PROYECTO DE ESTANCIA DE VERANO 2023
GRUPOS FINITOS DE REFLEXIÓN

ESTUDIANTES:
JOSÉ MARIA CASTILLA COCHEGRUS
RAMSÉS ALEJANDRO GARCÍA ABASCAL RUÍZ
ALDAIR REYES GÓNZALEZ

INVESTIGADOR RECEPTOR:
DR. JOSÉ LUIS LEÓN MEDINA

CIMAT-MÉRIDA, VERANO 2023

1. Introducción a los grupos finitos de reflexión

De ahora en adelante consideramos espacios vectoriales Euclidianos, V, de dimensión finita dotados de una forma bilineal, simétrica y positiva definida $\langle\,,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$.
La idea es que trabajaremos con espacios parecidos a $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ con el producto punto usual. De hecho todo espacio vectorial Euclidiano es isomorfo a $\mathbb{R}^n$ por una isometria, ver por ejemplo el Teorema 3.3.8 de estas notas. La existencia de la forma bilineal nos permite realizar las siguientes operaciones importantes:

- Medir vectores: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$,
- Medir ángulos entre vectores: $\angle(x, y) = \arccos\left(\dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}\right)$
- Definir transformaciones ortogonales:

$$O(V) = \{T \in \mathrm{GL}(V) : \forall x, y \in V : \langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle\}.$$

Definición 1

Sea T una transformación lineal de V en V, entonces T es una reflexión si T es ortogonal y $\dim\left(V^T\right) = \dim V - 1$. Donde V^T es el subespacio:

$$V^T = \{v \in V \mid Tv = v\}.$$

Veamos que podemos dar una descripción más explicita de las reflexiones al desarrollar su regla de correspondencia para cualquier elemento de V.

Teorema 1

Sea T una reflexión y sea x un elemento no nulo del espacio ortogonal a V^T:

$$\left(V^T\right)^{\perp} = \{v \in V \mid \forall\, w \in V^T : \langle v, w\rangle = 0\}.$$

Entonces se cumple lo siguiente:

1. $T(x) = -x$,

2. $\forall z \in V : T(z) = z - 2\dfrac{\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle} x$.

Demostración. Si $\dim V = 1$, el enunciado se cumple trivialmente. Supongamos que $\dim V \geq 2$.

1. Sea $v \in V^T$, entonces, por definición de V^T, $Tv = v$ y como $x \in \left(V^T\right)^{\perp}$ se tiene lo siguiente:
$$\begin{aligned} \langle x, v\rangle &= 0 \\ \langle Tx, Tv\rangle &= 0 \\ \langle Tx, v\rangle &= 0. \end{aligned}$$
Por tanto $Tx \in \left(V^T\right)^{\perp}$. Pero $\left(V^T\right)^{\perp}$ es un espacio vectorial de dimensión 1, así que $Tx = \alpha x$ para algún escalar α. Luego, deducimos el valor de alpha usando la ortogonalidad de T:
$$\langle x, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \langle \alpha x, \alpha x\rangle = \alpha^2 \langle x, x\rangle.$$
Entonces $\alpha^2 = 1$ y notemos que $\alpha \neq 1$, pues si $\alpha = 1$ tenemos que $x \in V^T$ contradiciendo que $x \in \left(V^T\right)^{\perp}$ y es no nulo. Por tanto $Tx = -x$.
2. La idea es ver que podemos descomponer a todo vector $z \in V$ en términos de su proyección al espacio V^T y su ortogonal. Especificamente
$$z = \underbrace{z - \frac{\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle} x}_{\in V^T} + \underbrace{\frac{\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle} x}_{\in \left(V^T\right)^{\perp}}$$
   - Verifiquemos que $z - \dfrac{\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle} x \in V^T$.
   Como $\left(V^T\right)^{\perp} = \langle x\rangle$, entonces $V^T = \langle x\rangle^{\perp}$ así que es suficiente con verificar que la expresión tiene producto interno cero con x:
   $$\left\langle z - \frac{\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle} x, x \right\rangle = \langle z, x\rangle - \frac{\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle}\langle x, x\rangle = 0$$
   - $\dfrac{\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle} x$ es un múltiplo escalar de x, así que es un elemento de $\left(V^T\right)^{\perp}$.

   Finalmente, usando el enunciado 1 del Teorema se tiene:
$$\begin{aligned} T(z) &= T\left(z - \frac{\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle} x\right) + T\left(\frac{\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle} x\right) \\ &= z - \frac{\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle} x - \frac{\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle} x \\ &= z - 2\frac{\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle} x \end{aligned}$$

$\square$

El Teorema anterior motiva a darle nombre a la transformación explicita que aparece en el inciso 2 del teorema.

Definición 2

Para todo $x \in V$, $x \neq 0$, sea S_x la transformación lineal en V dada por

$$S_x(z) = z - 2\frac{\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle}x.$$

De hecho se puede demostrar que toda reflexión es una S_x para algún x.

Corolario 1

Se cumple que:

1. $S_x = S_{\alpha x}$ para todo escalar $\alpha \neq 0$.
2. Toda reflexión T es igual a una transformación S_x, para algún x salvo multiplicación por escalar. A x se le llama raíz de T.
3. Para todo vector no nulo x, S_x es una reflexión.
4. Toda reflexión T satisface $T^2 = I$.
5. Toda reflexión tiene determinante -1.

Demostración.

1. Usando la definición 1 se tiene
$$S_{\alpha x}(z) = z - 2\frac{\langle \alpha x, z\rangle}{\langle \alpha x, \alpha x\rangle}\alpha x = z - 2\frac{\alpha}{\alpha^2}\frac{\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle}\alpha x = z - \frac{\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle}x = S_x(z).$$
2. Sea T una reflexión. Por definición $\dim(V^T) = \dim V - 1$ entonces podemos deducir que el complemento ortogonal satisface $\dim(V^T)^\perp = 1$ y existe algún x no nulo en $(V^T)^\perp$. Entonces por el Lemma 1.1, $T = S_x$.

   Supongamos que ahora que también $T = S_y$, con $x \neq y$. Entonces
$$\begin{aligned} T(x) &= S_y(x) \\ -x &= x - 2\frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}y \\ -2x &= -2\frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}y \\ x &= \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}y \end{aligned}$$
   Por lo tanto $y = \alpha x$ y T tiene expresión única S_x salvo multiplicación por un escalar.
3. Sea $x \in V$ no nulo, veamos que S_x es una transformación ortogonal, sean $y, z \in V$ y notemos que:
$$\begin{aligned} \left\langle S_x(y), S_x(z)\right\rangle &= \left\langle y - 2\frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle}x, z - 2\frac{\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle}x\right\rangle \\ &= \left\langle y, z\right\rangle - \left\langle y, 2\frac{\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle}x\right\rangle - \left\langle 2\frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle}x, z\right\rangle + \left\langle 2\frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle}x, 2\frac{\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle}x\right\rangle \\ &= \left\langle y, z\right\rangle - 4\frac{\langle x, z\rangle\left\langle x, y\right\rangle}{\langle x, x\rangle} + 4\frac{\left\langle x, y\right\rangle\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle} \\ &= \left\langle y, z\right\rangle. \end{aligned}$$

Ahora veamos que $\dim(V)^{S_x} = n-1$. Notemos que $\dim(V)^{S_x} = \mathrm{Nul}(S_x - I)$ donde $S_x - I$ es la transformación lineal dada por

$$(S_x - I)(z) = -2\frac{\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle}x$$

que claramente tiene rango 1 y entonces por el Teorema de rango-nulidad $\dim(V)^{S_x} = n-1$. Por tanto S_x es reflexión.

4. Sea T una reflexión. Por (1) existe algún $x \in V$ tal que $T(z) = S_x(z)$

$$S_x(z) = z - \frac{2\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle}x.$$

Aplicar T^2 es lo mismo que componer dos veces la transformación S_x:

$$S_x(S_x(z)) = \left(z - \frac{2\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle}x\right) - \frac{2\left\langle x, z - \frac{2\langle x,z\rangle}{\langle x,x\rangle}x\right\rangle}{\langle x, x\rangle}x$$

Enfocándonos en el numerador del segundo cociente:

$$\begin{aligned} 2\left\langle x, z - \frac{2\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle}x\right\rangle =& 2\left(\langle x, z\rangle - 2\left\langle x, \frac{\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle}x\right\rangle\right) \\ =& 2\left(\langle x, z\rangle - \frac{2\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle}\langle x, x\rangle\right) \\ =& 2\langle x, z\rangle - 4\langle x, z\rangle \\ =& -2\langle x, z\rangle \end{aligned}$$

Sustituyendo

$$\begin{aligned} S_x(S_x(z)) =& \left(z - \frac{2\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle}x\right) - \frac{-2\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle}x \\ =& z - \frac{2\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle}x + \frac{2\langle x, z\rangle}{\langle x, x\rangle}x \\ =& z \end{aligned}$$

Por lo tanto $S_x(S_x(z)) = z$ para toda z en V. Concluyendo que $T^2 = I$.

5. Sea $T : V \to V$ una reflexión y supongamos que $\dim V = n$. Por definición V^T y $\left(V^T\right)^\perp$ son subespacios de V, de dimensiones $n-1$ y 1, que corresponden a los eigenespacios con eigenvalor 1 y -1, respectivamente. Luego, como el determinante de la transformación es igual al producto de sus eigenvalores

$$\det(T) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

donde $n-1$ de ellos son 1 y uno es -1. Por tanto $\det T = -1$.

□

Definición 3

Un grupo de reflexión finito es un par (G, V) donde V es un espacio Euclidiano, G es un subgrupo finito de $O(V)$ y $G = \langle\{S_x : S_x \in G\}\rangle$ es generado por todas las reflexiones en G.

Recordar que el generado de un conjunto X es el mínimo grupo que contiene al conjunto X y puede realizarse ya sea como la intersección de todos los grupos que contienen a X o bien como el conjunto de todos los productos y sus inversos de los elementos de X:

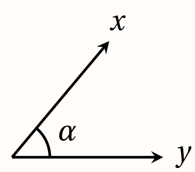
$$\langle X \rangle = \{1\} \cup \left\{ a_1^{\pm 1} a_2^{\pm} \cdots a_n^{\pm 1} \right\}$$

Definición 4

Diremos que dos grupos finitos (G_1, V_1) y (G_2, V_2) de reflexión son equivalentes si existe una isometría $\varphi : V_1 \to V_2$ tal que $G_2 = \{\varphi g \varphi^{-1} \mid g \in G_1\}$.

Ejemplo 1: El grupo de reflexión generado por dos raíces en el plano.

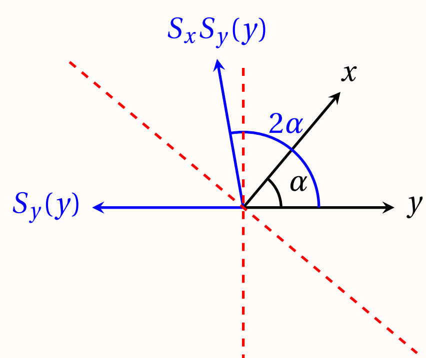
Consideremos el siguiente diagrama con dos vectores en $\mathbb{R}^2$ que forman un ángulo α entre ellos.



Queremos determinar el generado por S_x y S_y. Como ya tenemos bien entendidas individualmente a las reflexiones S_x y S_y resta entender los productos de ambas reflexiones. El determinante de la composición $S_x S_y$ es igual al determinante de la matriz correspondiente a $S_x S_y$ y es igual al producto de los determinantes de ambas reflexiones. Entonces $\det(S_x S_y) = 1$, lo que implica que $S_x S_y$ es una rotación en el plano por algún ángulo β. Podemos encontrar el valor del ángulo β al evaluar la composición en el vector y:

$$S_x S_y(y) = S_x(S_y(y)) = S_x(-y)$$

Geométricamente, en el dibujo anterior tenemos lo siguiente:



Así que podemos concluir que $\beta = 2\alpha$. Entonces tenemos dos casos:

1. Si $\dfrac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, entonces todos los productos de $(S_x S_y)^n$ forman un conjunto infinito de rotaciones $R_{2n\alpha}$ cada una distinta de las otras dado que, de lo contrario, $2n\alpha = 2m\alpha + 2k\pi$ o $\dfrac{\alpha}{\pi} = \dfrac{k}{n-m}$, lo cual es una contradicción.

2. Si $\dfrac{\alpha}{\pi} = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ con $MCD(m,n) = 1$, entonces $S_x S_y$ es una rotación por un ángulo $\dfrac{2\pi m}{n}$, así que $(S_x S_y)^n = 1$ y el grupo $\langle S_x S_y \rangle$ es cíclico de orden n:
$$\langle S_x S_y \rangle = \{S_x S_y, (S_x S_y)^2, \ldots, (S_x S_y)^n\}$$
Entonces el grupo cíclico de orden n, $\langle S_x S_y \rangle$ formado por rotaciones está contenido en $\langle S_x, S_y \rangle$. Para generar todo $\langle S_x, S_y \rangle$ basta agregar los elementos:
$$S_x \cdot \langle S_x S_y \rangle = \{S_y, S_x(S_x S_y)^2, \ldots, S_x\}.$$
Estos productos de S_x por rotaciones son reflexiones y por tanto ningún elemento de $S_x \cdot \langle S_x S_y \rangle$ está en $\langle S_x S_y \rangle$. Más aún, son todos diferentes entre sí pues $S_x(S_x S_y)^i = S_x(S_x S_y)^j$ implica $i = j$. Por tanto
$$\langle S_x, S_y \rangle = \langle S_x S_y \rangle \cup S_x \cdot \langle S_x S_y \rangle$$
Claramente, identificamos que este es el grupo diédrico de n elementos $D_{2n} = \{r, s \,|\, r^n = s^2 = 1, rs = sr^{-1}\}$. Formalmente tenemos el isomorfismo
$$\varphi : \langle S_x, S_y \rangle \to D_{2n} \quad \text{tal que} \quad \varphi(S_x S_y) = r, \quad \varphi(S_x) = s.$$
Por tanto
$$I_2(n) = \left(D_{2n}, \mathbb{R}^2\right)$$
es un grupo finito de reflexión con $2n$ elementos.

Ejemplo 2: El grupo de reflexión A_{n-1}

Sea S_n el grupo simétrico en $\{1, 2, \cdots, n\}$. Si (i, j) es una transposición en S_n, podemos definir
$$T_{(i,j)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
dada por $T_{(i\,j)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ donde $a_k = x_k$ si $k \notin \{i, j\}$, $a_j = x_i$ y $a_i = x_j$. Es decir intercambia las entradas x_i y x_j del vector y deja fijas las coordenadas restantes. Claramente, $T_{(i,j)}$ es una transformación ortogonal que tiene como espacio de puntos fijos al espacio
$$\left(\mathbb{R}^n\right)^{T_{(i,j)}} = \left\langle \{e_k \,|\, k \neq i, j\} \cup \{e_i + e_j\} \right\rangle$$
Por tanto $\dim (\mathbb{R}^n)^{T_{(i,j)}} = n - 1$ y esto implica que $T_{(i,j)}$ es una reflexión.
Ahora, estamos interesados en describir el conjunto generado por todas esas reflexiones, pero el producto de dos de estas reflexiones coincide con la transformación que intercambia las coordenadas de los vectores de acuerdo a la permutación producto:
$$T_{(i_1, j_1)} T_{(i_2, j_2)} = T_{(i_1, j_1)(i_2, j_2)}$$
Más aún como toda permutación está dada por productos de transposiciones en el conjunto generado deben estar todas las transformaciones T_σ. Esto sugiere que el grupo de reflexión debe ser isomorfo a S_n por medio de la función
$$\varphi : S_n \to \langle T_{(i,j)} \rangle, \qquad \sigma \mapsto T_\sigma$$
Verifiquemos que en efecto φ es un isomorfismo.

- φ es inyectiva. Supongamos que $T_\sigma = T_\tau$, entonces para todo elemento $i \in \{1, \dots, n\}$ tenemos $T_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ y $T_\tau(e_i) = e_{\tau(i)}$. Por tanto, como $e_{\sigma(i)} = e_{\tau(i)}$, $\sigma(i) = \tau(i)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y esto implica que $\sigma = \tau$.
- φ es sobreyectiva. Si $T \in \langle T_{(i,j)} \rangle$, entonces T es igual a un producto finito de transposiciones:
$$T = T_{(i_1,j_1)} T_{(i_2,j_2)} \cdots T_{(i_n,j_n)}$$
implicando que T debe ser T_σ donde
$$\sigma = (i_1, j_1)(i_2, j_2) \cdots (i_n, j_n)$$

Por tanto $\langle T_{(i,j)} \rangle \cong S_n$ y $(S_n, \mathbb{R}^n)$ es un grupo finito de reflexión.

Ahora consideremos al vector $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$. Notemos que $\mathbf{1} \in (\mathbb{R}^n)^{T_\sigma}$ para toda permutación σ, pues el efecto de intercambiar sus coordenadas es intercambiar valores 1 por 1. Entonces podemos restringir cada una de las transformaciones T_σ al subespacio $\mathbf{1}^\perp$, dado por todos los vectores $(x_1, \dots, x_n)$ tales que $\sum_{i=1}^n x_i = 0$.
Finalmente, definimos al grupo finito de reflexión A_{n-1} como $(S_n, \mathbf{1}^\perp)$.

El ejemplo anterior nos muestra un fenómeno que ocurre a menudo. Si tenemos un grupo finito G y podemos definir para cada elemento, g de G una transformación lineal $T_g : V \to V$ (o equivalentemente una acción lineal $G \times V \to V$) y además G está generado por un subconjunto finito S de forma que T_s es una reflexión para todo $s \in S$, entonces el grupo generado por todas las reflexiones $\langle T_s \rangle$ coincide con el grupo original G bajo el morfismo canónico $\varphi(g) = T_g$. Entonces podemos considerar el siguiente Lema:

Lema 1

Sea G un grupo finito que actúa sobre V. Supongamos que:

(i) la acción es lineal, es decir $g \cdot (v + w) = g \cdot v + g \cdot w$ y $g \cdot (\lambda v) = \lambda g \cdot v$,
(ii) la acción es efectiva o fiel, es decir, el único elemento tal que $g \cdot v = v$ para todo $v \in V$ es la identidad.
(iii) $G = \langle S \rangle$ y para todo $s \in S$, la transformación T_s dada por $T_s(v) = s \cdot v$ es una reflexión.

Entonces (G, V) es un grupo finito de reflexión.

Demostración. Basta demostrar que $G \cong \langle T_s \,|\, s \in S \rangle$ ya que por (iii) toda T_s con $s \in S$ es reflexión. Consideremos la función $\varphi : G \to \langle T_s \,|\, s \in S \rangle$ dada por $\varphi(g) = T_g$. Notemos que

- φ está definida para todo $g \in G$ porque G actúa linealmente sobre V. Entonces para todo $g \in G$, T_g es una transformación lineal bien definida. Además φ es un homomorfismo de grupos como consecuencia de las propiedades de la acción de G en V.
- φ es inyectiva. Si $T_g = T_h$ para algún $g, h \in G$, entonces $T_g (T_h)^{-1} = T_g T_{h^{-1}} = T_{gh^{-1}}$ (consecuencia de que las T_k están definidas a partir de la acción de G en V) y $T_{gh^{-1}} = I$ implica, por (ii), que $gh^{-1} = 1$ o bien $g = h$.
- φ es sobreyectiva. Sea $T_g \in \langle T_s \,|\, s \in S \rangle$ un elemento arbitrario. Entonces T_g se puede escribir como un producto finito
$$T_g = T_{s_1} T_{s_2} \cdots T_{s_n}$$

que corresponde a

$$T_g = T_{s_1 s_2 \cdots s_n}$$

De forma que $g = s_1 s_2 \cdots s_n \in G = \langle S \rangle$ y por tanto φ es sobreyectiva.

□

Para los siguientes dos ejemplos de grupos de reflexión es necesario recordar la definición del **producto semidirecto** de teoría de grupos:
Sean H y K dos grupos y $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ un homomorfismo. Entonces consideremos el producto cartesiano $K \times H$ con el producto

$$(k_1, h_1)(k_2, h_2) = (k_1 k_2, h_1 \varphi(k_1)(h_2))$$

Entonces se puede verificar que el elemento neutro es $(1_K, 1_H)$, el inverso de cualquier elemento (k, h) es $(k^{-1}, \varphi(k^{-1})(h^{-1}))$ y que la operación producto es asociativa:

$$\begin{aligned}
\big[(k_1, h_1)(k_2, h_2)\big](k_3, h_3) &= \big(k_1 k_2, h_1 \varphi(k_1)(h_2)\big)(k_3, h_3) \\
&= \big(k_1 k_2 k_3, h_1 \varphi(k_1)(h_2)\varphi(k_1 k_2)(h_3)\big) \\
&= \big(k_1 k_2 k_3, h_1 \varphi(k_1)(h_2)\varphi(k_1)(\varphi(k_2)h_3))\big) \\
&= \big(k_1 k_2 k_3, h_1 \varphi(k_1)(h_2 \varphi(k_2)h_3)\big) \\
&= (k_1, h_1)(k_2 k_3, h_2 \varphi(k_2)h_3) \\
&= (k_1, h_1)\big[(k_2, h_2)(k_3, h_3)\big]
\end{aligned}$$

Al grupo obtenido de esta forma se le conoce como el producto semidirecto de K y H bajo el homomorfismo φ y se denota $K \,{}_{\varphi}\!\ltimes H$ o $H \rtimes_{\varphi} K$

Ejemplo 3: El grupo de reflexión B_n

Sea $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ el campo de dos elementos y $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ la base canónica para el espacio vectorial $\mathbb{F}^n$. Consideremos el homomorfismo

$$\varphi : S_n \to \mathrm{Aut}(\mathbb{F}^n, +)$$

dado por

$$\varphi(\sigma)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \epsilon_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \epsilon_{\sigma(i)}$$

Luego consideremos el producto semidirecto $S_n \,{}_{\varphi}\!\ltimes \mathbb{F}^n$ y demos una acción de este grupo en $\mathbb{R}^n$ como sigue:

$$(\sigma, a) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{a_{\sigma(i)}} x_i e_{\sigma(i)}$$

Donde $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.
Veamos que la operación indicada es una acción lineal y efectiva.

- $(1, \mathbf{0}) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\mathbf{0}_{1(i)}} x_i e_{1(i)} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

- Sean $(\sigma, a), (\tau, b) \in S_n \,{}_\varphi\!\ltimes \mathbb{F}^n$, entonces

$$(\sigma, a) \cdot \left((\tau, b) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right) = (\sigma, a) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{b_{\tau(i)}} x_i e_{\tau(i)} \right)$$

tomando $i = \tau^{-1}(i')$ para recorrer el índice

$$= (\sigma, a) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{b_i} x_{\tau^{-1}(i)} e_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{a_{\sigma(i)}} (-1)^{b_i} x_{\tau^{-1}(i)} e_{\sigma(i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{a_{\sigma(i)} + b_i} x_{\tau^{-1}(i)} e_{\sigma(i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{a_{\sigma(\tau(i))} + b_{\tau(i)}} x_i e_{\sigma(\tau(i))} \tag{1}$$

Por otra parte

$$((\sigma, a) \cdot (\tau, b)) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = (\sigma\tau, a + \varphi(\sigma)(b)) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{[a+\varphi(\sigma)b]_{\sigma\tau(i)}} x_i e_{\sigma(\tau(i))} \tag{2}$$

Así que resta ver que los exponentes del término (-1) en (1) y (2) coinciden.

$$\begin{aligned}
[a + \varphi(\sigma) b]_{\sigma\tau(i)} &= a_{\sigma\tau(i)} + \varphi(\sigma) b_{\sigma\tau(i)} \\
&= a_{\sigma\tau(i)} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \epsilon_{\sigma(i)} \right)_{\sigma\tau(i)} \\
&= a_{\sigma\tau(i)} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_{\tau(i)} \epsilon_{\sigma(\tau(i))} \right)_{\sigma\tau(i)} \\
&= a_{\sigma\tau(i)} + b_{\tau(i)}
\end{aligned}$$

Por tanto es una acción.

- Veamos que es lineal

$$\begin{aligned}
(\sigma, a) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right) &= (\sigma, a) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i) e_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)} (x_i + \lambda y_i) e_{\sigma(i)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)} x_i e_{\sigma(i)} + \lambda \sum_{i=1}^{n} y_i e_{\sigma(i)} \\
&= (\sigma, a) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right) + \lambda (\sigma, a) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right)
\end{aligned}$$

- La acción es fiel, pues si suponemos que $(\sigma,a)\cdot x = x$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$, entonces para todo índice i, se cumple que $a_{\sigma(i)}=0$ y $\sigma(i)=i$ implicando que $(\sigma,a)=(1,\mathbf{0})$.

Ahora, veamos que un conjunto generador para $S_n\,{}_{\varphi}\!\ltimes\mathbb{F}^n$ está dado por el conjunto

$$S=\{((i\,j),\mathbf{0}),(1,\epsilon_i)|i,j\in\{1,\dots,n\}\}$$

Esto es así porque $S_n\cong\{(\sigma,\mathbf{0})\}\subset S_n\,{}_{\varphi}\!\ltimes\mathbb{F}^n$. Luego basta tomar un conjunto generador para S_n y multiplicarlo por $\mathbf{0}$ para obtener un conjunto generador de $\{(\sigma,\mathbf{0})\}$. Similarmente como $\mathbb{F}^n\cong\{(1,a)|a\in\mathbb{F}^n\}$ basta tomar a la base canónica multiplicada por la permutación identidad a la izquierda para obtener un conjunto generador para $\{(1,a)|a\in\mathbb{F}^n\}$. Finalmente todo elemento (σ,a) de $S_n\,{}_{\varphi}\!\ltimes\mathbb{F}^n$ se puede escribir como un producto de elementos de S:

$$(\sigma,\mathbf{0})(1,\varphi(\sigma^{-1})(a))=(\sigma 1,\mathbf{0}+\varphi(\sigma)(\varphi(\sigma^{-1})(a)))=(\sigma,a)$$

Reflexiones. Veamos ahora que todo elemento de S da lugar a una reflexión por medio de la regla de correspondencia enunciada en el Lema 1.

$$T_{((i\,j),\mathbf{0})}\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right)=\sum_{k=1}^n(-1)^{\mathbf{0}_{(i\,j)(k)}}x_i e_{(i\,j)(k)}=\sum_{k=1}^n x_i e_{(i\,j)(k)}$$

así que $T_{((i\,j),\mathbf{0})}(x_1,\dots,x_n)=(x_1',\dots,x_n')$ donde $x_k'=x_k$ si $k\notin\{i,j\}$, $x_i'=x_j$ y $x_j'=x_i$. Permutando las coordenadas i y j del vector x.

Esta regla de correspondencia es la misma que la de la reflexión con raíz e_i-e_j:

$$\begin{aligned}
S_{e_i-e_j}(x)&=x-2\frac{\langle e_i-e_j,x\rangle}{\langle e_i-e_j,e_i-e_j\rangle}(e_i-e_j)\\
&=x-\langle e_i-e_j,x\rangle(e_i-e_j)\\
&=x-\big(\langle e_i,x\rangle-\langle e_j,x\rangle\big)(e_i-e_j)\\
&=x-(x_i-x_j)(e_i-e_j)\\
&=x-x_i(e_i-e_j)+x_j(e_i-e_j)\\
&=\underbrace{x-(x_ie_i+x_je_j)}_{\text{hace 0 las entradas } i \text{ y } j}+\underbrace{x_ie_j+x_je_i}_{\substack{\text{inserta } x_i\ (x_j) \text{ en}\\ \text{la posición } j\ (i)}}.
\end{aligned}$$

Por tanto, $T_{((i\,j),\mathbf{0})}=S_{e_i-e_j}$ es una reflexión.

Ahora veamos si $T(1,\epsilon_i)$ es una reflexión:

$$T_{(1,\varepsilon_i)}\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right)=\sum_{k=1}^n(-1)^{[\epsilon_i]_{1(k)}}x_k e_{1(k)}=\sum_{k=1}^n(-1)^{\delta_{ik}}x_k e_k$$

Introduce un signo $-$ en la coordenada i del vector x.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
S_{e_i}(x)&=x-2\frac{\langle e_i,x\rangle}{\langle e_i,e_i\rangle}e_i\\
&=x-2\langle e_i,x\rangle e_i\\
&=x-2x_ie_i\\
&=(x_1,x_2,\dots,x_{i-1},-x_i,x_{i+1},\dots,x_n).
\end{aligned}$$

Por tanto, $T(1,\varepsilon_i) = S_{e_i}$ y entonces $T_{(1,\varepsilon_i)}$ es una reflexión.
Finalmente, como la acción propuesta de $S_n\ {}_{\varphi}\!\ltimes \mathbb{F}^n$ en $\mathbb{R}^n$ satisface todas las condiciones del Lema 1 concluimos que $(S_n\ {}_{\varphi}\!\ltimes \mathbb{F}^n, \mathbb{R}^n)$ es un grupo finito de reflexión y lo denotamos por B_n.
De esta definición se verifica inmediatamente que

$$|B_n| = |S_n\ {}_{\varphi}\!\ltimes \mathbb{F}^n| = |S_n||\mathbb{F}^n| = n!2^n.$$

Ejemplo 4: $B_1 \sim A_1$

De acuerdo a la definición de los grupos de reflexión A y B tenemos

$$B_1 = (S_1\ {}_{\varphi}\!\ltimes \mathbb{F}^1, \mathbb{R}^1) = \{T_{(1,0)}, T_{(1,1)}\}$$
$$A_1 = (S_2, \mathbf{1}^{\perp}) = \{T_1, T_{(1\,2)}\}$$

Proponemos la función f definida de la siguiente manera

$$\begin{aligned} f : \langle e_1 \rangle &\to \langle e_2 - e_1 \rangle \\ x &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(-x, x), \end{aligned}$$

notemos que $\|f(x)\| = \left\| \frac{1}{\sqrt{2}}(-x,x) \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \|x(-1,1)\| = |x|$, así que f es una isometría.

Ahora, veamos que los conjugados bajo f de elementos de $S_1\ {}_{\varphi}\!\ltimes \mathbb{F}^1$ corresponden a elementos de A_1.

$$\begin{aligned} fT_{(1,0)}f^{-1}(-x,x) &= fT_{(1,0)}\left(\sqrt{2}x\right) \\ &= f\left(\sqrt{2}x\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{2}x, \sqrt{2}x\right) \\ &= (-x,x). \end{aligned}$$

Así, $fT_{(1,0)}f^{-1}$ corresponde a la transformación identidad en A_1.
Por último, consideremos al elemento $(1,1) \in S_1\ {}_{\varphi}\!\ltimes \mathbb{F}^1$, entonces

$$\begin{aligned} fT_{(1,1)}f^{-1}(-x,x) &= fT_{(1,1)}\left(\sqrt{2}x\right) \\ &= f\left((-1)^1\sqrt{2}xe_1\right) \\ &= f\left(-\sqrt{2}x\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}x, -\sqrt{2}x\right) \\ &= (x,-x). \end{aligned}$$

Por tanto $fT_{(1,1)}f^{-1}$ corresponde al elemento $T_{(1,2)}$ de A_1.
Por tanto, por definición de equivalencia de grupos de reflexión, se concluye que $B_1 \sim A_1$.

Ejemplo 5: $B_2 \sim I_2(4)$

Por definición tenemos que

$$B_2 = \left(S_2 \,_{\varphi}\!\ltimes \mathbb{F}^2, \mathbb{R}^2\right) = \big\{T_{(1,\mathbf{0})}, T_{(1,\epsilon_1)}, T_{(1,\epsilon_2)}, T_{(1,\epsilon_1+\epsilon_2)}, \\ T_{((1\,2),\mathbf{0})}, T_{((1\,2),\epsilon_1)}, T_{((1\,2),\epsilon_2)}, T_{((1\,2),\epsilon_1+\epsilon_2)}\big\}$$

De la lista de transformaciones $T_{(\sigma,a)}$ se identifican cuatro reflexiones:

$$\begin{aligned} T_{(1,\epsilon_1)} &= S_{e_1} \\ T_{(1,\epsilon_2)} &= S_{e_2} \\ T_{((12),\mathbf{0})} &= S_{e_1-e_2} \\ T_{((12),\epsilon_1+\epsilon_2))} &= S_{e_1+e_2} \end{aligned}$$

Observemos también que

$$\begin{aligned} T_{((12),\epsilon_1+\epsilon_2))}T_{(1,\epsilon_1)} &= T_{((12),\epsilon_1)} \\ T^2_{((12),\epsilon_1)} &= T_{(1,\epsilon_1+\epsilon_2)} \\ T^3_{((12),\epsilon_1)} &= T_{((12),\epsilon_2)} \\ T^3_{((12),\epsilon_1)} &= I \end{aligned}$$

Así que tenemos dos vectores $x = e_1$ y $y = e_1 + e_2$ que forman un ángulo de $\pi/4$, dando como resultado un grupo cíclico de rotaciones por ángulo $\pi/4$, $\langle S_{e_1}, S_{e_1+e_2}\rangle$, de orden 4 y el producto de estas rotaciones por la reflexión S_{e_1} da lugar a las 4 restantes transformaciones que son reflexiones, mostrando directamente que los grupos B_2 e $I_2(4)$ no solo son equivalentes sino iguales.

Otra forma de verificar que ambos grupos de reflexiones son equivalentes es verificando las representaciones matriciales de las rotaciones por un ángulo $\pi/4$ y las reflexiones correspondientes del grupo diédrico $D_{2(4)}$:

$$R_k = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{k\pi}{2} & -\operatorname{sen}\dfrac{k\pi}{2} \\ \operatorname{sen}\dfrac{k\pi}{2} & \cos\dfrac{k\pi}{2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S_k = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{k\pi}{2} & \operatorname{sen}\dfrac{k\pi}{2} \\ \operatorname{sen}\dfrac{k\pi}{2} & -\cos\dfrac{k\pi}{2} \end{pmatrix},$$

con $k = \{0,1,2,3\}$, donde R_k determina 4 rotaciones y S_k 4 reflexiones. Así,

$$(D_{2(4)}, \mathbb{R}^2) = \{R_k, S_k \mid k \in \{0,1,2,3\}\}.$$

Veamos que la identidad en $\mathbb{R}^2$ es la isometría adecuada para mostrar que los grupos son equivalentes. Entonces basta verificar que cada elemento de B_2 tiene como representación matricial alguna de las R_k's o S_k's.

- $T_{(1,(0,0))}(x_1,x_2) = (-1)^0 x_1 e_{1(1)} + (-1)^0 x_2 e_{1(2)} = x_1 e_1 + e_2 x_2 = x$, entonces $T_{(1,(0,0))} = I$ cuya matriz asociada es R_0.
- $T_{(1,(1,0))}(x_1,x_2) = (-1)^1 x_1 e_{1(1)} + (-1)^0 x_2 e_{1(2)} = -x_1 e_1 + x_2 e_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

  Es decir, $T_{(1,(1,0))} = S_2$.

- $T_{(1,(0,1))}(x) = (-1)^0 x_1 e_{1(1)} + (-1)^1 x_2 e_{1(2)} = xe_1 - x_2 e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
  Por tanto $T_{(1,(0,1))} = S_0$.
- $T_{(1,(1,1))}(x) = (-1)^1 x_1 e_{1(1)} + (-1)^1 x_2 e_{1(2)} = -x_1 e_1 - x_2 e_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
  Por tanto, $T_{(e_1,(1,1))} = R_2$.
- $T_{((1\,2),(0,0))}(x) = (-1)^0 x_1 e_{(1\,2)(1)} + (-1)^0 x_2 e_{(1\,2)(2)} = x_1 e_2 + x_2 e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
  Por tanto, $T_{((1\,2),(0,0))} = S_1$.
- $T_{((1\,2),(1,0))}(x) = (-1)^0 x_1 e_{(1\,2)(1)} + (-1)^1 x_2 e_{(1\,2)(2)} = x_1 e_2 - x_2 e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
  Por tanto $T_{((1\,2),(1,0))} = R_1$.
- $T_{((1\,2),(0,1))}(x) = (-1)^1 x_1 e_{(1\,2)(1)} + (-1)^0 x_2 e_{(1\,2)(2)} = -x_1 e_2 + x_2 e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
  Por tanto $T_{((1\,2),(0,1))} = R_3$.
- $T_{((1\,2),(1,1))}(x) = (-1)^1 x_1 e_{(1\,2)(1)} + (-1)^1 x_2 e_{(1\,2)(2)} = -x_1 e_2 - x_2 e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
  Por tanto $T_{((1\,2),(1,1))} = S_3$.

por tanto se verifica que $B_2 \sim I_2$.

Ejemplo 6: El grupo de reflexión D_n

Consideremos ahora al subespacio $\mathbb{F}_0^n$ definido como los elementos de $\mathbb{F}^n$ tales que la suma de sus coordenadas es cero, es decir,

$$\mathbb{F}_0^n := \left\{ (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{F}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} a_i = 0 \right\}$$

este subespacio tiene codimensión 1 y como subgrupo aditivo de $\mathbb{F}^n$ tiene 2^{n-1} elementos. Ya que basta dar los primeros $n-1$ elementos con 0 o 1 y el n-ésimo está determinado por la condición que define a $\mathbb{F}_0^n$.
De la definición anterior se verifica que

- $(1, \mathbf{0}) \in S_n\_\varphi \ltimes \mathbb{F}_0^n$
- Dados (σ, a), $(\tau, b) \in S_n\ {}_\varphi\!\ltimes \mathbb{F}_0^n$, entonces $(\sigma, a)(\tau, b) = (\sigma\tau, a + \varphi(\sigma)(b))$ donde $\sum_{i=1}^n [a + \varphi(\sigma)(b)]_i = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = 0$ y esto implica que $(\sigma, a)(\tau, b) \in S_n\ {}_\varphi\!\ltimes \mathbb{F}_0^n$.

Por tanto se sigue que $S_n\ {}_\varphi\!\ltimes \mathbb{F}_0^n$ es un subgrupo de $S_n\ {}_\varphi\!\ltimes \mathbb{F}^n$.

Consideremos ahora la acción de $S_n\ {}_\varphi\!\ltimes \mathbb{F}^n$ en $\mathbb{R}^n$ dada en el ejemplo del grupo B_n restringida al subgrupo $S_n\ {}_\varphi\!\ltimes \mathbb{F}_0^n$. Por las propiedades desarrolladas en el ejemplo del grupo B_n se deduce que la nueva acción es lineal y fiel. Resta ver que el resultado de la acción sobre un subconjunto S generador de $S_n\ {}_\varphi\!\ltimes \mathbb{F}_0^n$ genera un conjunto de reflexiones.

Verifiquemos entonces que

$$S_n\ {}_\varphi\!\ltimes \mathbb{F}_0^n = \left\langle \left((i\,j), \mathbf{0}\right), (1, \varepsilon_i + \varepsilon_j) \mid i, j \in \{1, \ldots, n\} \right\rangle.$$

- Sea $a \in \mathbb{F}_0^n$, dado que $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ se sigue que $a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i$ y entonces
$$(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \epsilon_i + a_n \epsilon_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \epsilon_i + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \epsilon_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i (\varepsilon_i + \varepsilon_n).$$
Por tanto $1 \times \mathbb{F}_0^n = \left\langle (1, \varepsilon_i + \varepsilon_j) \mid i, j \in \{1, \dots, n\} \right\rangle$.
- El conjunto de transposiciones es un conjunto generador para S_n, entonces $S_n \times \{\mathbf{0}\}$ es generado por los elementos $\left\langle \big((i\,j), \mathbf{0}\big) \mid i, j \in \{1, \dots, n\} \right\rangle$.
- Por otro lado notemos que para cualquier $(\sigma, a) \in S_n \,{}_{\varphi}\!\ltimes \mathbb{F}_0^n$ se tiene que
$$(\sigma, 0) \cdot (1, \varphi(\sigma^{-1})(a)) = (\sigma 1, 0 + \varphi(\sigma)(\varphi(\sigma^{-1})(a))) = (\sigma, a).$$
Esto prueba que
$$S_n \,{}_{\varphi}\!\ltimes \mathbb{F}_0^n = \left\langle \, ((i\,j), 0), (1, \varepsilon_i + \varepsilon_j) \,\middle|\, i, j \in \{1, \dots, n\} \right\rangle.$$

Resta probar que las transformaciones asociadas a los elementos del conjunto generador son reflexiones, verifiquemos que
$$T_{((i\,j),0)} = S_{e_i - e_j} \qquad y \qquad T_{((i\,j),\varepsilon_i+\varepsilon_j)} = S_{e_i+e_j}.$$
La primera igualdad se sigue del ejemplo B_n donde se verifico que las transformaciones determinadas por los elementos $((i\,j), 0)$ son reflexiones.
Mostremos por último que $T_{((i\,j),\varepsilon_i+\varepsilon_j)} = S_{e_i+e_j}$.
$$T_{((i\,j),\varepsilon_i+\varepsilon_j)}\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{[\epsilon_i+\epsilon_j]_{(i\,j)(k)}} x_k e_{(i\,j)(k)} = \sum_{k=1}^n (-1)^{\delta_{ik}+\delta_{jk}} x_k e_{(i\,j)(k)}.$$
Así que $T_{((i\,j),\varepsilon_i+\varepsilon_j)}$ intercambia las coordenadas x_i y x_j y agrega signo $-$ a ambas.
Por otra parte
$$\begin{aligned}
S_{e_i+e_j}(x) &= x - 2\frac{\langle e_i + e_j, x\rangle}{\langle e_i + e_j, e_i + e_j\rangle}(e_i + e_j) \\
&= x - \langle e_i + e_j, x\rangle (e_i + e_j) \\
&= x - \big(\langle e_i, x\rangle + \langle e_j, x\rangle\big)(e_i + e_j) \\
&= x - (x_i + x_j)(e_i + e_j) \\
&= x - x_i(e_i + e_j) - x_j(e_i + e_j) \\
&= \underbrace{x - (x_i e_i + x_j e_j)}_{\text{hace 0 las entradas } i \text{ y } j} - \underbrace{(x_i e_j + x_j e_i)}_{\substack{\text{inserta } -x_i\ (-x_j) \text{ en} \\ \text{la posición } j\ (i)}}.
\end{aligned}$$
Entonces se satisfacen todas las condiciones del Lema 1 y definimos como D_n al grupo $\left(S_n \,{}_{\varphi}\!\ltimes \mathbb{F}_0^n, \mathbb{R}^n\right)$. Notemos además que $|D_n| = n! 2^{n-1}$.

2. Sistemas de raíces

Sea (G,V) un grupo finito de reflexión. El sistema de raíces de (G,V) es

$$\Phi_{(G,V)} = \{x \in V \mid \|x\| = 1,\, S_x \in G\}$$

Teorema 2

Φ tiene las siguientes propiedades:

1. Si $x \in \Phi$, entonces $\mathbb{R}x \cap \Phi = \{x, -x\}$
2. $|\Phi| = 2 \times$ Número de reflexiones en G
3. Si $T \in G$, $x \in \Phi$, entonces $T(x) \in \Phi$.

Demostración.

1. Si $x \in \Phi$, entonces $S_x \in G$, pero $S_x = S_{-x}$ por el Corolario 1 y $\|-x\| = \|x\| = 1$, así que $-x \in \Phi$. Por otra parte si $\alpha x \in \Phi$, entonces $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| = |\alpha| = 1$ implica que αx es x o $-x$.
2. Notemos que, como $S_x = S_{\alpha x}$ es una única reflexión en G, tenemos
$$\Phi = \bigcup_{S_{\alpha x} \in G} \{x \mid \|x\| = 1\} = \bigcup_{S_{\alpha x} \in G} \{x, -x\},$$
por tanto la cardinalidad de Φ es igual al producto de la cardinalidad del conjunto de reflexiones en V por 2.
3. Sea $x \in \Phi$, entonces $S_x(x) = -x \in \Phi$ o bien $S_y(x) = x$ cuando $y \neq \alpha x$ porque $x \in V^{S_y}$. Luego para toda $T \in G$, existe una sucesión finita de reflexiones tales que
$$T = S_{z_1} S_{z_2} \cdots S_{z_n}$$
y por tanto
$$T(x) = S_{z_1} S_{z_2} \cdots S_{z_n}(x) \in \{x, -x\} \subset \Phi.$$

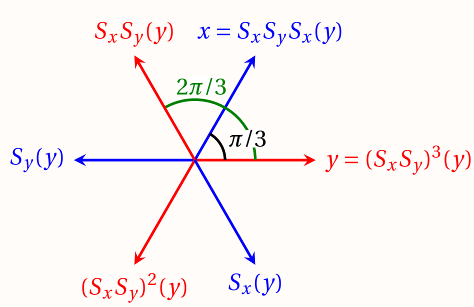
$\square$

Ejemplo 7

$A_2 \sim I_2(3)$ tiene un sistema de 6 raíces.
Veamos primero que $A_2 \sim I_2(3)$. En el ejemplo 1 Se define a $I_2(3)$ como

$$I_2(3) = (D_6, \mathbb{R}^2)$$

un grupo de reflexión finito de seis elementos. Su construcción se puede dar a partir de considerar dos vectores x y y que forman un ángulo de $\pi/3$ entre ellos, como se muestra en la siguiente figura:



Los vectores en rojo representan el efecto de aplicar una rotación (generada a partir del producto S_xS_y) al vector y mientras que los vectores en azul representan el efecto de aplicar una reflexión al vector y. De la descripción se puede verificar que $x = S_z(y)$ donde $z = S_xS_y(y)$.
Por otra parte, el grupo de reflexión finito $A_2 = \left(S_3, \langle 1,1,1\rangle^{\perp}\right)$ está determinado por los elementos

$$\{T_1, T_{(12)} = S_{e_1-e_2}, T_{(13)} = S_{e_1-e_3}, T_{(23)} = S_{e_2-e_3}, T_{(123)}, T_{(132)}\}$$

Donde las reflexiones están dadas por las transformaciones $T_{(ij)}$, más aún queremos dar una isometría $\varphi : \langle 1,1,1\rangle^{\perp} \to \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi I_2(3)\varphi^{-1} = A_2$. Entonces podemos considerar una isometría que mande una base conformada por raíces de A_2 en una base con raíces de $I_2(3)$. Una base para $\langle 1,1,1\rangle^{\perp}$ está dada por los vectores $\{e_1 - e_3, e_2 - e_3\}$ y una base para $\mathbb{R}^2$, que tiene como vectores a raíces de A_2 es

$$\left\{e_1, \ \frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2\right\}$$

Por tanto queremos la transformación φ tal que $\varphi(e_1 - e_3) = e_1$ y $\varphi(e_2 - e_3) = \frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$. Extendiendo está definición linealmente y normalizando adecuadamente para obtener una isometria obtenemos la regla de correspondencia:

$$\varphi(x,y,z) = \left(\sqrt{2}x + \frac{y}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}y\right)$$

con inversa

$$\varphi^{-1}(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{6}}, \frac{2y}{\sqrt{6}}, -\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{6}}\right)$$

Entonces podemos comprobar fácilmente que los conjugados bajo φ de elementos de A_2 corresponden a los elementos de $I_2(3)$.

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}S_y\varphi &= T_{(13)}\\
\varphi^{-1}S_x\varphi &= T_{(23)}\\
\varphi^{-1}S_xS_y\varphi &= T_{(123)}\\
\varphi^{-1}S_xS_yS_x\varphi &= T_{(12)}\\
\varphi^{-1}(S_xS_y)^2\varphi &= T_{(132)}\\
\varphi^{-1}(S_xS_y)^3\varphi &= T_1
\end{aligned}$$

Por tanto concluimos que $A_2 \sim I_2(3)$ y de la descripción de $I_2(3)$ sabemos que su grupo de reflexiones tiene 3 reflexiones distintas. Finalmente, por el Teorema 2 se tiene que el sistema de raíces de A_2 tiene 6 elementos.

Suele ocurrir que la restricción $\|x\| = 1$ en la definición de sistema de raíces es restrictiva en el sentido de que hay que normalizar los vectores y a menudo es más fácil trabajar con vectores de alguna longitud distinta de 1, por poner un ejemplo, es mucho más fácil trabajar con el vector

$e_1 + e_2$ que con el vector $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$. Por tal razón se define un sistema de raíces en general sin pedir la condición de norma unitaria.

Definición 5

Un sistema de raíces (en general) es un subconjunto finito Φ de un espacio vectorial V tal que

1. $O_V \notin \Phi$
2. $x \in \Phi$ implica que $\mathbb{R}x \cap \Phi = \{x, -x\}$
3. $x, y \in \Phi$ implica que $S_x(y) \in \Phi$

Recordar que un orden total en el espacio vectorial V es una relación transitiva, $<$, que satisface:

1. Para cada par λ, μ se cumple solo una de las siguientes condiciones: $\lambda < \mu$, $\lambda = \mu$ o $\mu < \lambda$.
2. Para cualesquiera λ, μ, $\nu \in V$, si $\mu < \nu$, entonces $\lambda + \mu < \lambda + \nu$.
3. Si $\mu < \nu$ y si c es un número real no cero, entonces $c\mu < c\nu$ si $c > 0$ y $c\nu < c\mu$ si $c < 0$.

Dado un orden total en V diremos que $\lambda \in V$ es **positivo** si $0 < \lambda$.

Definición 6

Sea Φ un sistema de raíces. Diremos que $\Pi \subset \Phi$ es un sistema positivo si consta de todos aquellos vectores que son positivos relativos a algún orden total V.
Diremos que $\Delta \subset \Phi$ es un sistema simple si Δ es una base para el espacio vectorial generado por Φ en V y si todo elemento $\alpha \in \Phi$ es una combinación lineal de Δ con coeficientes todos del mismo signo.

Lema 2

Si Δ es un sistema simple y x, $y \in \Delta$, entonces $\langle x, y \rangle \leq 0$

Demostración. Supongamos que existe un par de elementos x y y tales que $\langle x, y \rangle > 0$. Como

$$S_x(y) = y - 2\frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} x \in \Phi$$

y Δ es base para el espacio generado por Φ, se tiene que $S_x(y)$ es combinación lineal de x y y con coeficiente negativo para x y positivo para y lo cual contradice la definición de sistema simple. □

Teorema 3

(a) Si Δ es un sistema simple de Φ, entonces existe un único sistema positivo que contiene a Δ.
(b) Todo sistema positivo $\Pi \subset \Phi$ contiene a un único sistema simple.

Demostración.

(a) Supongamos que Δ es un sistema simple de Φ. Podemos extender Δ para formar una base, $\mathscr{B}$, de V y sea Π el sistema positivo correspondiente al orden lexicográfico inducido por $\mathscr{B}$. Claramente $\Delta \subset \Pi$ y veamos que Π está caracterizado por ser el conjunto de combinaciones lineales positivas de elementos de Δ. Sea $v \in \Pi$ un elemento cualquiera, entonces $v = \sum_{b \in \mathscr{B}} c_b b$ donde las coordenadas c_b son todas positivas, pero también $v = \sum_{d \in \Delta} c_d d$ donde todos los coeficientes c_d son del mismo signo. Luego, como $\Delta \subset \mathscr{B}$ se tiene que los coeficientes de ambas expresiones son iguales (pues $\mathscr{B}$ es una base) y por tanto v es una suma de términos positivos de Δ. Luego, Π es único.

(b) Sea Π un sistema positivo. Como $\langle \Pi \rangle = \langle \Phi \rangle$ podemos reducir Π a una base para $\langle \Phi \rangle$, sin embargo la elección no es única. Vamos a elegir a la base Δ que cumple la propiedad de que todo elemento en Π es combinación lineal no negativa de Δ. La construcción se hace de la siguiente forma; podemos ordenar a Π como $\{v_1, \dots, v_n\}$ y elegimos al vector v_1, entonces claramente solo v_1 es combinación lineal (positiva) de v_1, ahora agregamos un segundo vector v_2 y si ocurre que $c_1 v_1 - c_2 v_2 \in \Pi$ con $c_1, c_2 > 0$, entonces reemplazamos a v_1 por $c_1 v_1 - c_2 v_2$, ahora $c_1 v_1 - c_2 v_2$ aparece como combinación lineal positiva de sí mismo, $v_1 = \frac{1}{c_1}(c_1 v_1 - c_2 v_2) + \frac{c_2}{c_1} v_2$ y $v_2 = v_2$ así que se mantiene la propiedad de expresar con coeficientes positivos a los términos ya considerados. Similarmente si $-c_1 v_1 + c_2 v_2 \in \Pi$ reemplazamos v_2 por $-c_1 v_1 + c_2 v_2$. Si más adelante ocurre algún elemento de la forma $c_1 v_1 - c_2' v_2$ con $c_2 < c_2'$ reemplazamos a $c_1 v_1 - c_2 v_2$ con $c_1 v_1 - c_2' v_2$ y entonces debe ocurrir que $c_1 v_1 - c_2 v_2 = c_1 v_1 - c_2' v_2 + (c_2 - c_2') v_2$ se expresa como combinación lineal positiva de los nuevos términos a considerar. Mejor aún podemos empezar con v_1, v_2 y hacer una búsqueda exhaustiva en el conjunto por el término $c_1 v_1 + c_2 v_2$ donde c_1 o c_2 son coeficientes mínimos negativos. Una vez hecho esto se agregan los vectores encontrados a Δ y se procede a ampliar el conjunto agregando otro elemento de tal forma que el conjunto resultante sea linealmente independiente y todos los elementos en Π que son combinación lineal de Δ tienen coeficientes no negativos.

□

Ejemplo 8:

Desarrollar Aldair

Consideremos a $I_2(n)$ como las simetrías de un n−ágono con n reflexiones, entonces tiene $2n$ raíces en los vértices de un $2n$−ágono regular.

$$\{\alpha, \beta\} \text{ es simple} \iff \Phi \subset \text{ el cono} \iff \widehat{-\beta, \alpha} = \frac{\pi}{n} \iff \alpha \hat{,} \beta = \frac{(n-1)}{n}\pi.$$

- Cada raíz yace en 2 sistemas simples.
- El número de sistemas en n.
- Un sistema positivo está dado por

$$\left\{ \text{vectores entre algún } \alpha \text{ y } \beta, \text{ donde } \widehat{\alpha, \beta} = \frac{(n-1)}{n}\pi \right\}$$

Si $\{\alpha, \beta\}$ es simple, entonces para todo $x \in \Phi$ existen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tales que $x = x_1 \alpha + x_2 \beta$; es decir, x está entre α y β para todo $x \in \Phi$; es decir, Φ esta contenido en el cono comprendido por α y β, tal como lo muestra la Figura 1.

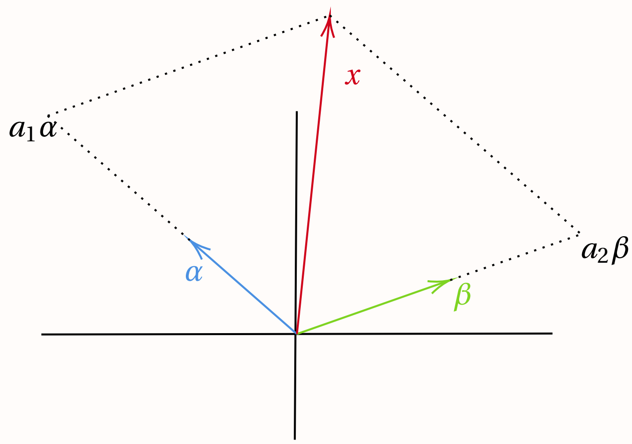


FIGURA 1. Representación de Φ comprendido por α y β.

mas a un si $\{\alpha,\beta\}$ es simple, por el Lema 2.2, $\langle\alpha,\beta\rangle \leq 0$; es decir, forman un ángulo obtuso, el ángulo entre α y β está entre $\frac{\pi}{2}$ y π, por ende $\frac{\pi}{2} \leq \widehat{\alpha,\beta} \leq \pi$; es decir, $\widehat{\alpha,\beta}$ puede tener el ángulo

$$\frac{n-1}{n}\pi \quad \text{pues } \frac{\pi}{2} < \frac{n-1}{n}\pi < \pi,$$

Así,

$$\widehat{\alpha,\beta} = \frac{n-1}{n}\pi$$

Ahora, si $\widehat{\alpha,\beta} = \frac{n-1}{n}\pi$ entonces

$$\begin{aligned}
\widehat{-\beta,\alpha} &= arccos(\langle -\beta,\alpha\rangle) \\
&= -\widehat{\alpha,\beta} + \pi \\
&= -\pi\left(\frac{n-1}{n}\right) + \pi \\
&= \pi\left(-1+1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{\pi}{n}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\widehat{-\beta,\alpha} = \frac{\pi}{n}$

- Cada raíz yace en 2 sistemas simples.
  Considerando $\{\alpha,\beta\} \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\widehat{\alpha,\beta} = \frac{n-1}{n}\pi$ es un sistema simple y por ende $\{-\alpha,-\beta\}$ también lo es, por lo tanto, cada raíz está en dos sistemas simples.
- El número de sistemas simples es n.
  Notamos que cada raíz tiene dos sistemas simples; es decir, habrá 2n sistemas simples pero al ser diferentes por un cambio de signo deberían haber sólo n.
- Un sistema positivo = {vectores entre α y β tal que $\widehat{\alpha,\beta} = \frac{n-1}{n}\pi$}.
  Un sistema positivo está contenido en Φ y Φ está contenido en el cono dado por α,β. Por lo tanto, el sistema positivo esta contenido en

{vectores entre α y β tal que $\widehat{\alpha,\beta} = \frac{n-1}{n}\pi$}
por otro lado
si $x \in$ {vectores entre α y β tal que $\widehat{\alpha,\beta} = \frac{n-1}{n}\pi$}, tenemos que al ser $\{\alpha, \beta\}$ un sistema simple entonces $x = a_1\alpha + a_2\beta$ con $a_1, a_2 > 0$; es decir, $x > 0$.

Por lo tanto, {vectores entre α y β tal que $\widehat{\alpha,\beta} = \frac{n-1}{n}\pi$} está contenido en el sistema positivo, es decir

un sistema positivo esta dado por {vectores entre α y β tal que $\widehat{\alpha,\beta} = \frac{n-1}{n}\pi$}