\begin{aligned} \mathrm{Stab}_G\, 0 &= S(\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(1)) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & D \end{pmatrix} \middle| A \in \mathrm{U}(n), B \in \mathrm{U}(1), \text{ y } \det A \det B = 1 \right\} \end{aligned}$$

La Bola Unitaria

- Entonces

$$\mathbb{B}^n = G/K = \mathrm{SU}(n,1)/S(\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(1))$$

- Definimos una medida

$$d\mu_\lambda(\mathbf{z}) = (1 - \|\mathbf{z}\|^2)^\lambda dz$$

para $\lambda > -1$.

- Espacio de Hilbert: $L^2_\lambda := L^2(\mathbb{B}^n, \mu_\lambda)$ con producto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{B}^n} f(\mathbf{z})\overline{g(\mathbf{z})} d\mu_\lambda(\mathbf{z})$$

Los Espacios de Bergman

- Las funciones holomorfas: $\mathcal{O}(\mathbb{B}^n)$.
- El **espacio de Bergman con peso** $\lambda > -1$ es la intersection

$$\mathcal{H}_\lambda = L^2_\lambda \bigcap \mathcal{O}(\mathbb{B}^n).$$

- Cada $\mathcal{H}_\lambda \subseteq L^2_\lambda$ es subespacio de Hilbert.

El Nucleo Reproductor

- Para cada $\mathbf{w} \in \mathbb{B}^n$, el funcional

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\lambda &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto f(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

  es continuo. Decimos que $\mathcal{H}_\lambda$ tiene **nucleo reproductor**

- Por el teorema de Riesz, existe $K_{\mathbf{w}} \in \mathcal{H}_\lambda$ tal que

$$\langle f, K_{\mathbf{w}} \rangle = f(\mathbf{w})$$

  para todo $f \in \mathcal{H}_\lambda$.

- Entonces:

$$\langle K_{\mathbf{v}}, K_{\mathbf{w}} \rangle = K_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \overline{K_{\mathbf{w}}(\mathbf{v})}$$

  si $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{B}^n$.

El Nucleo Reproductor

- El **nucleo reproductor** es la función:

$$K : \mathbb{B}^n \times \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$$
$$K(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := K_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}).$$

- $K(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{K(\mathbf{w}, \mathbf{v})}$.
- Sea $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}_\lambda$ una base ortonormal. Entonces:

$$K(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \phi_k(\mathbf{v}) \overline{\phi_k(\mathbf{w})}$$

- La proyección $B_\lambda : L^2_\lambda \to \mathcal{H}_\lambda$ tiene núcleo integral K:

$$B_\lambda f(\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{B}^n} f(\mathbf{w}) K(\mathbf{z}, \mathbf{w}) d\mu_\lambda(\mathbf{w})$$

El Núcleo Reproductor

- Para $\mathcal{H}_\lambda$, el núcleo reproductor es:

$$K(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \frac{1}{(1-\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle)^{\lambda+n+1}}$$

- Oberven: $\operatorname{Re}(1-\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle) > 0$ para todo $\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{B}^n$
- Por lo tanto, $(\mathbf{v},\mathbf{w}) \mapsto (1-\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle)^{\lambda+n+1}$ está bien definida para $\lambda > -1$.

Toeplitz Operators On Bergman Spaces

- Para $f \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$, definimos

$$\begin{array}{rcl} M_f : L^2_\lambda & \to & L^2_\lambda \\ g & \to & fg \end{array}$$

- El operador de **Toeplitz con símbolo** f es el mapeo: $T_f = T_f^{(\lambda)} : \mathcal{H}_\lambda \to \mathcal{H}_\lambda$ dado por

$$T_f^{(\lambda)} = B_\lambda M_f$$

El mapeo:

$$\begin{array}{rcl} T^{(\lambda)} : L^\infty(\mathbb{B}^n) & \to & \mathcal{B}(\mathcal{H}_\sigma) \\ f & \mapsto & T_f^{(\sigma)} \end{array}$$

es una "quantización":

- $T^{(\sigma)}$ is lineal,continua en norma, inyectiva
- $T_{\overline{f}} = (T_f)^*$ para cada $f \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$
- Hay una relación asymptótica $\{f, g\} \leftrightsquigarrow [T_f, T_g]$ for $f, g \in C^\infty(\mathbb{B}^n) \cap L^\infty(\mathbb{B}^n)$.
  (Por ejemplo, $[T_f, T_g] = 0$ implica que $\{f, g\} = 0$.)

El Caso $n = 1$

- Para el disco $\mathbb{D} = \mathbb{B}^1 = \mathrm{SU}(1,1)/S(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1))$ hay la medida
$$d\mu_\lambda(z) = (1 - |z|^2)^\lambda.$$
- Las funciones
$$\mathbf{z} \mapsto \left(\frac{k!\Gamma(\lambda + n + 1)}{\lambda + n + 1 + k}\right)^{-1/2} \mathbf{z}^k$$
para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ forman una base ortonormal para $\mathcal{H}_\lambda$.
- Entonces,
$$T_z(z^k) = z^{k+1}$$
y hay $c_k > 0$ tal que
$$T_{\overline{z}}(z^k) = c_k z^{k-1}.$$

- Si $f \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$ es holomorfa, entonces $T_f = M_f$.
- El álgebra de Banach generada por operadores de Toeplitz con symbols holomorfos es conmutativa (pero **no** es una C^*-algebra).
- Si T_f es normal (e.g., si f es puramente real or imaginaria), entonces genera una C^*-algebra conmutativa.
- ¿Hay más ejemplos?
- Truco: G (y su cubierta universal $\widetilde{G}$) actúan sobre *símbolos* en $L^\infty(\mathbb{B}^n)$ por translación por la izquierda:

$$\phi_h(\mathbf{z}) = \phi(h^{-1} \cdot \mathbf{z})$$

para $h \in G$ y $\phi \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$.

Theorem

1. *(R. Quiroga, N. Vasilevski) Sea H un subgrupo abeliano maximal de $SU(n,1)$. Entonces la C^*-algebra generada por símbolos H-invariantes en $L^\infty(\mathbb{B}^n)$ es conmutativa.*
2. *(S. Grudsky, R. Quiroga, N. Vasilevski) Para $n = 1$, todas las C^*-algebras generadas por operadores de Toeplitz que son maximalmente conmutativas para todo λ tienen esta forma.*

Proof: Geometría Kähleriana y muchos cálculos. Parte (2) usa que si $f, g \in C^\infty(\mathbb{B}^n) \cap L^\infty(\mathbb{B}^n)$ tales que $[T_f, T_g] = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= 0 \\ \{f, \Delta g\} + \{\Delta f, g\} &= 0 \\ \{\Delta f, \Delta g\} + \{f, \Delta^2 g\} + \{\Delta^2 f, g\} &= 0 \end{aligned}$$

Definition

Sean G un grupo y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Una **representación unitaria** de G sobre $\mathcal{H}$ es un homomorfismo

$$\pi : G \to \mathrm{U}(\mathcal{H}).$$

- Un subespacio cerrado $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ es un **subespacio** G-**invariante** si
$$\pi(g)v \in \mathcal{K}$$
para todo $g \in G$ y $v \in \mathcal{K}$. En tal caso π se restringe a una representación unitaria de G sobre $\mathcal{K}$ que se llama una **subrepresentación**.
- Se dice que π es **irreducible** si $\{0\}$ y $\mathcal{H}$ son los únicos subespacios invariantes.

Representaciones: Un Ejemplo

- Ejemplo: G un grupo de Lie
- Existe una medida invariante bajo traslaciones izquierdas:

$$\int_G f(x)dx = \int_G f(gx)dx$$

para todo $f \in C_c(G)$ y $g \in G$.

- Definimos una representación unitaria $(L, L^2(G))$ por:

$$L(g)f(x) = f(g^{-1}x).$$

Se llama la **representación regular**.

Representaciones: Los Morfismos

Definition

Sean $(\pi, \mathcal{H})$ y $(\rho, \mathcal{K})$ representaciones unitarias G. Un **operador de entrelace entre** π **y** ρ es un operador lineal continuo $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ tal que

$$T\pi(g) = \rho(g)T$$

para todo $g \in G$.

- En la categoría de representaciones unitarias de G, los morfismos son los operadores de entrelace.
- Decimos que $(\pi, \mathcal{H})$ y $(\rho, \mathcal{K})$ son equivalentes si existe un operador de entrelace $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ invertible.

La Serie Discreta

- Fijamos $\lambda \in \mathbb{N}$. Definimos $j_\lambda : G \times \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ por:

$$j_\lambda\left(\left(\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array}\right), \mathbf{z}\right) = \frac{1}{(C\mathbf{z} + D)^{\lambda+n+1}}$$

- j_λ es un **cociclo**:

$$j_\lambda(g_1 g_2, \mathbf{z}) = j_\lambda(g_1, g_2 \cdot \mathbf{z}) j_\lambda(g_2, \mathbf{z})$$

- La fórmula para $j_\lambda : G \times \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ no está bien definida si $\lambda \notin \mathbb{N}$
- Si nos levantamos a la cubierta universal $\widetilde{G}$, se tiene

$$\widetilde{j_\lambda} : \widetilde{G} \times \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$$

que se puede definir para $\lambda > -1$.

La Serie Discreta Holomorfa

- Definimos una representación unitaria $(\pi_\lambda, \mathcal{H}_\lambda)$ de G por

$$\pi_\lambda(g)f(\mathbf{z}) = j_\lambda(g^{-1}, \mathbf{z})f(g^{-1} \cdot \mathbf{z})$$

  para $f \in \mathcal{H}_\lambda$ y $g \in \mathbb{G}$.
- π_λ es irreducible
- La familia $\{\pi_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{N}}$ se llama **la serie discreta holomorfa** de representaciones irreducibles de G.
- Se dice "discreta" por que aparecen como representaciones discretas de la representación regular $(L, L^2(G))$ de G.

La (Continuación Analítica de la) Serie Discreta Holomorfa

- Si $\lambda > -1$, definimos una representación unitaria $(\pi_\lambda, \mathcal{H}_\lambda)$ de $\widetilde{G}$ por
$$\pi_\lambda(g)f(\mathbf{z}) = \widetilde{j_\lambda}(g^{-1}, \mathbf{z})f(g^{-1} \cdot \mathbf{z})$$
para $g \in \widetilde{G}$ y $f \in \mathcal{H}_\lambda$.
- π_λ también es irreducible
- Se llaman **representaciones de la continuación analítica de la serie discreta holomorfa**.

Espacios Simétricos Hermitianos

Definition

Un espacio cociente $D = G/K$ es un **espacio simétrico Hermitiano** si G es un grupo de Lie semisimple, K es el subgrupo compact maximal, y $\dim Z(K) = 1$.

Todo lo de Toeplitz y la serie discreta se generaliza al caso de cualquier espacio simétrico Hermitiano.

Los unicos ejemplos son:

1. $D = \mathrm{SU}(n, m)/S(\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(m))$ para $n, m \in \mathbb{N}$.
2. $D = \mathrm{SO}(n, 2)/(\mathrm{SO}(n) \times \mathrm{SO}(2))$ para $n \in \mathbb{N}$.
3. $D = \mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n)$ para $n \in \mathbb{N}$.
4. $D = \mathrm{SO}(2n)/\mathrm{U}(n)$ para $n \in \mathbb{N}$.
5. $D = \mathrm{ad}(E_6)/(\mathrm{SO}(10) \times \mathrm{SO}(2))$
6. $D = \mathrm{ad}(E_7)/(E_6 \times \mathrm{SO}(2))$

Lemma (D., G. Ólafsson, R. Quiroga)

Sea $\lambda > p-1$. *Entonces*

$$\pi_\lambda(h)\circ T_\varphi^{(\lambda)} = T_{\varphi_h}^{(\lambda)}\circ\pi_\lambda(h),$$

for every $\varphi\in L^\infty(D)$ *and* $h\in\widetilde{G}$.

Proof.

First note $\pi_\lambda(h)\circ M_\varphi = M_{\varphi_h}\circ\pi_\lambda(h)$, for every $\varphi\in L^\infty(D)$ and $h\in\widetilde{G}$: for any $f\in\mathcal{H}^2_\lambda(D)$, $h\in\widetilde{G}$ and $z\in D$, we have

$$\begin{aligned}\pi_\lambda(h)M_\varphi f(z) &= \varphi(h^{-1}z)f(h^{-1}z)j_\lambda(h^{-1},z)\\ &= M_{\varphi_h}\pi_\lambda(h)f(z).\end{aligned}$$

$\square$

Proof.

Then for every $f, g \in \mathcal{H}^2_\lambda(D)$ and $h \in \widetilde{G}$

$$\begin{aligned}\langle \pi_\lambda(h) \circ T^{(\lambda)}_\varphi f, g\rangle &= \langle B_\lambda \circ M_\varphi f, \pi_\lambda(h^{-1})g\rangle \\ &= \langle M_\varphi f, \pi_\lambda(h^{-1})g\rangle \\ &= \langle M_{\varphi_h} \circ \pi_\lambda(h)f, g\rangle \\ &= \langle T^{(\lambda)}_{\varphi_h} \circ \pi_\lambda(h)f, g\rangle.\end{aligned}$$

$\square$

Corollary (D., G. Ólafsson, R. Quiroga)

Supongamos que $\widetilde{H}$ es un subgroup de $\widetilde{G}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes para todo $\varphi \in L^\infty(D)$.

1. *El símbolo φ es $\widetilde{H}$-invariant: $\varphi(h \cdot z) = \varphi(z)$ para todo $h \in \widetilde{H}$ y casi todo $z \in D$.*
2. *El operator de Toeplitz $T_\varphi^{(\lambda)}$ entrelaza la restricción $\pi_\lambda|_{\widetilde{H}}$: $\pi_\lambda(h) \circ T_\varphi^{(\lambda)} = T_\varphi^{(\lambda)} \circ \pi_\lambda(h)$ para todo $h \in \widetilde{H}$.*

Multiplicity-Free Restrictions

Suppose H is a Type I subgroup of G (e.g., H reductive or nilpotent). Then $\pi_\lambda|_H$ has a decomposition:

$$\pi_\lambda|_H \cong \int_{\widehat{H}}^{\oplus} m(\rho)\rho d\nu(\rho)$$

for some Borel measure $d\nu$ on $\widehat{H}$ and $m(\rho) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ for each $\rho \in \widehat{H}$ is the **multiplicity** of ρ in π_λ.

Definition

If $m(\rho) = 1$ for almost all ρ in $\widehat{H}$, then $\pi_\lambda|_H$ is **multiplicity-free**.

Multiplicity-Free Restrictions

Theorem

If $(\pi, \mathcal{H})$ is a unitary representation of a Type I group H, then it is multiplicity-free if and only if the algebra $\mathrm{Hom}_H(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ of intertwining operators (i.e., operators $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ such that $\pi(h)T = T\pi(h)$ for all $h \in H$) is commutative.

Theorem (D., G. Ólafsson, R. Quiroga)

Let H be a closed subgroup of G such that $\pi|_{\widetilde{H}}$ is multiplicity-free. Then the Toeplitz operators with H-invariant symbols generate a commutative C^*-algebra.

Examples of Multiplicity-Free Restrictions

We now have many examples, including the first examples for symmetric spaces of rank > 1.

Theorem (T. Kobayashi)

If H is a symmetric subgroup of G (i.e., $H = G^\theta$ for some involution $\theta : G \to G$), then $\pi|_{\widetilde{H}}$ is multiplicity-free.

Corollary

In the case $\mathbb{B}^n = \mathrm{SU}(n,1)/S(\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(1))$ with $n \geq 1$, the C^*-algebras of Toeplitz operators generated by symbols invariant under maximal abelian subgroups do **not** *provide all examples of maximal abelian C^*-algebras of Toeplitz operators.*

$\mathfrak{g}$	D^τ complex	D^τ totally real
$\mathfrak{su}(n,m)$ $\mathfrak{su}(2n,2m)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(i,j)\times\mathfrak{u}(n-i,m-j))$	$\mathfrak{so}(n,m)$ $\mathfrak{sp}(n,m)$
$\mathfrak{su}(n,n)$	$\mathfrak{so}^*(2n)$ $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})\times\mathbb{R}$
$\mathfrak{so}^*(2n)$ $\mathfrak{so}^*(4n)$	$\mathfrak{so}^*(2i)\times\mathfrak{so}^*(2(n-i))$ $\mathfrak{u}(i,n-i)$	$\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$ $\mathfrak{su}^*(2n)\times\mathbb{R}$
$\mathfrak{so}(2,n)$ $\mathfrak{so}(2,2n)$	$\mathfrak{so}(2,i)\times\mathfrak{so}(n-i)$ $\mathfrak{u}(1,n)$	$\mathfrak{so}(1,i)\times\mathfrak{so}(1,n-i)$
$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})$	$\mathfrak{u}(i,n-i)$ $\mathfrak{sp}(i,\mathbb{R})\times\mathfrak{sp}(n-i,\mathbb{R})$	$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$
$\mathfrak{e}_{6(-14)}$	$\mathfrak{so}^*(10)\times\mathfrak{so}(2)$ $\mathfrak{so}(8,2)\times\mathfrak{so}(2)$ $\mathfrak{su}(5,1)\times\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ $\mathfrak{su}(4,2)\times\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{f}_{4(-20)}$ $\mathfrak{sp}(2,2)$
$\mathfrak{e}_{7(-25)}$	$\mathfrak{e}_{6(-14)}\times\mathfrak{so}(2)$ $\mathfrak{so}(10,2)\times\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ $\mathfrak{so}^*(12)\times\mathfrak{su}(2)$ $\mathfrak{su}(6,2)$	$\mathfrak{e}_{6(-26)}\times\mathfrak{so}(1,1)$ $\mathfrak{su}^*(8)$

Theorem (D., G. Ólafsson, R. Quiroga)

If H is a compact subgroup of G, then the following conditions are equivalent.

1. *The H-invariant symbols generate a commutative family of Toeplitz operators for every weight $\lambda > p - 1$.*
2. *The restriction $\pi_\lambda|_{\widetilde{H}}$ is multiplicity-free.*

Corollary

In the case $G/K = \mathrm{SU}(n, m)/S(\mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(m))$ with $n, m > 1$, the diagonal subgroup of G is maximal abelian but does **not** *generate a commutative family of Toeplitz operators.*

Ingredients in the Proof

- Let H be a compact subgroup of G. For each $\phi \in L^\infty(D)$, set $\widehat{\phi} \in L^\infty$ by

$$\widehat{\phi}(z) = \int_H \phi_h(z)dh = \int_H \phi(h^{-1} \cdot z)dh$$

- For any $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\lambda)$, the map $h \mapsto \pi_\lambda(h) T_\phi \pi_\lambda(h^{-1})$ descends from $\widetilde{H}$ to H. Define $\widehat{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\lambda)$ by

$$\widehat{T} = \int_H \pi_\lambda(h) T \pi_\lambda(h^{-1}) dh.$$

Ingredients in the Proof

Lemma

For each $\phi \in L^\infty(D)$ and $\lambda > p-1$,

$$\widehat{T_\phi^{(\lambda)}} = T_{\widehat{\phi}}^{(\lambda)}.$$

Theorem (M. Englis)

For any finite-dimensional subspace $V \subseteq \mathcal{H}_\lambda$ and any linear map $S : V \to V$, there is a Toeplitz operator T_ϕ with a smooth, compactly-supported symbol ϕ such that

$$\langle Tv, w \rangle = \langle Sv, w \rangle$$

for all $v, w \in V$.

Los Símbolos Radiales

- Si $D = G/K = \widetilde{G}/\widetilde{K}$ es un espacio simétrico Hermitiano, entonces $\pi_\lambda|_{\widetilde{K}}$ tiene multiplicidad uno para cada $\lambda > -1$ y admite una descomposición discreta.
- Por lo tanto, los operadores de Toeplitz $T_f \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\lambda)$ donde f es radial (i.e., K-invariante) conmutan entre si.
- ¿Cuál es el espectro de un operador de Toeplitz con símbolo radial?

Símbolos Radiales para $\mathbb{B}^n = G/K = \mathrm{SU}(n,1)/S(\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(1))$

- La descomposición de $\pi_\lambda|_{\widetilde{K}}$ está dada por:

$$\mathcal{H}_\lambda \cong_{\widetilde{K}} \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{P}^k(\mathbb{C}^n),$$

  donde $\mathcal{P}^k(\mathbb{C}^n)$ es el espacio de polinomios de n variables complejos que son homogeneos de grado k.
- Si $f \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$ es radial, entonces el eigenvalor de T_f sobre el espacio $\mathcal{P}^k(\mathbb{C}^n)$ es:

$$\frac{2 \int_0^1 f(r) r^{2n+2k-1}(1-r^2)^\lambda dr}{B(n+k, \lambda+1)}$$

Símbolos Radiales para $D = G/K = \mathrm{SU}(n,n)/S(\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(n))$

- La descomposición de $\pi_\lambda|_{\widetilde{K}}$ está dada por:

$$\mathcal{H}_\lambda \cong_{\widetilde{K}} \bigoplus_{\mu \in \Delta} = V_\mu,$$

donde

$$\Delta = \{(\mu_1, \cdots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n | \mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n \geq 0\}$$

y V_μ es un espacio que corresponde a una representación irreducible de $\mathrm{U}(n)$.

- (D., R. Quiroga) Si $f \in L^\infty(D)$ is radial, entonces el eigenvalor de T_f sobre el espacio V_μ

$$\frac{\int_{0<a_1<\ldots a_n<1} f(a) \left(\sum_{w \in S_n} a^{2w(\mu+\rho)} \right) \prod_{i=1}^{n} \left(a_i (1-a_i^2)^\lambda \right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j^2 - a_i^2)\, da_1 \cdots da_n}{\int_{0<a_1<\ldots a_n<1} \left(\sum_{w \in S_n} a^{2w(\mu+\rho)} \right) \prod_{i=1}^{n} \left(a_i (1-a_i^2)^\lambda \right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j^2 - a_i^2)\, da_1 \cdots da_n}$$

¡Gracias por venir!