Tarea Opcional: Convergencia Uniforme y la Integral

1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo, sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $f_n : A \to \mathbb{R}$ que son integrables (en el sentido de Riemann) tal que

$$f_n \to f \text{ (Uniformemente)},$$

entonces $f : A \to \mathbb{R}$ es integrable y, además,

$$\int_A f = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n,$$

o sea,

$$\int_A \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n.$$

Pista: Para demostrar la integrabilidad de f, hay dos opciones. Se puede demostrarla por considerar particiones de A, o se puede demostrarla por usar el Teorema de Lesbegue (que dice que una función sobre A es integrable si y solo si es acotada y el conjunto do puntos donde no es continua tiene medida cero).

Si quieres usar el Teorema de Lesbegue, puede ser útil considerar el conjunto

$$S = \{x \in A \mid \text{hay } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } f_n \text{ no es continua en } x\}.$$

¿Es un conjunto de medida cero? ¿Por qué? Puedes demostrar que f es continua en todos los puntos en $A \backslash S$?

Una vez que tengas que f es integrable, puedes usar la desigualdad triangular para integrales (que dice que $|\int_A g| \leq \int_A |g|$ para todo $g : A \to \mathbb{R}$ integrable).

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la función $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ por:

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2x, & x \in \left[0, \frac{1}{2n}\right] \\ 4n - 4n^2x, & x \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right] \\ 0, & x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Demuestra que $f_n \to 0$ (Puntualmente) pero

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n \neq 0.$$

3. Construye una sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ que son continuas (y por lo tanto acotadas y no negativas y convergen puntualmente a la función constante cero, pero tal que $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n = \infty$.

4. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado. Considere el espacio de Banach $C(A) = C(A, \mathbb{R})$ de funciones continuas sobre el conjunto compacto A. Recuerden que esa topología está dada por una norma $|| \cdot ||_\infty$ definida por

$$||f||_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|$$

para cada $f \in C(A)$, la cual está bien definida por que toda función continua sobre un compacto está acotada.

Por lo anterior, $C(A)$ es un espacio métrico con la métrica

$$d(f, g) = ||f - g||_\infty$$

para cada $f, g \in C(A)$.

Sea $g \in C(A)$. Entonces el mapa $I : C(A) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(f) = \int_A fg$$

está bien definido, ya que fg es el producto de dos funciones integrables. Demuestra que I es lineal y continua (se dice que I es *una funcional lineal continua*).

Pista: Como $C(A)$ y R son espacios métricos, se puede usar la version secuencial de la definición de continuidad, junto con el problema (1).