

3ra Lista de Ejercicios

Álgebra Moderna

1. Demuestre que el centro de S_n es trivial para todo $n \geq 3$.
2. Demuestre que todo grupo de orden p^2 es conmutativo.
3. Demuestre que ningún p -grupo de orden mayor o igual a p^2 puede ser simple.
4. Sea G un grupo finito de orden n y sea p un primo que divide a n . Suponga que el único divisor de n congruente con 1 (mod p) es 1. Demuestre que G no puede ser simple.

5. (Grupos nilpotentes)

Para un grupo G se define la *serie central ascendente*

$$Z_0 \trianglelefteq Z_1 \trianglelefteq Z_2 \trianglelefteq \cdots$$

de subgrupos normales de G de manera inductiva:

$$Z_0 = \{e\}, \quad Z_{i+1}/Z_i = Z(G/Z_i).$$

Se dice que G es *nilpotente* si existe m tal que $Z_m = G$.

- (a) Demuestre que todo subgrupo propio $H < G$ de un grupo nilpotente finito está **propiamente** contenido en su normalizador $N_G(H)$.
- (b) Deduzca que todos los subgrupos de Sylow de un grupo nilpotente finito son normales.