

4ta Lista de Ejercicios

Álgebra Moderna

1. Sean I, J ideales en un anillo conmutativo R tales que $I + J = (1)$. Demuestre que $IJ = I \cap J$.
2. Sea R un anillo conmutativo, $a \in R$ y $f_1(x), \dots, f_r(x) \in R[x]$.
 - (a) Pruebe la igualdad de ideales: $(f_1(x), \dots, f_r(x), x - a) = (f_1(a), \dots, f_r(a), x - a)$.
 - (b) Pruebe el *truco de sustitución*: $R[x] / (f_1(x), \dots, f_r(x), x - a) \cong R / (f_1(a), \dots, f_r(a))$.
3. Sea R un anillo. Un R -módulo $M \neq 0$ es *simple* si sus únicos submódulos son $\{0\}$ y M . Sean M, N R -módulos simples y $\varphi : M \rightarrow N$ un homomorfismo de R -módulos. Demuestre que $\varphi = 0$ o bien φ es un isomorfismo.
4. Sea R un anillo, M un R -módulo y $p : M \rightarrow M$ un homomorfismo tal que $p^2 = p$ (proyección). Pruebe que
$$M \cong \ker(p) \oplus \operatorname{im}(p).$$
5. Sea $R = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$ el anillo de polinomios en *infinitas* variables. Pruebe que el ideal $(x_1, x_2, \dots)$ de R *no* es finitamente generado (como ideal, es decir, como R -módulo).