

# Análisis espectral de gráficas $k$ -distantes: productos libre, estrella y cartesiano, y gráficas aleatorias.

Tulio Gaxiola

CIMAT

25 de enero de 2016

Seminario de Probabilidad Libre

1 Productos de Gráficas

2 Gráfica  $k$ -distante del Producto Cartesiano

3 Gráfica  $k$ -distante del Producto Estrella

4 Gráfica  $k$ -distante del Producto Libre

# Productos de Gráficas

# Producto Cartesiano

## Definición

Sean  $G_1 = (V_1, E_1)$  y  $G_2 = (V_2, E_2)$  dos gráficas. El **producto directo** (cartesiano) de  $G_1$  con  $G_2$  está denotado por  $G_1 \times G_2$  es la gráfica con conjunto de vértices  $V = V_1 \times V_2$  y conjunto de aristas  $E$ , de tal forma que para  $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V_1 \times V_2$  el arista  $e = (v_1, w_1) \sim (v_2, w_2) \in E$  si y solo si alguna de las condiciones se satisfacen

1.  $v_1 = v_2$  y  $w_1 \sim w_2$
2.  $v_1 \sim v_2$  y  $w_1 = w_2$ .

# Producto Cartesiano

## TLC Cartesiano

### Teorema

Sea  $G = (V, E)$  una gráfica finita conexa. Sea  $G^N$  el producto directo de la gráfica  $G$  consigo misma  $N$  veces, y sea  $A_{G^N}$  su matriz de adyacencia, entonces se cumple que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_{tr} \left( \left( \frac{A_{G^N}}{\sqrt{N} \left( \frac{|V|}{2|E|} \right)^{1/2}} \right)^m \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{-x^2/2} dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

## Definición

Sean  $G_1 = (V_1, E_1, r_1)$  y  $G_2 = (V_2, E_2, r_2)$  dos gráficas con raíz. El **producto booleano (o estrella)** de  $G_1$  con  $G_2$ , denotado por  $G_1 \star G_2$  es la gráfica con conjunto de vértices  $V = V_1 \times V_2$  y conjunto de aristas  $E$ , de tal forma que para  $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V_1 \times V_2$  el arista  $e = (v_1, w_1) \sim (v_2, w_2) \in E$  si y sólo si alguna de las condiciones se satisfacen

1.  $v_1 = v_2 = r_1$  y  $w_1 \sim w_2$
2.  $v_1 \sim v_2$  y  $w_1 = w_2 = r_2$ .

### Teorema

Sea  $G = (V, E, e_1)$  una gráfica finita conexa con raíz. Para  $N \geq 1$ , sea  $A_{G^*N}$  la matriz de adyacencia del producto booleano de  $G$  consigo misma  $N$  veces, entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_1 \left( \left( \frac{A_{G^*N}}{\sqrt{N} \deg(e_1)} \right)^m \right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^m (\delta_{-1} + \delta_1) dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

# Producto Libre

Sean  $(G_i, e_i) = (V_i, E_i, e_i)$  gráficas con raíz, donde  $i \in I$ , con  $I$  un conjunto de índices finito. El *producto libre de conjuntos con raíz*  $(V_i, e_i)$ ,  $i \in I$ , se define como el conjunto con raíz  $(*_{i \in I} V_i, e)$ , donde

$$*_{i \in I} V_i = \{e\} \cup \left\{ v_1 v_2 \cdots v_m : v_k \in V_{i_k}^0 \text{ y } i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_m, m \in \mathbb{N} \right\},$$

y  $e$  es la palabra vacía.

## Definición

El **producto libre de gráficas con raíz**  $(G_i, e_i)$ ,  $i \in I$ , se define como la gráfica con raíz  $(*_i \in I G_i, e)$  con conjunto de vértices  $*_i \in I V_i$  y conjunto de aristas  $*_i \in I E_i$  el cual esta definido por

$$*_i \in I E_i := \left\{ (vu, v'u) : (v, v') \in \bigcup_{i \in I} E_i \text{ y } u, vu, v'u \in *_i \in I V_i \right\}.$$

Este producto se denota como  $*_i \in I (G_i, e_i)$  o simplemente  $*_i \in I G_i$ .

### Teorema

*Sea  $G = (V, E, e)$  una gráfica finita conexa. Sea  $A_N$  la matriz de adyacencia de la gráfica  $G^{*N}$ , y sea  $\sigma$  el número de vecinos de  $e$  en la gráfica  $G$ . Entonces, la distribución con respecto a  $\varphi_1$  de  $(N\sigma)^{-1/2}A_N$  converge en momentos (y por lo tanto débilmente), cuando  $N \rightarrow \infty$ , a una variable con ley semicircular.*

## Gráfica $k$ -distante del Producto Cartesiano

# Gráfica $k$ -distante

## Definición

Dada una gráfica  $G = (V, E)$  y un número entero positivo  $k$  definimos a la **gráfica  $k$ -distante** como  $G^{[k]} = (V, E^{[k]})$ , con

$$E^{[k]} = \{(x, y) : x, y \in V, \partial_G(x, y) = k\},$$

donde  $\partial_G$  es la distancia gráfica.

# Gráfica $k$ -distante del Producto Cartesiano

Caso Particular  $k = 2$

$G^N = K_2 \times \cdots \times K_2$  : El hipercubo  $N$ -dimensional

$G^{[N,k]}$  : La gráfica  $k$ -distante de  $G^N$  ( $1 \leq k \leq N$ )

## Teorema (Kurihara & Hibino 2011)

Para  $k = 2$  y  $m \geq 1$ , se tiene que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_{tr} \left( \left( \left( \frac{A^{[N,2]}}{\binom{N}{2}^{1/2}} \right)^m \right) \right) = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\infty} x^m \frac{e^{-(\sqrt{2}x+1)/2}}{\sqrt{\pi(\sqrt{2}x+1)}} dx.$$

Es decir,  $\frac{A^{[N,2]}}{N} \xrightarrow{m} \frac{1}{2} \tilde{H}_2(g)$ .

- Prueba por descomposición cuántica. (Caso  $k \geq 3$  no cubierto).
- La distribución de  $\frac{\tilde{H}_2(g)}{\sqrt{2}} = \frac{g^2-1}{\sqrt{2}}$  es la distribución de  $\chi_1^2$  normalizada.

# Gráfica $k$ -distante del Producto Cartesiano

Hipercubo  $k \geq 1$

## Teorema (Obata 2012)

Sea  $k \geq 1$ , entonces se cumple que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_{tr} \left( \left( \frac{A^{[N,k]}}{N^{k/2}} \right)^m \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{k!} \tilde{H}_k(x) \right)^m \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

- $A^{[1]}A^{[k]} = (k+1)A^{[k+1]} + (N-k+1)A^{[k-1]}$
- $A^{[N,k]} = K_k^{(N)}(A^{[N,1]})/k!$ , donde  $K_k^{(N)}(x)$  son los polinomios de Krawtchouk normalizados, tales que son ortogonales con respecto a  $\beta_N = \sum_j \binom{N}{j} \frac{1}{2^j} \delta_{-N+2j}$
- $\beta_N \sim N(0, N)$  y  $N^{-k/2} K_k^{(N)}(\sqrt{N}x) \sim \tilde{H}_k(x)$

# Gráfica $k$ -distante del Producto Cartesiano

## Caso General

### Teorema (Hibino-Lee-Obata 2012)

Sea  $G = (V, E)$  una gráfica finita conexa, tal que  $|V| \geq 2$ . Para  $N \geq 1$  y  $k \geq 1$  sea  $G^{[N,k]}$  la gráfica  $k$ -distante de  $G^N = G \times \dots \times G$  (el producto cartesiano de  $G$  consigo misma  $N$  veces) y  $A^{[N,k]}$  la matriz de adyacencia de  $G^{[N,k]}$ , entonces para  $k \geq 1$  la distribución espectral de  $N^{-k/2} A^{[N,k]}$  converge en momentos, cuando  $N \rightarrow \infty$ , a la distribución de probabilidad de la variable aleatoria

$$\left( \frac{2|E|}{|V|} \right)^{k/2} \frac{1}{k!} \tilde{H}_k(g),$$

donde  $\tilde{H}_k$  es el polinomio mónico de Hermite de grado  $k$  y  $g$  es una variable aleatoria con distribución normal estándar  $N(0, 1)$ .

# Caso General (Hibino-Lee-Obata 2012)

Idea de la Prueba

Lema

$$A^{[N,k]} = B^{[N,k]} + C(N, k).$$

$$\frac{B^{[N,k]}}{N^{k/2}} \xrightarrow{m} \left( \frac{2|E|}{|V|} \right)^{k/2} \frac{1}{k!} \tilde{H}_k(g)$$

$$\frac{C(N, k)}{N^{k/2}} \rightarrow 0, \quad \Rightarrow \text{Resultado}$$

## Gráfica $k$ -distante del Producto Estrella

# Gráfica $k$ -distante del Producto Estrella

## Teorema (Arizmendi & Gaxiola 2015)

Sea  $G = (V, E, e_1)$  una gráfica finita conexa con raíz y sea  $k \in \{2, \dots, N\}$  tal que  $G^{[k]}$  es una gráfica no trivial. Sea  $A^{[*N,k]}$  la matriz de adyacencia asociada a la gráfica  $k$ -distante del producto booleano de  $G$  consigo misma  $N$  veces, sea  $V_e^{[k]}$  el conjunto de vecinos de  $e$  en la gráfica  $k$ -distante asociada a  $G$ , entonces se cumple que

$$\frac{A^{[*N,k]}}{\sqrt{N|V_e^{[k]}|}} \longrightarrow \frac{1}{2} (\delta_{-1} + \delta_1),$$

donde la convergencia es en distribución.

# Gráfica $k$ -distante del Producto Estrella

¡Resultado NO-trivial!

$$(G^{*N})^{[k]} \neq (G^{[k]})^{*N}$$

# Gráfica $k$ -distante del Producto Estrella

## Idea de la Prueba

### Lema (Del cuarto momento booleano)

Sea  $\{X_n\}_{n \geq 1} \subset (\mathcal{A}, \varphi)$ , una sucesión de variables aleatorias en un espacio de Probabilidad No-Conmutativo, tales que

$$\varphi(X_n) = 0 \quad \text{y} \quad \varphi(X_n^2) = 1 \quad \forall n \geq 1$$

Si  $\varphi(X_n^4) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ , entonces  $\mu_{X_n} \rightarrow b$ , donde  $b$  es una variable aleatoria con distribución de probabilidad Bernoulli simétrica centrada.

- Contar caminos  $\Rightarrow$  Resultado.

## Gráfica $k$ -distante del Producto Libre

# Árboles $d$ -regulares

- $\mathbb{T}_d :=$  Árbol  $d$ -regular.
- $\mathbb{T}_2 \stackrel{D}{=} b \boxplus b = b^{\boxplus 2} = \mu_2$ , donde

$$\mathbf{d}\mu_2 = \frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}\mathbf{d}x.$$

- En general:

$$\mathbb{T}_d \stackrel{D}{=} b^{\boxplus d} \Rightarrow \mathbb{T}_d \sim \mu_d,$$

con

$$\mathbf{d}\mu_d = \frac{d\sqrt{4(d-1)-x^2}}{2\pi(d^2-x^2)}\mathbf{d}x.$$

- $\mu_d$  es la distribución de Kesten-McKay.

# Gráfica $k$ -distante del Producto Libre

Caso Particular: Árboles  $d$ -regulares,  $d$  fija.

## Teorema

Sea  $d \geq 2$ ,  $k \geq 1$  y  $A_d^{[k]}$  la matriz de adyacencia de la gráfica  $k$ -distante del árbol  $d$ -regular. Entonces, la distribución con respecto a  $\varphi_1$  de  $A_d^{[k]}$  esta dada por la distribución de

$$T_k(z),$$

donde  $T_k$  son los polinomios definidos por  $T_1(x) = x$ ,  $T_2(x) = x^2 - d$  y la recurrencia

$$xT_k(x) = T_{k+1}(x) + (d - 1)T_{k-1}(x),$$

y  $z$  es una variable aleatoria con distribución de Kesten-McKay,  $\mu_d$ .

Si definimos los siguientes polinomios

$$\tilde{T}_k(x) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \sqrt{\frac{d-1}{d}} P_k(x) - \frac{1}{\sqrt{d(d-1)}} P_{k-2}(x), & k = 1, 2, 3, \dots, \end{cases}$$

entonces,  $T_k(x) = \tilde{T}_k(x/2\sqrt{d-1})$ , donde  $P_k$  es el  $k$ -ésimo polinomio de Chebyshev de segundo tipo.

# Caso Particular: Árboles $d$ -regulares

Idea de la Prueba

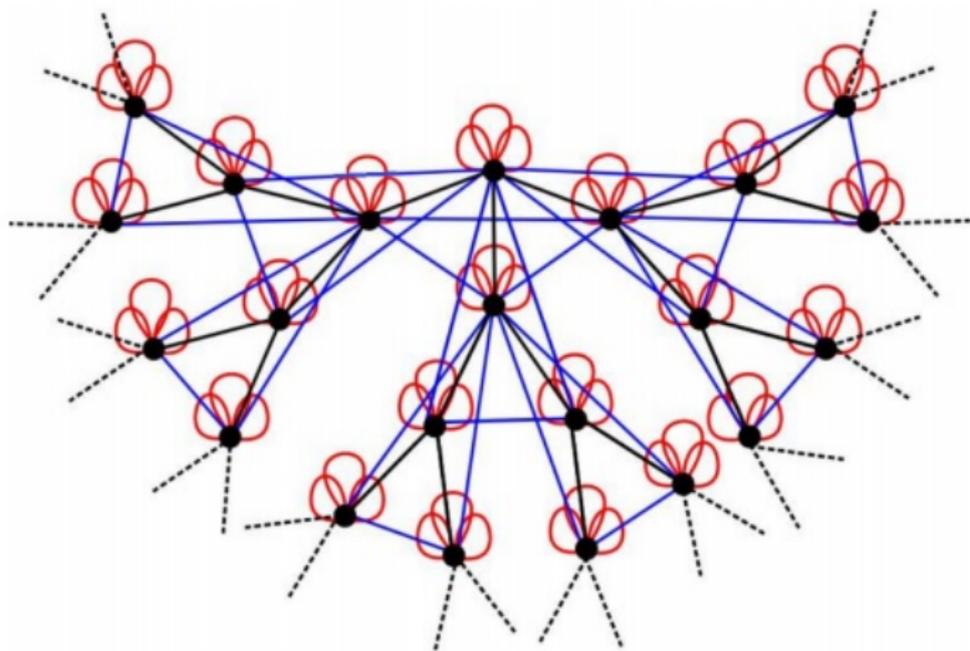


FIGURE 1. Graph of  $A^2$  split in two parts  $A^2 = A_d^{[2]} + dI$ .

# Caso Particular: Árboles $d$ -regulares

## Idea de la Prueba

### Lema

Sea  $d \geq 2$  fijo, entonces  $A^{[1]} = A$ ,  $A^{[2]} = A^2 - dI$ , y

$$AA^{[k]} = A^{[k+1]} + (d-1)A^{[k-1]}, \quad k = 2, \dots, d-1.$$

Prueba por casos:

- Caso 1:  $\partial(i, j) = k + 1 \Rightarrow (A^{[k]}A)_{i,j} = 1$ .
- Caso 2:  $\partial(i, j) = k - 1 \Rightarrow (A^{[k]}A)_{i,j} = d - 1$ .
- Caso 3:  $|\partial(i, j) - k| \neq 1 \Rightarrow (A^{[k]}A)_{i,j} = 0$ .

Entonces,  $A^{[k]}$  y  $T_k$  cumplen la misma recurrencia.

# Análisis asintótico de la gráfica $k$ -distante de gráficas aleatorias $d$ -regulares

Sea  $X$  una gráfica regular con conjunto de vértices  $\{1, 2, \dots, n(X)\}$ .  
Sea  $d$  el grado de  $X$  y  $c_k(X)$  el número de ciclos de tamaño  $k$  en  $X$  para cada  $k$ .

## Teorema (McKay 1981)

Sea  $X_1, X_2, \dots$  una sucesión de gráficas  $d$ -regulares, con  $d \geq 2$ , tales que:

- (1)  $n(X_i) \rightarrow \infty$ , cuando  $i \rightarrow \infty$  y,
- (2) para cada  $k \geq 3$ ,  $c_k(X_i)/n(X_i) \rightarrow 0$  cuando  $i \rightarrow \infty$ .

Entonces

$$A(X_i) \rightarrow \mu_d.$$

# Análisis asintótico de la gráfica $k$ -distante de gráficas aleatorias $d$ -regulares

## Teorema

*Sean  $d, k$  enteros fijos y, para cada  $n$  sea  $F_n^k(x)$  la distribución de los eigenvalores de la gráfica  $k$ -distante de una gráfica aleatoria regular con grado  $d$  y orden  $2n$ . Entonces, cuando  $n$  tiende a infinito,  $F_n^k(x)$  converge a la distribución de  $A_d^{[k]}$ , con respecto al funcional  $\varphi_1$ .*

# Idea de la Prueba

## Lema

Sea  $X_1, X_2, \dots$  una sucesión tal que cumple (1) y (2). Sea  $A^{[k]}(X_i)$  la matriz de adyacencia de la gráfica  $k$ -distante de  $X_i$ . Entonces, la distribución con respecto a la traza normalizada de  $A^{[k]}(X_i)$  converge en momentos a la distribución de  $A_d^{[k]}$  con respecto a  $\varphi_1$ .

Prueba:

$n_r(X_i)$  : # vértices  $v$  de  $X_i$  tales que la subgráfica de  $X_i$  inducida por los vértices a distancia a lo mas  $r = mk$  de  $v$ , es aciclica.

Por hipótesis,  $n_r(X_i)/n(X_i) \rightarrow 1$ .

Para algún  $0 \leq \hat{\varphi}_m(X_i) \leq d^r$ , se tiene que

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{tr}}\left(\left(A^{[k]}(X_i)\right)^m\right) &= \frac{\varphi_1\left(\left(A_d^{[k]}\right)^m\right)n_r(X_i)}{n(X_i)} + \frac{(n(X_i) - n_r(X_i))\hat{\varphi}_m(X_i)}{n(X_i)} \\ &\rightarrow \varphi_1\left(\left(A_d^{[k]}\right)^m\right) \quad \text{as } i \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

$R_n$ : gráficas etiquetadas regulares con grado  $n$  y orden  $s_i$ .

### Lema (Wormald 1981)

*Para cada  $k > 3$  definimos  $c_{k,n}$  como el número de  $k$ -ciclos de los miembros de  $R_n$ . Entonces, para cada  $k$ ,  $c_{k,n} \rightarrow (d-1)^k/2k$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .*

- $G_n$ : unión disjunta de todas las gráficas etiquetadas de tamaño  $s_n$ .
- La distribución de los eigenvalores de  $G_n$  coincide con la distribución de los eigenvalores esperados de  $R_n$ .
- Lema Wormald  $\Rightarrow$  Lema "anterior"  $\Rightarrow$  Resultado.

# Gráfica $k$ -distante del Producto Libre

Caso Particular: Árboles  $d$ -regulares,  $d \rightarrow \infty$ .

## Teorema

Para  $d \geq 2$ , sea  $A_d^{[k]}$  la matriz de adyacencia de la gráfica  $k$ -distante del árbol  $d$ -regular. Entonces, la distribución con respecto al funcional  $\varphi_1$  de  $d^{-k/2} A_d^{[k]}$ , cuando  $d \rightarrow \infty$ , converge en momentos a la distribución de

$$P_k(s),$$

donde  $P_k$  es el polinomio de Chebyshev de grado  $k$  y  $s$  es una variable aleatoria semicircular.

# Prueba

$$\frac{A_d}{d^{1/2}} \frac{A_d^{[k]}}{d^{k/2}} = \frac{A_d^{[k+1]}}{d^{(k+1)/2}} + \frac{A_d^{[k-1]}}{d^{(k-1)/2}} - \frac{1}{d} \frac{A_d^{[k-1]}}{d^{(k-1)/2}}$$

$X := \frac{A_d}{d^{1/2}}$ , entonces

$$P^{(1)}(X) = X, \quad P^{(2)}(X) = X^2 - I,$$

y la fórmula de recurrencia

$$XP^{(k)}(X) = P^{(k+1)}(X) + P^{(k-1)}(X) - \frac{1}{d}P^{(k-1)}(X),$$

haciendo  $d \rightarrow \infty$  entonces

$$XP^{(k)}(X) = P^{(k+1)}(X) + P^{(k-1)}(X).$$

# Gráfica $k$ -distante del Producto Libre

## Caso General

Inducción.  $k = 2$

$$A^2 = \tilde{A}^{[2]} + D + \Delta,$$

where  $D$  is diagonal with  $(D)_{ii} = \text{deg}(i)$ ,

$(\Delta)_{ij} = |\text{triangles in } G \text{ with one side } (i, j)|$  and

$(\tilde{A}^{[2]})_{ij} = |\text{paths of size 2 from } i \text{ to } j|$ , whenever  $(A^{[2]})_{ij} = 1$ .

- $D_n/n \rightarrow \text{Ideg}(e)$ .
- Los momentos mixtos de  $A_n^2/n$  y  $\Delta_n/n$  asintóticamente se hacen 0.
- Los momentos mixtos de  $(\tilde{A}_n^{[2]}/n, \Delta/n, )$  y  $(D_n/n, \Delta/n, )$  se hacen cero asintóticamente.
- $A_n^{[2]} \sim \tilde{A}_n^{[2]}$  asintóticamente.

$\Rightarrow$

$$A_n^{[2]} \sim \tilde{A}_n^{[2]} = A_n^2 - D_n - \Delta_n \xrightarrow{D} A_n^2 - I \xrightarrow{D} s^2 - 1.$$

$$k \geq 3$$

$$A^{[k]}A = \tilde{A}^{[k+1]} + (N-1)\text{deg}(e)A^{[k-1]} + D_N^{[k-1]} + \Delta_N^{[k]}$$

$(\tilde{A}^{[k+1]})_{ij} = |\{l \sim j : \partial(i, l) = k\}|$  siempre que  $\partial(i, j) = k + 1$ ,

$(D_N^{[k-1]})_{ij} = |\{l \sim j : \partial(i, l) = k, \text{ y } l \text{ esta en la misma copia de } G \text{ que } j\}|$   
si  $\partial(i, j) = k - 1$  y,

$(\Delta_N^{[k]})_{ij} = |\{l \sim j : \partial(i, l) = k\}|$  cuando  $\partial(i, j) = k$ .

Suponiendo se vale el resultado para todo  $l \leq k$ .

- Los momentos mixtos de  $A^{[k]}A/N^{\frac{k+1}{2}}$  y  $\Delta_N^{[k]}/N^{\frac{k+1}{2}}$  se anulan asintóticamente.
- Los momentos mixtos de  $(\tilde{A}^{[k+1]}/N^{\frac{k+1}{2}}, \Delta_N^{[k]}/N^{\frac{k+1}{2}})$  y  $(\Delta_N^{[k]}/N^{\frac{k+1}{2}}, D_N^{[k-1]}/N^{\frac{k+1}{2}})$  se anulan
- $\Delta_N^{[k]}/N^{\frac{k+1}{2}} \rightarrow 0$  y  $D_N^{[k-1]}/N^{\frac{k+1}{2}} \rightarrow 0$
- $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tilde{A}^{[k+1]}}{N^{\frac{k+1}{2}}} - \frac{A^{[k+1]}}{N^{\frac{k+1}{2}}} = 0$ .

- $$\frac{A_N^{[k+1]}}{(\deg(e)N)^{\frac{k+1}{2}}} = \frac{A_N^{[k]} A_N}{(\deg(e)N)^{\frac{k+1}{2}}} - \frac{A_N^{[k-1]}}{(\deg(e)N)^{\frac{k-1}{2}}} - C(N, k + 1),$$

- $$C(N, k + 1) = \frac{\deg(e)A_N^{[k-1]} + \Delta_N^{[k]} + D_N^{[k-1]} - (\tilde{A}^{[k+1]} - A^{[k-1]})}{(\deg(e)N)^{\frac{k+1}{2}}} \rightarrow 0.$$

- $$\frac{A_N^{[k]} A_N}{(\deg(e)N)^{\frac{k+1}{2}}} - \frac{A_N^{[k-1]}}{(\deg(e)N)^{\frac{k-1}{2}}} \rightarrow P_k(s)s - P_{k-1}(s) = P_{k+1}(s).$$

⇒

$$\frac{A_N^{[k+1]}}{(\deg(e)N)^{\frac{k+1}{2}}} \rightarrow P_{k+1}(s).$$

GRACIAS