Temas Sugeridos Para Pláticas Estudiantiles:

1 Operadores de entrelace entre representaciones en la serie principal generalizada

Recordamos la definición de la serie principal y el valor de sus caracteres: sea G un grupo semisimple lineal con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y involución de Cartan θ. Escribimos $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ como siempre, y escogemos una subálgebra de Lie abeliana máxima $\mathfrak{a}$ en $\mathfrak{p}$. Sea K el subgrupo de G correspondiente a $\mathfrak{k}$ y $M = Z_K(\mathfrak{a})$ el centralizador de $\mathfrak{a}$ en K. Escribimos $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ para el sistema de raíces, y escogemos un subconjunto Σ^+ de raíces positivas. Como siempre, tenemos las descomposiciones de Iwasawa $G = KAN$ y $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. Finalmente, escribimos $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \alpha \in \mathfrak{a}^*$.

Seleccionamos $\lambda \in (\mathfrak{a}^*)_{\mathbb{C}}$, que nos da una representación unidimensional de A por $a \to a^\lambda$. También escogemos una representación irreducible $\xi \in \widehat{M}$ (actuando sobre un espacio vectorial V_ξ) y construimos la representación $\xi \otimes \lambda \otimes 1$ de MAN sobre V_ξ. La representación $\pi_{\lambda,\xi}$ en la serie principal es definida por $\pi_{\lambda,\xi} = \operatorname{Ind}_{MAN}^G \xi \otimes \lambda \otimes 1$.

Como vimos en clase, es posible escribir $\pi_{\lambda,\xi}$ como lo siguiente. Sea $\mathcal{H}_\xi$ el espacio vectorial dado por:

$$\mathcal{H}_\xi = \left\{ f : K \to V_\xi \;\middle|\; \begin{array}{l} f(km) = \xi(m)^{-1} f(k) \text{ para } k \in K,\, m \in M \\ f \in L^2(K, V_\xi) \end{array} \right\}.$$

En particular, si ξ es una representación unidimensional de M, entonces $\mathcal{H}_\xi$ es un subespacio cerrado de $L^2(K)$. La acción de G está dada por:

$$\pi_{\lambda,\xi}(g) f(u) = a(g^{-1}u)^{-\lambda-\rho} f(k(g^{-1}u))$$

donde $g \in G$, $u \in K$, y $f \in cH_\xi$. Como siempre, usamos la notación $g = k(g)a(g)n(g) \in G$ para describir la descomposición de un elemento de G entre partes en K, A, y N.

En clase, calculamos el carácter $\theta_{\lambda,\xi}$ de $\pi_{\lambda,\xi}$ para $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{F})$ para $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. En esos casos, el grupo $H = MA$ es un subgrupo de Cartan de G. Usábamos la notación

$$\begin{aligned} G_H &= ghg^{-1} \in G | g \in G \\ G'_H &= \overline{G_H} = \{g \in G | \text{ eigenvalores de } g \text{ son distinctos y caen en } \mathbb{F}\} \end{aligned}$$

Luego, definimos

$$\Delta(h) = \begin{cases} \prod_{i<j} (h_i - h_j) & \text{si } \mathbb{F} = \mathbb{R} \\ \prod_{i<j} (h_i - h_j)^2 & \text{si } \mathbb{F} = \mathbb{C} \end{cases}$$

para todo $h = \mathrm{diag} h_1, \ldots, h_n \in H$. Finalmente, vimos que el carácter de $\pi_{\lambda,\xi}$ está dado por

$$\theta_{\lambda,\xi}(g) = 0 \text{ si } g \notin G'_H$$
$$\theta_{\lambda,\xi}(h) = \frac{1}{|\Delta(h)|} \sum_{w \in W} \chi(wh),$$

donde $\chi : H \to \mathbb{C} \backslash \{0\}$ es el (cuasi-)carácter de $H = MA$ dado por $\chi(ma) = \xi(m) a^{\lambda}$ y $W = N_G(H)/H$ es el grupo de Weyl para el grupo de Cartan H. A veces escribimos $\pi_\chi = \pi_{\lambda,\xi}$ para simplificar la notación.

Si $w \in W$, escribimos χ^w para el (cuasi-)carácter de H dado por $\chi^w(h) = \chi(wh)$. Es claro que el carácter de π_χ es lo mismo como el carácter de π_{χ^w}. Entonces, esperamos que π_χ sea de hecho equivalente a π_χ^w para cada $w \in W$ y cada (cuasi-)carácter $\chi = (\xi, \lambda)$. De hecho, este es cierto, y hay operadores de entrelace canónicos entre π_χ y π_χ^w.

1.1 Operadores de entrelace à la Knapp y Stein

Hay varias maneras de escribir estos operadores de entrelace. La primera, cuya teoría es debido a Knapp y Stein, es una generalización de la teoría de Mackey de operadores de entrelace entre representaciones inducidas para grupos finitos. Es decir, Mackey describió un método para escribir todos los operadores de entrelace entre representaciones $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ y $\mathrm{Ind}_{H'}^G \sigma'$, donde G es un grupo finite con subgrupos H y H' y donde σ y σ' son representaciones de H y H', respectivamente. En el caso de grupos finitos, hay una isomorfismo natural entre el espacio vectorial de operadores de entrelace entre esos representaciones y el espacio de todas las funciones sobre el espacio de coconjuntos dobles $H \backslash G / H'$ y puedes escribir los operadores de entrelace en términos de sumas sobre subgrupos.

Es posible escribir (por lo menos formalmente) las mismas cosas en el caso de G un grupo semisimple lineal no-compacto y $H = H' = MAN$, pero los detalles pueden ser difíciles en general. Una idea para esta plática seria (1) describir brevemente la teoría de operadores de entrelace entre representaciones inducidas de grupos finitos y (2) escribir los operadores de entrelace estándares entre π_χ y π_{χ^w} en términos de transformadas integrales para el caso de $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ (y tal vez para $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ o $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$).

1.2 Operadores de entrelace à la Branson, Ólafsson, y Ørsted

Además de esa teoría, es posible describir los operadores de entrelace en términos de la descomposición espectral con respecto a los K-tipos de las representaciones en la serie principal. Es decir, las representaciones π_χ y π_{χ^w} son equivalentes bajo la acción de K y por lo tanto tienen los mismos K-tipos en las descomposiciones de $\mathcal{H}_\chi$ y $\mathcal{H}_{\chi^w}$ bajo la acción de K. Es decir, si escribimos

$$\mathcal{H}_\chi \cong_K \bigoplus_{\sigma \in \widehat{K}} (\mathcal{H}_\chi)_\sigma$$
$$\mathcal{H}_{\chi^w} \cong_K \bigoplus_{\sigma \in \widehat{K}} (\mathcal{H}_{\chi^w})_\sigma,$$

entonces cualquier operador de G-entrelace entre $\mathcal{H}_\chi$ y $\mathcal{H}_{\chi^w}$ tiene que restringir a un operador de K-entrelace entre $(\mathcal{H}_\xi)_\sigma$ y $(\mathcal{H}_{\chi^w})_\sigma$. Si cada $(\mathcal{H}_\xi)_\sigma$ y $(\mathcal{H}_{\chi^w})_\sigma$ es *irreducible* bajo la acción de K (es decir, cada $\sigma \in \widehat{K}$ tiene multiplicidad por lo mas de uno en $\mathcal{H}_\chi$ y $\mathcal{H}_{\chi^w}$), entonces distintos operadores de G-entrelace solo pueden diferir, en cada subespacio $(\mathcal{H}_\chi)_\sigma$, por un múltiplo constante.

En el caso de $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{F})$, tenemos que $\mathcal{H}_\chi$ y $\mathcal{H}_{\chi^w}$ son de hecho *iguales* como subespacios de $L^2(K)$. Entonces, a veces es posible escribir un operador de entrelace entre π_χ y $\mathcal{H}_{\chi^w}$ explícitamente, porque actúa como múltiplos constantes en cada K-tipo, y puedes escribir cuales son los constantes. Un artículo de Branson, Ólafsson, y Ørsted [1] describe como calcular estos constantes en una manera muy elegante. El artículo [2] también puede ser interesante. En esta plática, podrías hablar brevemente del método de operadores de generación del espectro y después dar un ejemplo de cálculos para $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

1.3 Representaciones en la serie complementaria

Ya sabemos que la representación $\pi_{\lambda,\xi}$ es unitaria si $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$ (es decir, cuando λ sea imaginario puro). Pero una sorpresa es que en algunos casos, $\pi_{\lambda,\xi}$ también es unitarizable (con una otra producto interno para el espacio de Hilbert) cuando $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ tenga valores reales.

Sea I la representación trivial de M. El truco es construir, por ejemplo en el caso $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, un operador $J : \mathcal{H}_I \to \mathcal{H}_I$ que entrelaza las representaciones $\pi_{-\lambda,I}$ y $\pi_{\lambda,I}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ (para λ real). Al mismo tiempo, el producto interno de $\mathcal{H}_I$ tiene la propiedad que:

$$\langle \pi_{\lambda,I}(g)v, w\rangle = \langle v, \pi_{-\lambda,I}(g)w\rangle$$

para $v, w \in \mathcal{H}_I$ y $g \in G$. Entonces (por lo menos formalmente), es posible construir un nuevo producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ para $\mathcal{H}_I$ por

$$\langle v, w\rangle_c = \langle v, Jw\rangle$$

para $v, w \in \mathcal{H}_I$. Puedes verificar que, por lo menos formalmente, $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ es un producto interno con respecto de que $\pi_{\lambda,I}$ es unitaria. Hay que tener cuidado, sin embargo, porque los detalles solo funcionan correctamente cuando $0 < \lambda < 1$ para $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ (y cuando $0 < \lambda < 2$ para $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

En esta plática, la idea sería definir la serie complementaria para $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ y/o $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ y hablar de irreducibilidad, del calculo de los caracteres, etc. Yo sugería Sugiura para cálculos elementales y puedes hablar conmigo para otras referencias.

2 Otras Posibilidades Para Pláticas

- Hablar de eigendistribuciones invariantes (como, por ejemplo, la materia en Capítulo 7 del libro por Varadarajan). En particular, para el grupo $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, esto involucraría hablar de los teoremas de regularidad (que dice que dichas distribuciones son analíticas sobre el conjunto de elementos regulares de G) y de condiciones de "matching" de Harish-Chandra (que describe las discontinuidades de saltos en la frontera del conjunto de elementos regulares de G).
- Hablar del comportamiento asintótico de los coeficientes de matriz para representaciones de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (esta materia aparece en Capítulo 7 de Varadarajan.
- Hablar de la continuación analítica de la serie discreta holomorfa para grupos semisimples. En particular, hay varios artículos que podría compartir si quieres hablar de este tema, por ejemplo el artículo famoso por Wallach que introduce el "conjunto de Wallach," un extraño conjunto finito en el parámetro de la serie discreta en que puedes definir una representación con alto peso. También hay artículos por Vergne y Rossi y también por Faraut.

References

[1] Thomas Branson, Gestur Ólafsson, y Bent Ørsted. *Spectrum Generating Operators and Intertwining Operators for Representations Induced from a Maximal Parabolic Subgroup*, J. Funct. Anal. **135** (1996), 163–205. `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022123696900087`

[2] Gestur Ólafsson, Angela Pasquale. The $\cos^\lambda$ and $\sin^\lambda$ transforms as intertwining operators between generalized principal series representations of $\mathrm{SL}(n+1,K)$. Adv. Math. **229** (2012), 267–293.

`http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870811003161`