Teoremas del Límite Central No-Conmutativos y Productos de Gráficas

Marco Tulio Gaxiola Leyva

CIMAT

16 de Octubre de 2014

Seminario Interinstitucional Centro Norte de México, de Combinatoria y Probabilidad

Definición

(1) Un ***Espacio de Probabilidad No-Conmutativo*** *es un par $(\mathcal{A}, \varphi)$ donde $\mathcal{A}$ es un álgebra compleja con unidad y $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal con $\varphi(\mathbf{1}_{\mathcal{A}}) = 1$, donde $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ es la unidad en $\mathcal{A}$.*
*(2) Si $\mathcal{A}$ es una *-álgebra y φ es un* ***estado****, es decir, cumple que $\varphi(a^* a) \geq 0$ para toda $a \in \mathcal{A}$, entonces el par $(\mathcal{A}, \varphi)$ es llamado *-EPNC.*

A los elementos de $\mathcal{A}$ se les llama **variables aleatorias no-conmutativas**, o solo variables aleatorias.
A una variable aleatoria $a \in \mathcal{A}$ se le llama **autoadjunta** si se tiene que $a = a^*$.

Probabilidad No-Conmutativa

Definiciones básicas (Ejemplo)

Las matrices cuadradas (de $n \times n$) con entradas reales es un *-álgebra.

- $\varphi_{\mathrm{tr}}(M) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(M)$.
- $\varphi_1(M) = M_{11}$.

Sea $a \in (\mathcal{A}, \varphi)$ una variable aleatoria autoadjunta, decimos que la **distribución** (con respecto al estado φ) de a es una medida μ en $\mathbb{R}$, tal que

$$\varphi(a^m) = \int_{-\infty}^{\infty} x^m \mu(dx), \qquad m = 1,\ 2,\ \ldots.$$

Definición

*Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un EPNC, decimos que $a, b \in (\mathcal{A}, \varphi)$ son **independientes en el sentido tensorial** si se cumple que*

$$\varphi(a^{m_1} b^{n_1} \cdots a^{m_k} b^{n_k}) = \varphi\left(a^{\sum_{i=1}^{k} m_i}\right) \varphi\left(b^{\sum_{i=1}^{k} n_i}\right),$$

para todo $m_j,\ n_j \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ i = 1, 2, \ldots, k.$

Definición

Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un EPNC, decimos que $a, b \in (\mathcal{A}, \varphi)$ son ***independientes en el sentido booleano*** *si se cumple que*

$$\varphi(a^{m_1} b^{n_1} \cdots a^{m_k} b^{n_k}) = \prod_{i=1}^{k} \varphi\left(a^{m_i}\right) \varphi\left(b^{n_i}\right),$$

para todo $m_j,\ n_j \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ i = 1, 2, \ldots, k$.

Definición

*Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un EPNC, decimos que $a, b \in (\mathcal{A}, \varphi)$ son **independientes en el sentido monótono** si se cumple que*

$$\varphi(a^{m_1} b^{n_1} \cdots a^{m_k} b^{n_k}) = \varphi\left(a^{\sum_{i=1}^{k} m_i}\right) \prod_{i=1}^{k} \varphi\left(b^{n_i}\right),$$

para todo $m_j,\ n_j \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ i = 1, 2, \ldots, k$.

Probabilidad No-Conmutativa

Nociones de independencia (Ejemplos)

Consideremos el EPNC $(\mathcal{A}, \varphi_1)$, donde $\mathcal{A} = M_{n\times n}$, la *-álgebra de las matrices cuadradas de $n \times n$, y

$$\varphi_1(M) = M_{11},$$

para $M \in \mathcal{A}$. Sean $A \in M_{m\times m}$ y $B \in M_{l\times l}$, tales que $ml = n$, sean I_m e I_l la matriz identidad de $m \times m$ y $l \times l$, respectivamente, y P_l y P_m la proyección de rango 1 al espacio generado por $(1, 0, 0, \ldots, 0)$, donde el vector es de tamaño m y l, respectivamente, entonces

$$(A \otimes I_l),\ (I_m \otimes B) \quad \text{son independientes en el sentido tensorial}$$

$$(A \otimes P_l),\ (P_m \otimes B) \quad \text{son independientes en el sentido booleano}$$

$$(A \otimes P_l),\ (I_m \otimes B) \quad \text{son independientes en el sentido monótono,}$$

con respecto al funcional φ_1.

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{\mathrm{tr}}((A\otimes I_l)^{m_1}(I_m\otimes B)^{n_1}\cdots(A\otimes I_l)^{m_k}(I_m\otimes B)^{n_k})\\
&=\varphi_{\mathrm{tr}}((A^{m_1}\otimes I_l^{m_1})(I_m^{n_1}\otimes B^{n_1})\cdots(A^{m_k}\otimes I_l^{m_k})(I_m^{n_k}\otimes B^{n_k}))\\
&=\varphi_{\mathrm{tr}}((A^{m_1}\otimes B^{n_1})\cdots(A^{m_k}\otimes B^{n_k}))\\
&=\varphi_{\mathrm{tr}}\left(A^{\sum_{i=1}^k m_i}\otimes B^{\sum_{i=1}^k n_i}\right)=\frac{\mathrm{Tr}}{n}\left(A^{\sum_{i=1}^k m_i}\otimes B^{\sum_{i=1}^k n_i}\right)\\
&=\frac{\mathrm{Tr}}{m}\left(A^{\sum_{i=1}^k m_i}\right)\frac{\mathrm{Tr}}{l}\left(B^{\sum_{i=1}^k n_i}\right)\\
&=\frac{\mathrm{Tr}}{ml}\left(A^{\sum_{i=1}^k m_i}\otimes I_l\right)\frac{\mathrm{Tr}}{lm}\left(I_m\otimes B^{\sum_{i=1}^k n_i}\right)\\
&=\frac{\mathrm{Tr}}{n}\left((A\otimes I_l)^{\sum_{i=1}^k m_i}\right)\frac{\mathrm{Tr}}{n}\left((I_m\otimes B)^{\sum_{i=1}^k m_i}\right)\\
&=\varphi_{\mathrm{tr}}\left((A\otimes I_l)^{\sum_{i=1}^k m_i}\right)\varphi_{\mathrm{tr}}\left((I_m\otimes B)^{\sum_{i=1}^k m_i}\right)
\end{aligned}
$$

Teorema

*Sea $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset (\mathcal{A}, \varphi)$ una sucesión de variables aleatorias autoadjuntas en un *-EPNC, independientes en el sentido tensorial, tales que $\varphi(a_n) = 0$ y $\varphi(a_n^2) = 1$, para todo $n \geq 1$, entonces se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right)^m\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{-x^2/2}dx, \qquad m = 1, 2, \ldots.$$

Teorema

*Sea $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset (\mathcal{A}, \varphi)$ una sucesión de variables aleatorias autoadjuntas en un *-EPNC, independientes en el sentido booleano, tales que $\varphi(a_n) = 0$ y $\varphi(a_n^2) = 1$, para todo $n \geq 1$, entonces se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right)^m\right) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^m(\delta_{-1} + \delta_1)dx, \qquad m = 1, 2, \ldots.$$

Teorema

Sea $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset (\mathcal{A}, \varphi)$ *una sucesión de variables aleatorias autoadjuntas en un *-EPNC, independientes en el sentido monótono, tales que* $\varphi(a_n) = 0$ *y* $\varphi(a_n^2) = 1$*, para todo* $n \geq 1$*, entonces se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right)^m\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{x^m}{\sqrt{2-x^2}}dx, \qquad m = 1, 2, \ldots.$$

Productos de gráficas

Producto directo

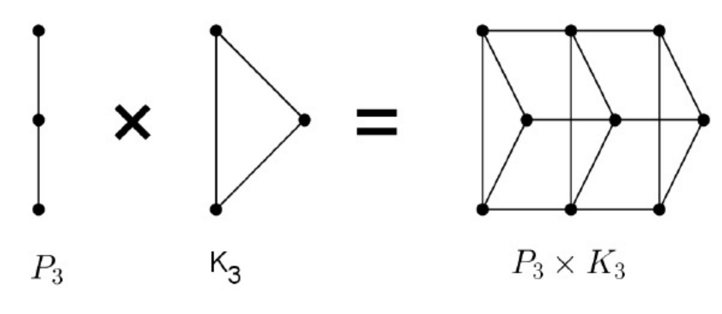
Definición

*Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos gráficas. El **producto directo** de G_1 con G_2, denotado por $G_1 \times G_2$, es la gráfica con conjunto de vértices $V = V_1 \times V_2$ y conjunto de aristas E, de tal forma que para $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V_1 \times V_2$ el arista $e = (v_1, w_1) \sim (v_2, w_2) \in E$ si, y solo si, alguna de las condiciones se satisface:*

1. $v_1 = v_2$ *y* $w_1 \sim w_2$
2. $v_1 \sim v_2$ *y* $w_1 = w_2$.

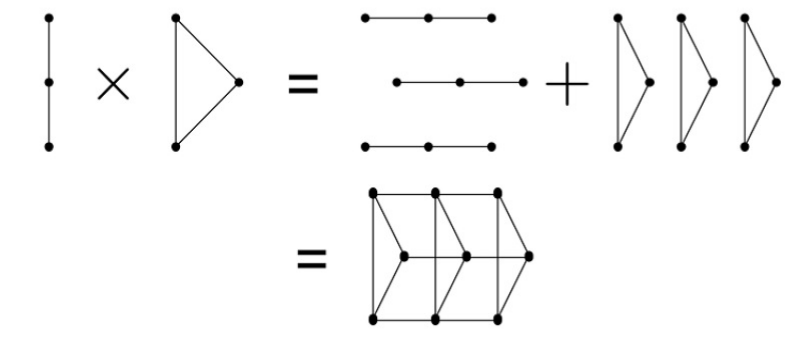
Productos de gráficas

Producto directo (Ejemplo)



Productos de gráficas

Producto directo (Ejemplo)



Productos de gráficas

Producto directo (Ejemplo)

Lo anterior se puede escribir en términos de las matrices de adyacencia A_{P_2} y A_{K_3}, de la siguiente forma:

$$A_{P_2 \times K_3} = A_{P_2} \otimes I_3 + I_3 \otimes A_{K_3},$$

donde I_3 es la matriz identidad de 3×3.

Productos de gráficas

Producto directo

Teorema

Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos gráficas finitas, entonces la matriz de adyacencia de $G_1 \times G_2$, puede ser descompuesta como una suma en términos de las matrices de adyacencia A_{G_1} y A_{G_2} de la siguiente forma:

$$A_{G_1 \times G_2} = A_{G_1} \otimes I_{|V_2|} + I_{|V_1|} \otimes A_{G_2},$$

donde I_d es la matriz identidad de $d \times d$.

Corolario

$A_{G_1 \times G_2} \in (M_{|V| \times |V|}, \varphi_{tr})$ es la suma de dos variables aleatorias independientes en el sentido tensorial.

Productos de gráficas

Producto directo (TLC)

Teorema

Sea $G = (V, E)$ una gráfica finita conexa. Sea G^N el producto directo de la gráfica G consigo misma N veces, y sea A_{G^N} su matriz de adyacencia, entonces se cumple que

$$\lim_{N\to\infty} \varphi_{tr}\left(\left(\frac{A_{G^N}}{\sqrt{N}\left(\frac{|V|}{2|E|}\right)^{1/2}}\right)^m\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{-x^2/2}dx, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Productos de gráficas

Producto booleano

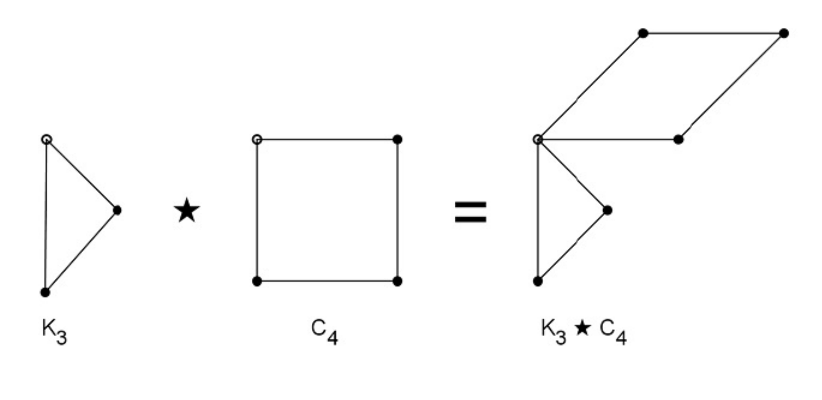
Definición

Sean $G_1 = (V_1, E_1, r_1)$ *y* $G_2 = (V_2, E_2, r_2)$ *dos gráficas con raíz. El* ***producto booleano*** *de* G_1 *con* G_2*, denotado por* $G_1 \star G_2$*, es la gráfica con conjunto de vértices* $V = V_1 \times V_2$ *y conjunto de aristas* E*, de tal forma que para* $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V_1 \times V_2$ *el arista* $e = (v_1, w_1) \sim (v_2, w_2) \in E$ *si, y solo si, alguna de las condiciones se satisface:*

1. $v_1 = v_2 = r_1$ *y* $w_1 \sim w_2$
2. $v_1 \sim v_2$ *y* $w_1 = w_2 = r_2$.

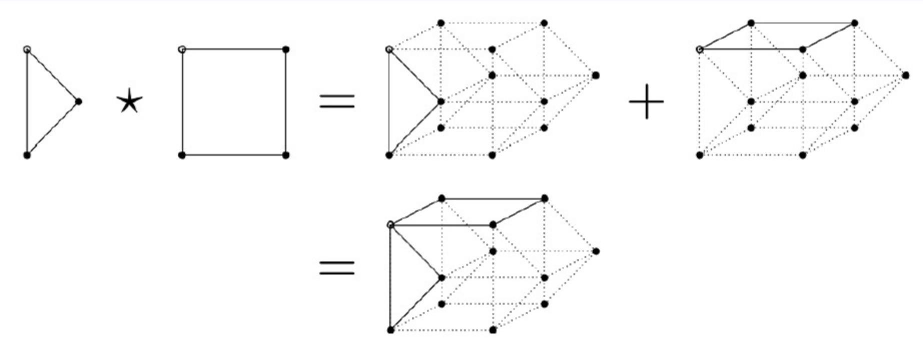
Productos de gráficas

Producto booleano (Ejemplo)



Productos de gráficas

Producto booleano (Ejemplo)



Productos de gráficas

Producto booleano (Ejemplo)

Lo anterior se puede escribir en términos de las matrices de adyacencia A_{K_3} y A_{C_4}, de la siguiente forma:

$$A_{K_3 \star C_4} = A_{K_3} \otimes P_4 + P_3 \otimes A_{C_4},$$

donde P_4 y P_3 son la proyección de rango 1 al espacio generado por (1,0,0,0) y (1,0,0), respectivamente.

Productos de gráficas

Producto booleano

Teorema

Sean (G_1, e_1) y (G_2, e_2) dos gráficas con raíz, entonces la matriz de adyacencia de $G_1 \star G_2$, puede ser descompuesta como una suma en términos de las matrices de adyacencia A_{G_1} y A_{G_2} de la siguiente forma:

$$A_{G_1 \star G_2} = A_{G_1} \otimes P_{|V_2|} + P_{|V_1|} \otimes A_{G_2}$$

Corolario

$A_{G_1 \star G_2} \in (M_{|V| \times |V|}, \varphi_1)$ es la suma de dos variables aleatorias independientes en el sentido booleano.

Productos de gráficas

Producto booleano (TLC)

Teorema

Sea $G = (V, E, e_1)$ una gráfica finita conexa con raíz. Sea $G^{\star N}$ el producto booleano de la gráfica G consigo misma N veces, y sea $A_{G^{\star N}}$ su matriz de adyacencia, entonces se cumple que

$$\lim_{N\to\infty} \varphi_1\left(\left(\frac{A_{G^{\star N}}}{\sqrt{N deg(e_1)}}\right)^m\right) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^m(\delta_{-1}+\delta_1)dx, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Productos de gráficas

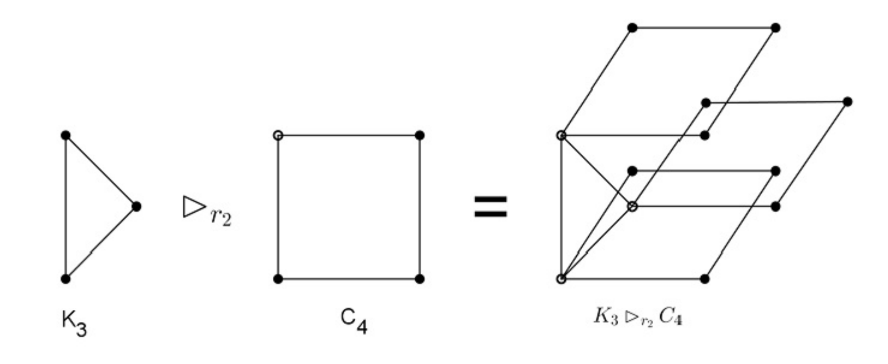
Producto monótono

Definición

Sean $G_1 = (V_1, E_1, r_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2, r_2)$ dos gráficas con raíz. El ***producto monótono*** *de G_1 con G_2, denotado por $G_1 \rhd_{r_2} G_2$, es la gráfica con conjunto de vértices $V = V_1 \times V_2$ y conjunto de aristas E, de tal forma que para $(v_1, w_1),\ (v_2, w_2) \in V_1 \times V_2$ el arista $e = (v_1, w_1) \sim (v_2, w_2) \in E$ si, y solo si, alguna de las condiciones se satisface:*

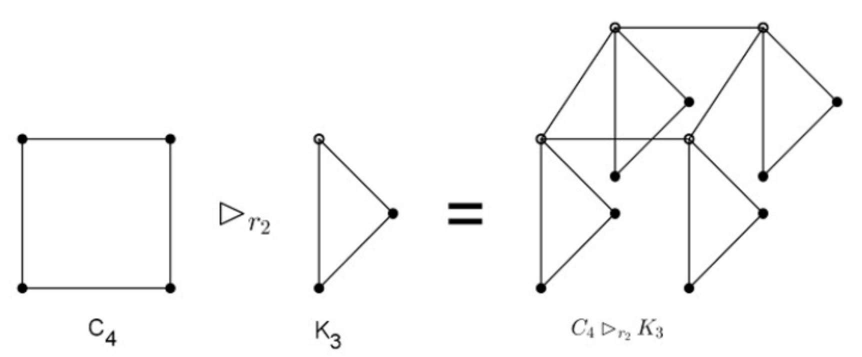
1. $v_1 = v_2$ *y* $w_1 \sim w_2$
2. $v_1 \sim v_2$ *y* $w_1 = w_2 = r_2$.

Productos de gráficas
Producto monótono (Ejemplo)



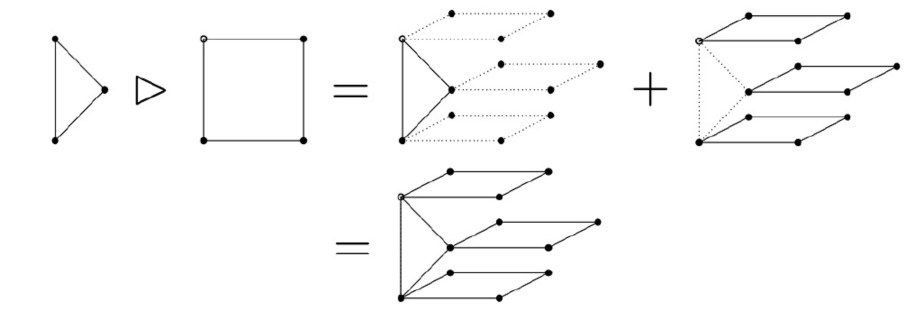
Productos de gráficas

Producto monótono (Ejemplo)



Productos de gráficas

Producto monótono (Ejemplo)



Productos de gráficas

Producto monótono (Ejemplo)

En términos de las matrices de adyacencia se tiene que

$$A_{K_3 \triangleright C_4} = A_{K_3} \otimes P_4 + I_3 \otimes A_{C_4},$$

donde P_4 es la proyección de rango 1 al espacio generado por (1,0,0,0) e I_3 es la matriz identidad de 3×3.

Productos de gráficas

Producto monótono

Teorema

Sean (G_1, e_1) y (G_2, e_2) dos gráficas con raíz, entonces la matriz de adyacencia de $G_1 \triangleright G_2$, puede ser descompuesta como una suma en términos de las matrices de adyacencia A_{G_1} y A_{G_2} de la siguiente forma:

$$A_{G_1 \triangleright G_2} = A_{G_1} \otimes P_{|V_2|} + I_{|V_1|} \otimes A_{G_2}$$

Corolario

$A_{G_1 \triangleright G_2} \in (M_{|V| \times |V|}, \varphi_1)$ es la suma de dos variables aleatorias independientes en el sentido monótono.

Productos de gráficas

Producto monótono (TLC)

Teorema

Sea $G = (V, E, e_1)$ una gráfica finita conexa con raíz. Sea $G^{\triangleright N}$ el producto monótono de la gráfica G consigo misma N veces, y sea $A_{G^{\triangleright N}}$ su matriz de adyacencia, entonces se cumple que

$$\lim_{N\to\infty} \varphi_1\left(\left(\frac{A_{G^{\triangleright N}}}{\sqrt{N} deg(e_1)}\right)^m\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{x^m}{\sqrt{2-x^2}}dx, \quad m = 1, 2, \ldots$$

GRACIAS