

6ta Lista de Ejercicios

Álgebra Moderna

1. Sea R un dominio entero y M un R -módulo finitamente generado. Demuestre que M es un módulo de torsión si y sólo si su rango es cero.

2. Sea R un dominio entero. Demuestre que si R es un dominio de ideales principales (PID), entonces todo R -módulo finitamente generado es libre de torsión si y solo si es libre.

3. Sea R un dominio entero y M un R -módulo finitamente generado. Demuestre que $\text{rk } M = r$ si y sólo si M posee un submódulo libre $N \cong R^r$ tal que el cociente M/N es de torsión.

En el caso de que R sea un dominio principal, muestre además que la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

se escinde, de modo que $M \cong N \oplus M/N$.

4. Sean R un dominio entero y

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de R -módulos finitamente generados. Pruebe que

$$\text{rk } M_2 = \text{rk } M_1 + \text{rk } M_3.$$

5. Considere el anillo de polinomios $R = k[x]$, donde k es un cuerpo, y la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1+3x & 2x & 3x \\ 1+2x & 1+2x-x^2 & 2x \\ x & x^2 & x \end{pmatrix}.$$

Mediante *operaciones elementales por filas y columnas* sobre R (como en la Proposición 4.13 de Aluffi), transforme A en una matriz más simple A' que represente un módulo isomorfo al presentado por A . Elimine entradas y factores invertibles hasta obtener una matriz diagonal o casi diagonal, cuyos elementos no nulos $d_i(x)$ satisfagan $d_1 \mid d_2 \mid d_3$.

Describa el módulo resultante como suma directa de R -módulos cíclicos de la forma $R/(d_i(x))$, identificando, si la hay, su parte libre, y exprese la respuesta final de acuerdo con el Teorema de Clasificación de Módulos Finitamente Generados sobre un PID.